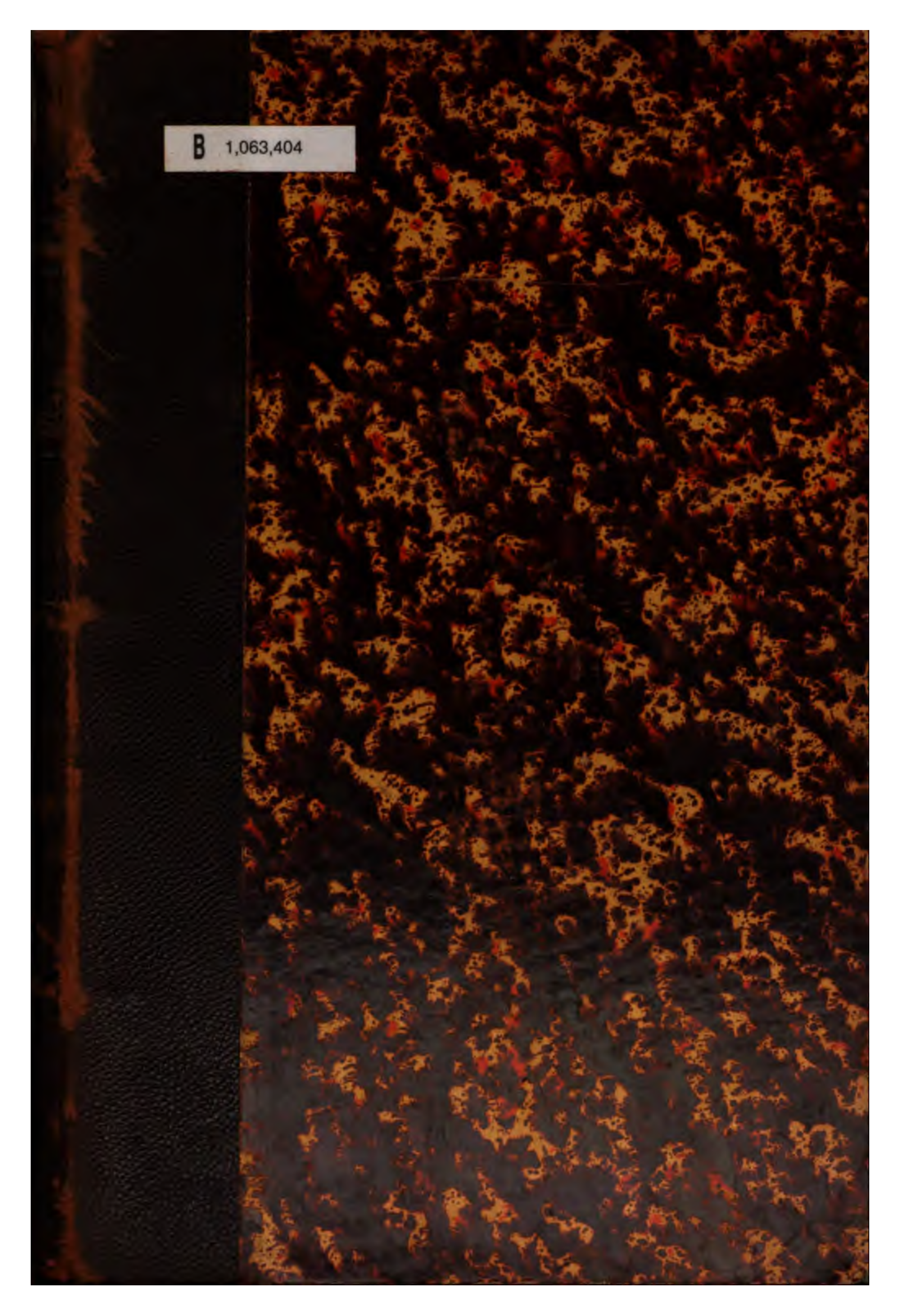

B 1,063,404


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

LISTE

DES

PRÉSIDENTS ET VICE-PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ

de 1853 à 1893

ANNÉE	PRÉSIDENT	VICE-PRÉSIDENT
1853-1854	BAZIN.	DELBOS.
1854-1855	BAZIN.	»
1855-1856	BAZIN.	»
1856-1857	ORÉ.	»
1857-1858	BAUDRIMONT.	»
1858-1859	BAZIN.	»
1859-1860	BAUDRIMONT.	»
1860-1861	ABRIA.	»
1861-1862	LESPIAULT.	ORÉ
1862-1863	BAUDRIMONT.	ROYER.
1863-1864	ORÉ.	AZAM.
1864-1865	AZAM.	ROYER.
1865-1866	ROYER.	H. GINTRAC.
1866-1867	H. GINTRAC.	O. DE LACOLONGE.
1867-1868	O. DE LACOLONGE.	GLOTIN.
1868-1869	GLOTIN.	JEANNEL.
1869-1870	LINDER.	DELFORTERIE.
1870-1871	LINDER.	DELFORTERIE.
1871-1872	DELFORTERIE.	ABRIA.
1872-1873	ABRIA.	RATHEAU.
1873-1874	BAUDRIMONT.	SERRÉ-GUINO.
1874-1875	SERRÉ-GUINO.	BAYSSELLANCE.
1875-1876	BAYSSELLANCE.	LOQUIN.

ANNÉE	PRÉSIDENT	VICE-PRÉSIDENT
1876-1877	LOQUIN.	HAUTREUX.
1877-1878	HAUTREUX.	E. BOUTAN.
1878-1879	E. BOUTAN.	MICÉ.
1879-1880	DUPUY.	MILLARDET.
1880-1881	MILLARDET.	DE LAGRANDVAL.
1881-1882	DE LAGRANDVAL.	G. RAYET.
1882-1883	G. RAYET.	FOURNET.
1883-1884	G. RAYET.	FOURNET.
1884-1885	G. RAYET.	FOURNET.
1885-1886	G. RAYET.	BOUCHARD.
1886-1887	G. RAYET.	BOUCHARD.
1887-1888	G. RAYET.	AZAM.
1888-1889	G. RAYET.	TANNERY.
1889-1890	TANNERY.	GAYON.
1890-1891	AZAM.	GAYON.
1891-1892	DUPUY.	GAYON.
1892-1893	DROGUET.	BLAREZ.
1893-1894	BAYSSELLANCE.	BLAREZ.

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

au 1er Novembre 1894.

Composition du Bureau pour l'année 1894-1895.

MM. FOURNET, ✿ A., *Président honoraire.*
BLAREZ, *Président.*
HAUTREUX, ✻, *Vice-Président.*
RAYET, ✻, *Secrétaire général.*
CROIZIER, ✻, } *Secrétaires adjoints*
TURPAIN, }
BRUNEL, *Archiviste.*
CHAVANNAZ, *Trésorier.*
GAYON, ✻,
MILLARDET, ✻,
DE LAGRANDVAL, ✻,
PÉREZ, ✻,
BAYSSELLANCE, O. ✻,
BOUCHARD, O. ✻,
MORISOT,
JOLYET,
LESPIAULT, ✻,
ELLIE,
DUPUY,
DROGUET, ✻,
} *Membres du Conseil.*

Membres titulaires (1).

MM. AIGNAN, inspecteur d'Académie.
*ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.
AUGIS, ✻, ingénieur de la Compagnie du Midi.
AVRIL, ingénieur de la Compagnie du Gaz.
AZAM, ✻, professeur à la Faculté de Médecine.
BARCKHAUSEN, ✻, professeur à la Faculté de Droit.
BARTHE, professeur à la Faculté de Médecine.
BAYSSELLANCE, O. ✻, ingénieur des Constructions navales en retraite, ancien maire de Bordeaux.
BERGONIÉ, professeur à la Faculté de Médecine.
BICHON, licencié ès sciences.
BLAREZ, professeur à la Faculté de Médecine.
BORDIER, préparateur de physique à la Faculté de médecine.
BOUCHARD, O. ✻, professeur à la Faculté de Médecine.
BOULOUCH, professeur au Lycée.
BOUTINEAU, pharmacien-major de 2e classe.

(1) Les membres dont le nom est précédé d'un astérisque sont membres à vie.

MM. BROCHON (E.-H.), avocat à la Cour d'Appel.
BRUNEL, professeur de calcul infinitésimal à la Faculté des Sciences.
CAGNIEUL, ancien préparateur à la Faculté des Sciences.
CARLES, agrégé à la Faculté de Médecine.
CARMIGNAC-DESCOMBES, ingénieur des Manufactures de l'État à Morlaix.
CARON, professeur de Mathématiques au Lycée en retraite.
CAUBET, chef de travaux à la Faculté des Sciences.
CHADU, professeur de Mathématiques au Lycée.
CHAVANNAZ, licencié ès sciences, docteur en médecine.
CHENEVIER, chimiste au Chemin de fer du Midi.
CHEVALLIER, préparateur à la Faculté des Sciences.
CHEVASTELON, chef de travaux à la Faculté des Sciences.
COLOT, licencié ès sciences, professeur de Mathématiques.
CROIZIER, ✱, capitaine en retraite.
DELMAS, ✱, docteur en médecine, direct. de l'hydrothérapie des Hôpitaux.
DELMAS, ancien élève de l'École polytechnique.
DENIGÈS, professeur à la Faculté de Médecine.
DEVAUX, professeur à la Faculté des Sciences.
DOUBLET, aide-astronome à l'Observatoire.
DROGUET, ✱, directeur des postes et télégraphes, en retraite
DUBOURG, chimiste à la Douane.
DUHEM, professeur à la Faculté des Sciences.
DUPUY, professeur de Mathématiques au Lycée, en retraite.
DURÈGNE, sous-ingénieur au Télégraphe.
ELGOYHEN, élève à la Faculté des Sciences.
ELLIE, ingénieur civil.
FALLOT, professeur de géologie à la Faculté des Sciences.
FIGARET, ✱, officier supérieur du Génie en retraite.
FIGUIER, ✱, professeur à la Faculté de Médecine.
FOUGEROUX, percepteur des Contributions directes.
*FOURNET, 🙰 A., ancien fabricant de produits chimiques.
GADEN, négociant.
GAULNE (DE), propriétaire.
*GAYON, ✱, professeur de Chimie à la Faculté des Sciences, chimiste en chef à la Douane.
GENDRON, électricien.
GOGUEL, chargé de conférences à la Faculté des Sciences.
GOSSART, professeur à la Faculté des Sciences.
GUESTIER (Daniel), négociant.
HADAMARD, professeur de mécanique à la Faculté des Sciences.
HAUSSER, ✱, ingénieur en chef des Chemins de fer du Midi.
HAUTREUX, ✱, lieutenant de vaisseau, directeur des mouvements du port en retraite.
HUGOT, préparateur à la Faculté des Sciences.
ISSALY (l'abbé), licencié ès sciences mathématiques.
JOANNIS, professeur à la Faculté des Sciences.
JOLYET, professeur à la Faculté de Médecine.

MM. JOUET, propriétaire.
KOWALSKI, professeur de Mathématiques.
KÜNSTLER, professeur à la Faculté des Sciences.
LABAT, ✻, ingénieur des constructions maritimes, député de la Gironde.
LABORDE, préparateur de la Station agronomique.
LACROIX, professeur de Mathématiques au Lycée.
LAGACHE, ingénieur des Arts et Manufactures.
LAGRANDVAL (DE), ✻, professeur honoraire de Mathématiques spéciales au Lycée.
LAMEY, chimiste.
LANDE, ✻, agrégé à la Faculté de Médecine, médecin adjoint des hôpitaux.
LASSERRE, licencié ès sciences.
LAVERGNE (comte DE), ✻, propriétaire.
*LESPIAULT, ✻, doyen honoraire de la Faculté des Sciences.
MESTRE, pharmacien-chimiste.
MICÉ, ✻, recteur de l'Académie de Clermont.
MILLARDET, ✻, correspondant de l'Institut, professeur de Botanique à la Faculté des Sciences.
MORISOT, professeur à la Faculté des Sciences.
PÉREZ, ✻, professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences.
PETIT, docteur ès Sciences naturelles, chef des travaux de botanique à la Faculté des Sciences.
PICART, aide-astronome à l'Observatoire, chargé de cours à la Faculté des Sciences.
PIÉCHAUD, agrégé à la Faculté de Médecine.
PIONCHON, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.
PRAT, chimiste.
RAGAIN, licencié ès sciences, professeur de dessin graphique au Lycée.
RAYET (G.), ✻, correspondant de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, directeur de l'Observatoire de Bordeaux.
ROCH, chimiste.
RODBERG, ingénieur-directeur de la Compagnie du Gaz.
RODIER, agrégé de l'Université, directeur du Jardin botanique.
ROZIER, professeur de Mathématiques.
SANSON, profeseur de Mathématiques au Lycée.
SARRAZIN, inspecteur d'usines du chemin de fer.
*TANNERY (P.), ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
TURPAIN, préparateur à la Faculté des Sciences.
VALLANDÉ (DE), étudiant à la Faculté des Sciences.
VERGELY, ✻, professeur à la Faculté de Médecine.
VÈZES, professeur à la Faculté des Sciences.

Membres honoraires.

MM. DARBOUX (G.), ✻, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences de Paris.
DE TILLY, major d'Artillerie, directeur de l'arsenal d'Anvers.

MM. FORTI (Angelo), ancien profess. de Mathématiques au Lycée Royal de Pise.
FRENET, ✻, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon, à Périgueux.
KOWALSKI, directeur de l'Observatoire de l'Université impériale de Kazan (Russie).
LINDER, O. ✻, inspecteur général des Mines, à Paris.
RUBINI (R.), professeur à l'Université Royale de Naples.

Membres correspondants.

MM. ANDREEFF, professeur à l'Université de Kharkof.
ARDISSONE, professeur de Botanique à l'École Royale d'Agriculture de Milan.
ARIÈS, capitaine du Génie.
BJERKNES, professeur à l'Université de Christiania.
CURTZE (Max.), professeur au Gymnase de Thorn.
DILLNER (G.), professeur à l'Université d'Upsal.
ÉLIE, professeur au collège d'Abbeville.
ERNST (A.), professeur d'Histoire naturelle à l'Université de Caracas.
GARBIGLIETTI, docteur en médecine, à Turin.
GAUTHIER-VILLARS, O. ✻, ancien élève de l'École Polytechnique, libraire éditeur, à Paris.
GOMES TEIXEIRA (F.), professeur à l'Université de Coimbre.
GRAINDORGE, professeur à l'École des Mines, à Liège.
GÜNTHER (Dr. Sig.) professeur au Gymnase d'Ansbach.
HAILLECOURT, inspecteur d'Académie en retraite, à Périgueux.
HAYDEN, géologue du Gouvernement des États-Unis.
IMCHENETSKY, membre de l'Académie Impériale de Saint-Pétersbourg.
LAISANT, ✻, ancien officier du Génie, député de la Loire-Inférieure.
MUELLER (baron Ferd. von), membre de la Société Royale de Londres, directeur du Jardin Botanique de Melbourne (Australie).
PEAUCELLIER, O. ✻, général du génie.
PICART, professeur de Botanique en retraite, à Marmande (Lot-et-Garonne).
PONSOT (Mme), propriétaire aux Annereaux, près Libourne.
ROIG Y TORRES (D. Rafael), naturaliste à Barcelone, directeur de la *Crónica Científica*.
ROUX, ✻, docteur en Médecine, à Paris.
TRÉVISAN DE SAINT-LÉON (comte DE), à Milan.
WEYR (Éd.), professeur à l'Université de Prague.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ

ANNÉE 1893-94.

Présidence de M. BAYSSELLANCE.

Séance du 30 novembre 1893. — La Société procède au renouvellement de son Bureau pour l'année 1893-94. Sont élus :

Président........................	M. BAYSSELLANCE.
Vice-Président..................	M. BLAREZ.
Secrétaire général...............	M. RAYET.
Secrétaires adjoints.............	MM. CROIZIER ET PIONCHON.
Archiviste.......................	M. BRUNEL.
Trésorier........................	M. CHAVANNAZ.

Membres du Conseil d'administration :

1re SÉRIE	2e SÉRIE	3e SÉRIE
MM. BOUCHARD.	MM. LESPIAULT.	MM. MILLARDET.
MORISOT.	HAUTREUX.	DE LAGRANDVAL.
JOLYET.	GAYON.	PÉREZ.
MERGET.	DROGUET.	DUPUY.

— M. DUBOURG fait une communication sur le diabète et les diastases.

Le point de départ de mes recherches fut l'observation, confirmée depuis par Lépine, que l'urine des diabétiques contient de faibles quantités d'amylase; et une seconde observation, démontrant que l'amylase de l'urine provient des viscères abdominaux. En rapprochant ces faits des cas de diabète améliorés par la suppression des féculents, des diabétiques nombreux de la classe aisée, j'ai imaginé de faire absorber à ces malades des diastases pour remplacer celles qui manquent. Pour cela, je fais une liqueur avec la culture d'aspergillus niger sur amidon, et j'ai obtenu *souvent* des résultats intéressants. Le sucre diminue dans des proportions notables, et il y a en même temps amélioration générale de l'état du malade.

En cessant le traitement pour le reprendre ensuite, j'ai vu la quantité de sucre s'accroître de nouveau, puis disparaître ensuite, indiquant ainsi l'influence de l'absorption des diastases.

— M. Blarez rappelle la communication qu'il a faite, il y a un an, au sujet des vins mannités rencontrés dans les environs de Bordeaux; il ajoute qu'à la suite de cette découverte, les investigations faites ultérieurement par d'autres chimistes ou par lui-même ont révélé que le cas n'était pas isolé, mais que des vins mannités s'étaient produits, non seulement sur divers points du département, mais encore un peu partout en France, dans la région Sud plus particulièrement.

Il vient parler aujourd'hui des vins de 1893 en général, et notamment de ceux qui ont été produits dans la même propriété d'où provenaient ceux de 1892, qui avaient motivé sa communication de l'an passé.

La récolte de 1893 a été dans le domaine dont il s'agit très abondante, comme partout, au reste, dans le département. Les raisins étaient très mûrs et très sains (cabernets); la cueillette a commencé vers le 25 août; il y a eu une vingtaine de cuvées faites successivement et sans interruption, soit dans des *cuves neuves*, soit dans des *cuves anciennes*, mais qui, comme tout l'outillage vinicole, avaient été aussi stérilisées que possible par des lavages à l'acide sulfurique, passage à la chaux, etc. Les fermentations ont marché avec beaucoup de rapidité, et la température s'est élevée considérablement. Quelques cuves ont été écoulées huit jours après en donnant un vin fini et brillant; d'autres, écoulées après un temps plus long, ont produit un vin doucereux et très acide; d'autres enfin, des vins très troubles, envahis par des bactéries, et possédant des odeurs spéciales et variées, désagréables et tenaces. Dans une partie des cuves (les 9 dernières), on a ajouté du sucre cristallisé, de façon à relever le titre alcoolique du vin de un degré.

Chaque cuvée a été analysée isolément. Les vins provenant de la 5e et 6e étaient absolument normaux. Tous les autres, aussi bien ceux faits avec du sucre que sans sucre ajouté, ou bien encore dans des cuves anciennes ou neuves, sont anormaux. Ils ont tous une acidité exagérée; ils renferment une quantité variable de sucre non fermenté et un excès notable d'extrait sec (sucre déduit) motivé principalement par la présence de la mannite. En effet, on a pu observer les faits suivants :

1° Exagération de l'acidité totale, oscillant entre 5gr70 et 9gr60

par litre; dans les vins troubles, il a été possible d'extraire une très notable quantité d'*acide lactique;*

2° Présence de la *mannite:* les quantités trouvées oscillent entre 2 grammes et 25 grammes par litre;

3° Excès de glycérine dans certains vins, dans ceux qui étaient troubles et pourvus d'une odeur désagréable.

M. Blarez fait remarquer que la présence d'un excès de glycérine dans un vin mannité gêne considérablement la cristallisation de cette substance.

4° Enfin, il a été possible d'enlever de ces derniers vins, par la méthode de Stass, une substance combinable aux acides et précipitant par l'iodure de potassium iodurè et par le réactif Touret.

M. Blarez attribue tous ces accidents à la trop grande élévation de température pendant la cuvaison, ce qui a tué ou paralysé le ferment alcoolique et favorisé le développement des autres germes qui ont produit, les uns de la mannite, les autres de l'acide lactique, et une foule de produits secondaires étrangers au vin normal et que l'on pourra séparer et isoler.

Ces accidents de vinification, fréquents dans les pays chauds, principalement depuis l'époque où l'on a abandonné la pratique du plâtrage, sont exceptionnels dans notre région; mais si des étés comme ceux que nous venons de traverser venaient à se reproduire, il faudrait changer un peu les habitudes et s'outiller pour pouvoir refroidir les cuves, le cas échéant; il faudrait aussi ne point dérafler complètement et aérer les moûts, le tout dans le but de favoriser le bon fonctionnement de la levure alcoolique.

Cette année, les vins mal réussis sont très nombreux pour ces mêmes raisons. Toutefois, il ne faut pas croire que toute la récolte soit compromise, car il y a, au contraire, d'énormes quantités de vins excellents.

— MM. Carles, Gayon et Chevastelon signalent une série de faits tendant à confirmer les observations de M. Blarez.

M. Gayon fait observer qu'il serait très utile aux viticulteurs de connaître l'emploi du microscope, qui leur permettrait de surveiller d'une façon pratique la marche de la vinification.

— M. G. Rayet présente à la Société un mémoire sur les incendies des landes de la Gironde et sur la sécheresse exceptionnelle du printemps et de l'été de 1893.

La sécheresse si remarquable du printemps et de l'été de 1893, sécheresse qui a eu sa répercussion dans presque tous les phéno-

mènes de la végétation, a favorisé d'une manière singulière la naissance et la propagation des incendies dans les bois de pins de la Gironde.

Pendant toute la belle saison, nous avons, presque chaque soir, vu, de l'Observatoire de Bordeaux (Floirac), l'horizon ouest s'éclairer des lueurs d'un incendie. En fait, du 1er mars au 1er septembre, en 184 jours, il y a eu dans les landes de la Gironde 132 incendies de bois, qui ont brûlé 35,589 hectares de forêts et entraîné des pertes s'élevant à plus de 6 millions de francs.

Des désastres analogues s'étaient déjà produits en 1870, année pendant laquelle le printemps et l'été ont également été secs. Il est vraisemblable que les incendies dans les pins sont fréquents et importants toutes les fois que le sol et les sous-bois sont particulièrement secs.

Quoi qu'il en soit, en présence de l'impression produite sur les populations par les incendies de 1893, nous avons voulu, M. Clavel et moi, fixer d'une manière exacte l'étendue des désastres actuels et rechercher les circonstances météorologiques qui les ont accompagnés. Telle est l'origine du travail que je présente à la Société.

M. l'ingénieur des ponts et chaussées Clavel, qui est en même temps agent voyer en chef de la Gironde, a fait relever par ses agents le périmètre des surfaces atteintes par le feu. Ce travail, qui présente toute garantie d'exactitude, a permis de former un tableau et puis de dresser une carte sur laquelle chaque incendie se trouve marqué avec sa date.

Quant à moi, j'ai cherché à établir, par une discussion complète des observations pluviométriques faites à Bordeaux au siècle dernier et pendant les années plus voisines, le degré de sécheresse de l'année actuelle.

Les séries d'observations udométriques que j'ai pu réunir et consulter sont celles : des frères de Sarrau, de 1714 à 1770; du Dr de Lamothe, de 1776 à 1790; de MM. Abria et Petit-Lafitte, de 1843 à 1880, et enfin de l'Observatoire, de 1881 à 1893. Soit, en tout, 122 ans d'observations.

Ces séries d'observations ont, sans aucun doute, des précisions assez inégales. Cependant leur étude montre qu'elles ont été faites avec soin, et les erreurs qu'elles peuvent comporter ne sauraient infirmer les résultats très nets qu'elles mettent en évidence. J'en ai d'abord déduit, et je reproduis ici, le tableau des printemps et

des étés les plus secs, ainsi que celui des deux saisons les plus sèches :

PRINTEMPS SECS.		ÉTÉS SECS.		ENSEMBLE DES 2 SAISONS SÈCHES.	
Année.	Quantité de pluie.	Année.	Quantité de pluie.	Année.	Quantité de pluie.
	mm		mm		mm
1768	25,5	1722	54,5	1716	93,7
1716	27,9	1790	60,8	1893	153,8
1893	55,6	1716	65,8	1870	165,9
1760	60,6	1741	76,8	1767	169,3
1719	61,1	1770	76,8	1741	175,9
1779	64,6	1744	78,2	1755	194,4
1755	68,8	1780	82,1	1760	213,4
1870	77,6	1729	85,2	1778	213,6
1844	78,0	1869	85,5	1780	217,0
1767	81,3	1767	88,0	1783	219,2
1761	84,7	1870	88,3	1770	228,3
1764	87,2	1766	93,9	1766	232,7
1754	90,7	1893	98,2	1726	232,9
1778	90,7	1746	98,9	1761	235,2
1743	93,1	1738	99,5	1744	240,5

On voit que, en 122 années d'observations, on ne trouve que 2 printemps plus secs que celui de 1893. La sécheresse exceptionnelle des mois de mars, avril et mai 1893 s'accuse d'une façon encore plus remarquable si on tient compte que, dans cette période, il y a eu 76 jours qui n'ont donné que 10^{mm} d'eau. C'est un fait sans précédent pour le climat océanien de Bordeaux.

Le tableau montre, en outre, que, sur ces 122 printemps, on n'en a que 9 aussi secs que ceux de 1844 et 1870, qui sont réputés comme exceptionnellement secs et pour lesquels la quantité de pluie tombée est inférieure à la moitié de la normale.

En ce qui concerne la sécheresse de l'été, l'année 1893 n'arrive qu'au treizième rang, avec une quantité d'eau un peu supérieure à la moitié de la normale.

Pour l'ensemble des deux saisons (mars-août), les années dans lesquelles la quantité d'eau rassemblée dans le pluviomètre est inférieure à la moitié de la quantité moyenne sont en nombre très restreint. Dans toute la période considérée, il n'y en a que 4, et dans la liste précédente 1893 occupe le second rang.

Une période de 6 mois aussi dépourvue de pluie que celle que nous venons de subir, est donc absolument exceptionnelle dans le climat de Bordeaux ; il y a rarement coïncidence entre un printemps très sec et un été très sec. Parmi les années pour lesquelles

nous avons des documents, il n'y a que 1716, 1741, 1767, 1870, et 1893 où ce rapprochement se soit produit. Sur 122 ans, le phénomène ne s'est produit que 5 fois. Le plus souvent, les deux saisons ont un caractère différent, et la moyenne pluviométrique des 6 mois a une tendance marquée à se rétablir.

Dans la période de mars à août 1893, il aurait dû tomber à l'Observatoire 347^{mm},4 de pluie; le pluviomètre n'en a recueilli que 153^{mm},8. Le sol a donc manqué d'une couche d'eau de 193^{mm},6 d'épaisseur.

Le printemps et l'été de 1893 présentent également un caractère très exceptionnel par l'excès de leur température sur la moyenne normale. Ceci résulte du tableau suivant :

MOIS.	TEMPÉRATURE MOYENNE 1880-1892.	TEMPÉRATURE en 1893.	EXCÈS DE 1893 sur la moyenne.
1893 Mars....	9°,0	11°,7	+ 2°,7
Avril....	11,4	16,5	+ 5,1
Mai.....	15,1	17,7	+ 2,6
Juin....	18,4	20,5	+ 2,1
Juillet ..	20,4	20,9	+ 0,5
Août....	20,5	23,5	+ 3,0

L'étude des registres météorologiques de l'Observatoire de Bordeaux et l'examen des cartes journalières du Bureau central météorologique prouvent que cet excès de chaleur a coïncidé avec une prédominance anormale des vents de la région Est.

Les conditions météorologiques que je viens de signaler ont amené, dès les premiers jours de mars, un dessèchement rapide et profond du sol et des sous-bois dans les forêts des Landes. Les circonstances se sont donc trouvées particulièrement favorables au commencement des incendies (imprudence ou malveillance), et ceux-ci ont pu ensuite se développer avec une rapidité singulière, de manière à défier par leur intensité même les efforts des travailleurs qui cherchaient à les arrêter dans leur marche.

Peut-être y a-t-il aussi lieu de remarquer que les vents d'Est, qui ont été prédominants pendant la période considérée, soufflent d'une manière continue sans variation bien sensible de leur force ou de leur direction. Avec les vents de cette région, les accalmies ou les sautes de vent ne sont pas fréquentes, et la population n'a que rarement trouvé dans le changement de direction de la brise un secours efficace pour l'emploi des contre-feux. C'est d'ailleurs un préjugé landais que les incendies viennent toujours de l'Est.

Séance du 14 décembre 1893. — MM. HADAMARD, BICHON et LASSERRE sont élus membres titulaires de la Société.

— M. AIGNAN communique à la Société un travail qu'il a fait avec M. CHABOT sur la mesure de la vitesse du son dans l'air à l'aide des tuyaux à anche.

Parmi les recherches nombreuses qui ont été effectuées afin de déterminer la vitesse du son dans l'air, on a peu utilisé l'examen des vibrations communiquées par une anche à la colonne d'air du porte-vent ou à la colonne d'air du tuyau résonnateur. Weber [1] a bien noté l'influence du porte-vent sur le son de l'anche; Savart [2] a étendu et complété les remarques de Weber; M. Neyreneuf [3] a fait servir les propriétés du porte-vent établies par Savart à la détermination de la vitesse du son dans la vapeur d'eau et les vapeurs des liquides volatils, mais on n'a pas expérimenté systématiquement sur les tuyaux à anche pour la détermination de la vitesse du son dans l'air, comme on l'a fait sur les tuyaux d'orgue à embouchure de flûte.

Le travail dont nous présentons aujourd'hui la première partie a été entrepris pour combler cette lacune.

Nous admettons que l'impulsion communiquée par l'anche vibrante à la tranche d'air qu'elle touche se réfléchit avec changement de signe sur le fond inébranlable du porte-vent et se réfléchit sans changement de signe à l'extrémité libre du tuyau résonnateur.

Dans ces conditions, la vitesse résultant de la vibration à une distance x de l'extrémité du tuyau opposée à l'anche, sera

dans le porte-vent $$V_1 = 2\alpha \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}\right),$$

dans le tuyau résonnateur $$V_2 = 2\alpha \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}\right),$$

et pour $x = L$ (longueur du tuyau), c'est-à-dire sur l'anche, la vitesse de vibration sera

du côté du porte-vent $$V'_1 = 2\alpha \sin 2\pi \frac{L}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}\right),$$

du côté du tuyau résonnateur $$V'_2 = 2\alpha \cos 2\pi \frac{L}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}\right).$$

Les vitesses de vibration, que l'anche communique à la tranche d'air qu'elle touche, seront maxima lorsque le porte-vent aura une

(1) DAGUIN, *Traité de physique*, t. I.
(2) *Journal de l'Institut*, t. VIII, p. 186.
(3) *Journal de physique* (2e série), t. IV, 1885.

longueur égale à $(2n+1)\frac{\lambda}{4}$ et le tuyau résonnateur une longueur égale à $n\frac{\lambda}{2}$. Au contraire, pour des longueurs du porte-vent égales à $n\frac{\lambda}{2}$ et du tuyau résonnateur égales à $(2n+1)\frac{\lambda}{4}$, la vitesse de la tranche d'air au contact de l'anche sera nulle, ce qui ne peut avoir lieu que si l'anche ne vibre pas. Dans ce cas, le tuyau à anche ne rendra aucun son.

D'après ces conditions théoriques, que nous avons vérifiées par de nombreuses expériences, l'anche se trouve sur un *ventre de vibration;* tandis que, dans la théorie des tuyaux à anche, publiée par Helmoltz, l'anche serait sur un *nœud de vibration,* ou du moins « c'est lorsque l'anche serait sur un nœud de la colonne d'air vibrante que se produirait la résonance maximum » (1).

Pour des longueurs intermédiaires du tuyau ou du porte-vent, V diminue et tout se passe comme si l'anche se déplaçait dans un milieu résistant. Si le son de l'anche peut être altéré, — cela n'a lieu qu'avec les anches faibles, — le son rendu par le tuyau variera. Si, comme nous l'avons fait, on emploie des anches un peu raides, le son sortira avec plus ou moins de difficulté et d'intensité, la hauteur variera peu, mais lorsque l'écart sera trop grand entre les valeurs de V et celles que l'anche vibrante tend à communiquer à la tranche d'air qu'elle touche, le son cessera de se faire entendre.

Nous avons vérifié expérimentalement toutes ces conséquences et nous en avons déduit plusieurs procédés pour déterminer la vitesse des sons musicaux dans l'air.

1° Une anche ut_3 de 261 vibrations doubles a été fixée à l'extrémité d'un tuyau porte-vent en verre de 3 centimètres de diamètre et de 1 mètre environ de longueur; le fond du tuyau était mobile et l'on a déterminé les deux positions du fond, qui accordaient exactement le son rendu avec un tuyau fixe ut_3 placé sur la soufflerie. On a obtenu à 14°

$$\frac{\lambda}{2} = 0^m65 \text{ d'où } V_0 = 331^m.$$

Remarque importante. — La hauteur du son varie très peu avec la longueur du porte-vent.

2° Une anche ut_4 de 522 vibrations doubles a été munie d'un tube de résonance à tirage, en verre, ayant 17 millimètres de diamè-

(1) Helmoltz, *Journal de Crelle,* t. LVII.

tre. Le son de l'anche ne se faisait entendre que pour certaines longueurs de tube, de même que, dans l'expérience précédente, on ne pouvait l'obtenir que pour certaines longueurs du porte-vent.

On a déterminé ainsi la longueur de deux concamérations consécutives, qui ont fourni à la température de 9°

$$\lambda = 642^{mm}, \text{ d'où } V_0 = 329^m 8.$$

3° Le matériel dont nous disposions ne nous a permis d'employer tout d'abord que la méthode suivante pour la détermination de $\frac{\lambda}{2}$. L'anche était fixée à l'extrémité supérieure d'un tuyau cylindrique vertical, recevant l'air latéralement et vers le haut. On faisait varier la longueur du tuyau en faisant monter ou descendre de l'eau à l'intérieur. On déterminait les valeurs extrêmes entre lesquelles la longueur du porte-vent pouvait être comprise pour que l'anche résonnât, et l'on prenait la moyenne de ces deux longueurs comme longueur optimum. En faisant varier progressivement la longueur du porte-vent on déterminait de la même manière plusieurs longueurs produisant la meilleure résonance; la différence de deux de ces longueurs consécutives était égale à $\frac{\lambda}{2}$.

A l'aide de certaines précautions, on fixe avec une précision voisine du millimètre les niveaux qui séparent les longueurs du porte-vent permettant la résonance, de celles qui s'opposent à l'émission du son.

Les résultats obtenus par ce troisième procédé de mesure sont résumés dans le tableau suivant. Il est bon de remarquer que le porte-vent était rempli d'eau avant de commencer l'expérience, de telle sorte qu'il était légitime d'admettre, dans la suite, l'air saturé d'humidité. La vitesse V est relative à l'air humide à la température de l'expérience; dans la colonne V_0 on a marqué la vitesse ramenée à l'air sec et à 0°.

Son de l'anche.	Diamètre du tuyau.	Température.	$\frac{\lambda}{2}$	V	V_0
vib.	mm	o	mm	m	m
ut_1 65,25	40	+ 11,3	2610	340,605	332,8
ut_2 130,5	17	15,5	1317	343,737	332,66
ut_3 261	17	17	657,5	343,215	331,9
ut_4 522	17	19	328,4	342,85	329,25
ut_5 1044	30	7	159	332	327,54

Les nombres qui précèdent ne doivent être considérés que comme une première approximation; ils montrent que l'étude expérimentale des tuyaux à anche permet d'évaluer la vitesse du son peut-être avec plus de facilité que les tuyaux à embouchure de flûte. — Ces recherches seront poursuivies.

— M. Chenevier signale à la Société quelques nouvelles réactions des huiles blondes de résine.

1° Les huiles blondes de résine modifiées, comme je l'ai indiqué précédemment, sous l'influence de l'air, abandonnent lorsqu'on les traite par trois ou quatre fois leur volume d'essence de pétrole des produits insolubles dans ce véhicule, alors que l'huile avant l'action de l'air y est entièrement et facilement soluble. Les produits ainsi séparés sont amorphes et sans réaction acide.

2° Sous l'influence de l'acide azotique, même étendu à 25° Baumé, l'huile blonde de résine s'épaissit, rapidement à chaud, plus lentement à froid, comme sous l'influence de l'air. L'huile ainsi traitée fournit aussi des produits amorphes insolubles dans l'essence de pétrole. Ces produits contiennent de l'azote et se décomposent par la chaleur en donnant des vapeurs alcalines.

Séance du 28 décembre 1893. — Le Président fait part à la Société de la mort de M. le professeur Merget, dont il rappelle en quelques mots les travaux les plus importants, et il exprime la douleur qu'éprouve la Société de la perte de ce membre éminent.

Ensuite il annonce que l'Académie a accordé à notre collègue M. Millardet, le prix Morogues, pour la découverte du traitement du mildew. La Société vote des félicitations à M. Millardet et à son collaborateur M. Gayon.

— M. Sanson est élu membre titulaire de la Société.

— M. Denigès expose une méthode nouvelle pour le dosage de l'acide cyanhydrique et les applications qui en découlent.

Les cyanures alcalins en solution ammoniacale réagissent comme en milieu neutre sur l'azotate d'argent en donnant un cyanure double d'argent et du métal alcalin. La fin de la réaction peut être très exactement indiquée par l'iodure de potassium qui fournit un trouble très net d'iodure d'argent insoluble dans l'ammoniaque dès que le réactif argentique est en excès.

On peut aussi doser l'acide cyanhydrique libre (solutions aqueuses, eau distillée de laurier-cerise) ou combiné aux métaux alcalins, ou encore, combiné au mercure. Dans ce dernier cas il est nécessaire de précipiter le mercure par le sulfure de sodium et

d'éliminer l'excès de ce sel par le sulfate de zinc; les résultats obtenus sont très satisfaisants. Mais il est en outre possible d'effectuer à l'aide de cette méthode un grand nombre de dosages par voie indirecte.

1° Tous les sels d'argent connus étant solubles ou dans l'ammoniaque ou dans le cyanure de potassium, ou pouvant être rendus solubles dans ces véhicules par l'intermédiaire de l'acide azotique, on pourra par l'action combinée de solutions titrées d'argent et de cyanure de potassium, d'ammoniaque et d'iodure de potassium doser par différence une solution argentique quelconque.

2° Les chlorures et les bromures solubles pourront également se doser soit directement, soit par reste, c'est-à-dire en les précipitant par un excès d'azotate d'argent et déterminant soit le chlorure d'argent précipité, soit l'excès d'argent non entré en réaction. Cette méthode a surtout fourni des résultats intéressants en l'appliquant aux liquides de l'organisme (sang, bile, urine).

3° L'iodure de potassium étant précipité en liqueur ammoniacale par l'azotate d'argent alors que les impuretés qui l'accompagnent (chlorures ou bromures) restent dissoutes, on pourra encore titrer ce sel important, soit par voie directe ou indirectement.

4° Les médicaments iodés (iodoforme, pyrrol, aristol, etc.) peuvent par l'action combinée de l'eau régale, puis du bisulfite de soude et de l'ammoniaque avoir leur iode transformé en iodure, qui est alors dosé comme l'iodure de potassium.

5° Les composés xantho-uriques de l'urine étant précipités par l'azotate d'argent ammoniacal, un dosage par reste permet de calculer la quantité d'argent précipitée par ces substances et d'en déduire les proportions.

6° Il est enfin possible d'appliquer cette méthode à toutes les substances, carbures acétyléniques, hydrogène arsénié, hydrogène antimonié, aldéhydes, oxyde de carbone, etc., susceptibles de modifier le titre des sels d'argent en solution alcoolique, ammoniacale ou azotique.

— M. Aignan entretient la Société des expériences qu'il a faites avec M. P. Chabot pour déterminer la position de l'anche d'un tuyau sonore par rapport aux ventres et aux nœuds de la colonne d'air vibrante.

Dans un important mémoire, publié au tome LVII du *Journal de Crelle*, Helmoltz donne la théorie mathématique des tuyaux à anche. Il résulte de ses calculs et des hypothèses contenues explicitement ou implicitement dans les équations qui lui ont servi de

point de départ que *l'anche se trouve sur un nœud de la colonne d'air mise en vibration, lorsque se produit le maximum de résonance.* Cela signifie évidemment que l'anche est sur un *nœud* de vibration lorsque le tuyau résonne avec le plus d'éclat et avec la plus grande facilité. Les savants qui, depuis Helmoltz, ont donné la théorie des tuyaux à anche, ont reproduit l'assertion de cet illustre physicien.

Il convient d'examiner jusqu'à quel point les déductions de la théorie concordent avec les faits.

1° *Cas des tuyaux à anche libre.* — Dans une série d'expériences effectuées avec des tuyaux à anche libre, nous avons constaté que l'anche se trouve sur un *ventre* ou, plus exactement, très près d'un ventre de vibration, soit que l'on examine la position des nœuds et des ventres dans le *porte-vent,* soit qu'on l'étudie dans un tuyau placé à la suite de l'anche et cylindrique comme le porte-vent. Au contraire, lorsque la longueur du porte-vent ou celle du tuyau est telle que l'anche se trouve sur un *nœud* ou dans le voisinage d'un nœud de la colonne d'air supposée vibrant à l'unisson de l'anche, le tuyau ne rend aucun son.

Ainsi pour les tuyaux à anche libre, il y a contradiction complète entre les faits et le théorème d'Helmoltz. Cela prouve que les impulsions données à la colonne d'air à l'intérieur de pareils tuyaux ne sont pas telles qu'on le suppose dans les équations fondamentales du mémoire précité.

2° *Cas des tuyaux à anche battante.* — Les ressources dont nous disposions ne nous ont pas permis d'exécuter, avec cette espèce de tuyaux, des expériences aussi nombreuses que dans le premier cas.

Une anche battante, en métal, ayant été fixée à l'extrémité d'un porte-vent cylindrique de longueur variable, nous avons constaté que l'anche ne rendait aucun son lorsqu'elle était située à une distance du fond du porte-vent égale à $k\frac{\lambda}{2}$. Au contraire, l'anche battante résonnait avec facilité quand le porte-vent avait une longueur égale à $(2\,k+1)\,\frac{\lambda}{4}$, c'est-à-dire quand elle se trouvait sur un *ventre* de vibration de la colonne d'air emprisonnée dans le porte-vent.

Nous avons ajusté un tube cylindrique sur cette anche munie d'un porte-vent. La colonne d'air mise en vibration dans le tube réagit fortement sur l'anche et peut, entre certaines limites, en

modifier le nombre des vibrations de manière à produire la résonance maximum. On constate alors que la longueur du tuyau est à peu près égale a quart de la longueur d'onde du son émis, ce qui prouve que l'anche est sur un *nœud* ou très près d'un nœud. Des expériences effectuées avec un bec de clarinette fixé sur des tuyaux cylindriques de diverses longueurs et actionné à l'aide de la bouche ont donné des résultats semblables à celui qu'a fourni l'anche de métal. Les expériences ont porté sur les sons correspondant à 235; 355; 385; 427 vibrations doubles par seconde. Ce cas particulier, à l'exclusion des autres, satisfait donc au théorème d'Helmoltz.

Conclusions. — S'il est permis de généraliser les indications de ces expériences trop peu nombreuses, nous dirons :

1° Dans le cas d'une anche libre, on obtient la résonance maximum lorsque l'anche est sur un ventre de vibration du tuyau porte-vent et du cornet d'harmonie.

2° Dans le cas d'une anche battante, le maximum de résonance a lieu lorsque l'anche est sur un ventre de vibration de la colonne d'air emprisonnée dans le porte-vent et sur un nœud de vibration de la colonne d'air, qui remplit le tuyau placé à la suite de l'anche.

— MM. Gayon et Dubourg montrent à la Société le ferment mannitique qu'ils étudient depuis quelque temps et qu'ils ont extrait d'un vin mannité. Ce ferment est constitué par de très petits bâtonnets immobiles, se groupant en amas, d'un aspect très différent du microbe de la « tourne ».

Ensemencé dans du moût de raisin ou dans une solution nutritive de sucre interverti, il transforme assez rapidement une partie du sucre réducteur en mannite, sans dégagement de gaz. Il se produit en même temps des acides volatils constitués à peu près exclusivement par de l'acide acétique, et des acides fixes formés en grande partie d'acide lactique.

En calculant la totalité des uns en acide acétique et la totalité des autres en acide lactique, on retrouve, à très peu près, avec la mannite, le poids du sucre disparu. En voici un exemple, dans lequel la fermentation a duré du 11 novembre au 1er décembre, soit pendant vingt jours.

	Par litre.		
Sucre disparu	46gr58	ou en centièmes	100
Mannite formée	35 20	—	75.6
Acide acétique	6 28	—	13.5
Acide lactique	5 11	—	11.0
Total	46gr50		100.1

Le glucose et le lévulose qui se trouvent en proportions égales dans le sucre interverti ne se transforment pas avec la même facilité en mannite; le lévulose disparaît beaucoup plus vite que le glucose, de sorte que les solutions, d'abord lévogyres, deviennent rapidement dextrogyres. Dans les expériences de MM. Gayon et Dubourg, le lévulose a fermenté quatre fois plus vite que le glucose.

Cependant, pris isolément, le glucose ne paraît pas pouvoir donner de mannite, tandis que, dans les mêmes conditions, le lévulose s'hydrogène facilement. L'étude du ferment sur les autres sucres est commencée et sera poursuivie.

Le ferment ne décompose pas le *cricus elaster*, ce qui le différencie profondément, au point de vue chimique, du ferment de la « tourne ». La fermentation mannitique des vins n'a donc rien de commun avec cette dernière maladie, comme quelques personnes l'avaient supposé.

Les résultats trouvés par MM. Gayon et Dubourg expliquent le goût acidulé des vins mannités et la présence de l'acide lactique constatée à la dernière séance par M. Blarez, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir l'action de microbes autres que le ferment mannitique.

— M. Brunel présente à la Société quelques remarques sur le problème de combinaisons suivant :

On a trois vases de 8, 5 et 3 litres. Le premier est plein de vin. Effectuer dans ces trois vases des transvasements en sorte qu'il y ait 4 litres dans le premier et 4 litres dans le second.

On représente à un instant quelconque l'état des trois vases par un symbole formé de trois chiffres, le premier, le second et le troisième chiffre du symbole indiquant respectivement combien de litres contiennent le premier, le second et le troisième vase.

Il est facile de former le tableau des différents symboles possibles, et ensuite des *liaisons* qui existent entre ces symboles. Deux symboles sont dits reliés lorsque l'on peut passer de l'état représenté par un des symboles à l'état représenté par le second. Ici se présente la notion de liaison ayant un sens déterminé. On peut passer d'un état à un autre sans qu'il soit possible de revenir de celui-ci à celui-là.

Le tableau des liaisons ayant été écrit, il suffit de développer par un procédé absolument semblable à celui employé dans le problème du saut du cavalier, ce tableau de liaisons pour déterminer tous les passages possibles de l'état 800 à l'état 440 et d'obtenir par conséquent toutes les solutions du problème en question.

Si l'on représente les différents états par des points distincts et les liaisons entre deux symboles par des lignes sur lesquelles on trace des flèches par exemple pour indiquer que le passage de l'état représenté par un point à un autre état est possible, on obtient un réseau dont les arêtes sont de deux espèces, les unes pouvant être parcourues dans un seul sens et les autres dans les deux sens. Le problème revient à aller du point 800 au point 440 par les arêtes du réseau et sur certaines arêtes en se déplaçant dans un sens déterminé.

La représentation graphique ainsi obtenue permet de montrer sous une forme frappante les solutions obtenues par la méthode indiquée plus haut et dont nous donnons ici le tableau :

800 503 530 233 251 701 710 413 440
800 350 323 620 602 503 530 233 251 701 710 413 440
800 350 323 503 530 233 251 701 710 413 440
800 350 323 620 602 152 143 503 530 233 251 701 710 413 440
800 350 053 503 530 233 251 701 710 413 440
800 350 323 053 503 530 233 251 701 710 413 440
800 350 323 620 602 152 053 503 530 233 251 701 710 413 440
800 350 323 620 602 152 143 053 503 530 233 251 701 710 413 440
800 350 323 620 602 152 143 440
800 503 530 233 251 701 710 350 323 620 602 152 143 440
800 503 530 350 323 620 602 152 143 440
800 503 530 233 251 350 323 620 602 152 143 440
800 503 053 350 323 620 602 152 143 440
800 503 530 233 251 701 710 413 053 350 323 620 602 152 143 440
800 503 530 233 251 053 350 323 620 602 152 143 440
800 503 530 233 053 350 323 620 602 152 143 440

Séance du 11 janvier 1894. — La Société, après avoir discuté sur les modifications à apporter au mode de publication de ses travaux, décide que :

1° La division des publications en *Mémoires* et en *Procès-Verbaux* est maintenue;

2° Les Mémoires seront publiés en fascicules comme précédemment;

3° Les Procès-Verbaux seront publiés par feuilles dès que la matière sera suffisante pour remplir une feuille et, au plus tard, tous les deux mois;

4° Les notes à insérer dans les Procès-Verbaux ne devront pas,

en principe, dépasser quatre pages; mais la Commission des publications reste juge en tous cas et peut en admettre de plus longues, comme aussi elle peut réduire les notes présentées;

5° Les caractères d'imprimerie actuellement employés pour les Procès-Verbaux étant reconnus trop petits seront modifiés;

6° La Commission des publications est chargée de veiller à l'exécution des précédentes résolutions.

Les modifications ainsi introduites dans la publication des Procès-Verbaux commenceront à être appliquées à partir du mois de novembre 1894. En même temps qu'une nouvelle année commencera alors une nouvelle série de Mémoires.

— M. Barthe communique à la Société une méthode nouvelle de dosage volumétrique de l'acide borique et des borates.

Les différentes méthodes de dosage volumétrique de l'acide borique et des borates [Finot (1), Parmentier (2), Smith (3)] réclament vraisemblablement une grande habitude du manuel opératoire; car, avec les indications employées par ces auteurs, je n'ai obtenu que des résultats incertains. En mettant à profit une récente observation de M. Thomson (4), et en se servant de l'alcoolé de rose trémière et de la phtaléine comme indicateurs, on peut arriver à des dosages rigoureux.

Il y a quelques années, M. Klein (5) annonçait que 1 centimètre cube d'une solution boriquée au 1/2000, ajoutée à 10 centimètres cubes d'une solution de mannite, donnait une liqueur qui colorait la teinture bleue de tournesol en rouge pelure d'oignon. Tout récemment, M. Thomson, qui avait déjà indiqué (6) l'oranger Poirrier III pour dosage des alcalis sous forme de borates, faisait connaître qu'en présence de la glycérine, les acides de l'arsenic, la silice, l'acide borique présentaient aux indicateurs une acidité plus considérable que dans l'eau pure : elle empêcherait la dissociation par l'eau des différents sels de ces acides. A la condition d'opérer dans un milieu renfermant 30 p. 100 de glycérine, l'acide borique peut être dosé par une solution alcaline titrée, tout comme les autres acides minéraux.

L'alcoolé de rose trémière se prépare le mieux avec 2 parties de rose pour 100 parties d'alcool à 50°; on laisse macérer vingt-quatre

(1) Communication à la Soc. Chim., 1888, t. L, p. 659.
(2) *Journ. de ph. et ch.*, 1891, t. XXIV, p. 221.
(3) Smith, *in Traité d'analyse chimique* de Mohr, 1888, p. 241.
(4) *Berichte chem. Ges.*, nov. 1893, p. 839.
(5) *Bull. Soc. Chim.*, t. XXIX, p. 481.
(6) *In* Mohr, *loc. cit.*, p. 84.

ou quarante-huit heures et l'on filtre : la teinture, dont la couleur normale est bleuâtre, vire au rose vif sous l'influence des acides et au vert en présence des alcalis; elle est excessivement sensible dans les solutions alcalines ou acides diluées. M. Falières (de Libourne) l'emploie depuis longtemps pour l'analyse de l'acidité des moûts de vins vieux.

Pour l'analyse d'un borate alcalin, à la condition d'opérer en présence d'un excès d'acide minéral N/10, à l'aide de la teinture de rose trémière et de la potasse N/10, on pourra doser l'alcali. Dans le même récipient, l'addition de glycérine permettra le dosage de l'acide borique au moyen de la phtaléine et de la potasse ou de la soude N/10.

Le dosage d'un biborate de soude fera bien comprendre l'exécution de la méthode et sa généralité.

1° *Dosage de la soude.* On mélange :

10 centimètres cubes de solution N/10 ou biborate de soude (19,1/1000);

20 centimètres cubes d'acide sulfurique N/10;

Quelques gouttes de teinture de rose trémière.

On ajoute de la soude N/10 jusqu'à virage au vert. Il a fallu en employer $9^{cc}8$.

L'acide sulfurique a donc pris au biborate de soude une quantité de soude, représentée par

$$(20 - 9,8) \times 0,031 = 0^{gr}03162.$$

La théorie indiquerait $0^{gr}031$.

A ce moment, tout l'acide borique des 10 centimètres cubes de solution N/10 de biborate de soude est libre; il n'a pas agi, comme nous le démontrons plus loin, sur la teinture de rose trémière pour en retarder le virage.

2° *Dosage de l'acide borique.* A 10 centimètres cubes de solution N/10 de biborate de soude, on a ajouté :

5 centimètres cubes de glycérine neutre;

$10^{cc}2$ d'acide sulfurique N/10, nécessaires d'après l'indication ci-dessus pour mettre en liberté tout l'acide borique, et quelques gouttes de phtaléine. On ajoute de la soude N/10 jusqu'à virage au rose. Il en a fallu $20^{cc}4$ pour former du borate neutre, par suite :

$$20,4 \times 0,0062 = 0,12648 \text{ d'acide borique.}$$

Théoriquement, on devrait obtenir 0,124. Le sel examiné est sans

doute légèrement effleuré, car il renferme un peu trop de soude et d'acide borique.

Tous les borates naturels ou artificiels peuvent être transformés en borates alcalins par fusion avec le carbonate de soude : le dosage des borates se réduit donc, d'une façon générale, au dosage du borate de soude.

On peut opérer plus rapidement en pratiquant dans le même vase le dosage de l'acide borique et de l'alcali. Après virage au vert de l'alcoolé de rose trémière, on ajoute la glycérine et la phtaléine, et on procède à une nouvelle addition de soude N/10 : à la saturation, le passage au rose est très manifeste. Pour un opérateur peu exercé, le virage perd peut-être un peu de sa netteté, et il vaut encore mieux faire deux opérations distinctes.

Pour prouver, dans le dosage de l'alcali, que l'acide borique, devenu libre, n'exerce aucune action sur l'alcoolé de rose trémière, j'ai fait l'expérience suivante :

On sait que les acides les plus faibles déplacent l'iode d'une solution contenant de l'iodate et de l'iodure de potassium. *Or, l'acide borique n'a aucune action sur semblable dissolution.* Au contraire, 10 centimètres cubes d'un acide minéral N/10, comme l'acide sulfurique, précipiteront 0,127 d'iode au 1/1000 d'équivalent. Par conséquent, 0,127 d'iode précipité correspondent à 0,049 d'acide sulfurique. De même, 1 centimètre cube d'hyposulfite de soude N/10 (24,8/1000), qui indique 0,0127 d'iode, indique également 0,0049 d'acide sulfurique ; en effet, d'après la réaction connue :

$$2\,(Na^2S^2O^3) \times 2I = 2NaI + S^4Na^2O^6.$$

On prend donc :

Solution N/10 du biborate de soude...	10	centimètres	cubes
Acide sulfurique N/10...............	20	—	—
Solution iodique [1].................	40	—	—

et l'on opère le mélange.

Au bout d'une heure, après agitation, on dose à l'hyposulfite l'iode précipité en présence de l'eau amidonnée jusqu'à disparition

[1] La solution suivante donne de bons résultats :

Iodate de potasse neutre.........	4	grammes
Iodure de potassium............	30	—
Eau.................Q. s. p.	1000	centimètres cubes.

de toute trace de bleu. Il a fallu employer $9^{cc}7$ d'hyposulfite, ce qui correspond à

$(20 - 9{,}7) \times 0{,}0031 = 0{,}03193$ de soude dans les 10 centimètres cubes de solution N/10 du biborate. La théorie indique 0,031, et avec la rose trémière on avait trouvé $0^{gr}03162$. Le dosage de la soude par la rose est donc bien exact.

Pansements boriqués. — Les différents pansements boriqués (cotons, gazes...) cèdent tout leur acide borique à l'eau glycérinée au 1/10.

Dans ces conditions, le titrage se fait très facilement à l'aide de la phtaléine ou de la rose trémière comme indicateurs. On obtient les meilleurs résultats en prenant 1 gramme environ du pansement que l'on fait macérer pendant une heure avec 90 grammes d'eau mélangée à 10 grammes de glycérine, et en se servant de soude N/10. Tous les dosages que nous avons effectués sur les différents pansements boriqués « dosés à 10 p. 100 d'acide borique » et provenant de différentes fabriques françaises, nous ont donné des chiffres variant de 3,7 à 4,3 p. 100.

— M. Blarez fait une communication à propos des fermentations mannitiques et lactiques et corollairement des vins mannités.

Il dit qu'en faisant fermenter des matières sucrées avec du lait corrompu en présence d'un excès de carbonate de zinc, il a obtenu du lactate de zinc en abondance et une solution renfermant également, en même temps que du lactate de zinc, d'autres sels de zinc, presque identiques au lactate mais différents toutefois par la solubilité qui était beaucoup plus grande, et en outre beaucoup de *mannite;* il en a dosé $34^{gr}10$ par litre. Il ajoute que quelques jours après le commencement de la fermentation lactique il avait ajouté dans la masse un fond de bouteille ayant contenu un vin mannité. Une expérience identique faite avec les mêmes matières sucrées, du lait corrompu et du carbonate de chaux, a donné du lactate de chaux et pas de mannite. Je cite ces expériences comme faits expérimentaux sans y attacher d'importance spéciale, si ce n'est que le ferment mannitique est compatible avec un milieu saturé de lactate de zinc.

M. Blarez dit avoir rencontré, depuis la dernière communication qu'il a faite à la Société, un très grand nombre de vins mannités, tant de la région girondine que de l'étranger, et non seulement de la récolte de 1893, mais encore de celles de 1892, 1891 et 1890. Les vins de ces dernières années lui ont été remis parce qu'ils vieillissaient sans acquérir les qualités ordinaires des crus dont

ils provenaient. Ces vins renfermaient de 0gr50 à 1 gramme de mannite par litre et beaucoup d'acides volatils et d'acides solubles dans l'éther ordinaire. C'est ce qui explique que l'éthérification dans ces vins n'a pu se faire comme d'habitude.

Dans un échantillon de 1893, ayant voulu isoler les acides solubles dans l'éther, il a obtenu un résidu qui au lieu de rester sirupeux s'est pris en masse de cristaux et a donné un sel de zinc plus soluble que le lactate ne cristallisant pas par suite d'évaporation, de la même façon que lui, et formant avec la chaux et le cuivre des sels cristallisés dont les aspects se rapprochent de ceux décrits pour l'acide glycolique. La vérification et l'identification de cet acide avec l'acide glycolique a été difficile, néanmoins on a pu observer que le sel de zinc était un mélange de lactate et de glycolate. Au reste, la production de l'acide glycolique dans les vins mannités ne présente aucune objection *a priori*, car on peut l'expliquer par l'hydratation du sucre de raisins.

$$\underbrace{4C^6H^{12}O^6}_{\text{Glucose.}} + 3H^2O = \underbrace{3C^2O^3H^4}_{\text{Acide glycolique.}} + \underbrace{3C^6H^{14}O^6}_{\text{Mannite.}}$$

M. Blarez termine sa communication en disant qu'il a eu l'occasion de rencontrer depuis plusieurs mois beaucoup de vins altérés à acidité relativement faible; ces vins souvent mannités possédaient un excès de matières minérales dû à de la magnésie. Il dit que ces vins, très nombreux actuellement, sont des produits de l'année 1892, piqués par suite des chaleurs de l'été dernier et qu'on a voulu désacidifier au moyen du carbonate de magnésie. Il attire l'attention des analystes sur ce point.

— M. Künstler rappelle que pour l'élevage des alevins de Salmonidées, on emploie deux procédés de nourriture essentiellement distincts : avec la proie morte (viande de boucherie), avec la proie vivante (mollusques, crustacés, asticots...).

Il a expérimenté ces deux modes d'alimentation, et il en présente les résultats à la Société. Une jeune truite de neuf mois, nourrie exclusivement avec de la proie morte ne pèse que 2 grammes, tandis qu'une autre truite de sept mois seulement, nourrie avec la proie vivante en pèse 160.

Ce résultat tranche une question intéressante pour la pisciculture.

Séance du 25 janvier 1894. — M. Boutineau est nommé membre titulaire de la Société.

— M. Hautreux présente, comme il l'a fait l'année dernière, un aperçu des faits météorologiques qui se sont produits sur l'Atlantique Nord, en 1893, d'après les indications des Pilot-Charts, au point de vue des glaces, des courants et des vents.

La période glaciaire de 1893 a duré six à sept mois et s'est prolongée jusqu'à la fin de septembre, l'année dernière elle n'avait duré que quatre mois.

Les épaves flottantes, au nombre d'une vingtaine, rencontrées plusieurs fois montrent que le grand circuit du Gulf-Stream était développé tout entier entre le cap Hatteras et les Açores. Cette année encore on ne voit pas une seule carcasse, partie des côtes d'Amérique, passer au Nord des Açores et continuer sa route vers l'Europe. Le vaste tourbillon océanique de la mer des Sargasses a pris cette année un développement considérable vers le Sud.

Les vitesses de déplacement des épaves ont été :

Gulf-Stream	pendant l'été....	63	milles par	24 heures.
	pendant l'hiver..	25	—	—
Contre-courant..............		5	—	—
Mer des Sargasses...........		7	—	—

Les coups de vent n'ont été violents qu'en février, mais il y a eu en août, octobre et novembre, sept cyclones tropicaux dont deux ont ravagé les côtes de Georgie et la vallée du Mississipi. De hautes pressions ont séjourné sur l'Atlantique au printemps et à l'automne.

Dans cette année le climat de la Gironde a présenté les particularités suivantes :

L'hiver de 1892-93 a été court, il n'a compté que vingt-sept jours de gelée à Bordeaux.

L'hiver de 1893-94 a été précoce, il a commencé le 2 novembre un mois plus tôt que l'hiver précédent.

La sécheresse a été extraordinaire du mois de mars au mois d'août, mais les mois de février, de septembre et d'octobre ayant été très pluvieux, le total pluviométrique, 686 millimètres, est de peu inférieur à la pluviosité moyenne.

Le printemps et l'été ont été très chauds, et la chute thermale très rapide en novembre.

On peut signaler les coïncidences suivantes entre cet état de choses et celui de l'Atlantique :

L'hiver 1893-94 a été précoce; la période glaciaire, sans être

très abondante, s'était prolongée fort tard jusqu'à l'automne, et en novembre il y avait encore des icebergs sur le Grand Banc.

La longue sécheresse a coïncidé avec la longue période glaciaire et avec les hautes pressions qui ont existé au Nord des Açores.

Enfin les pluies de septembre et d'octobre peuvent être la conséquence des ébranlements atmosphériques produits par les cyclones de fin d'août et d'octobre.

Nous avons fait ressortir des concordances analogues dans les années précédentes.

— M. Carles entretient la Société de l'emploi du noir animal destiné à l'industrie des tartres de vin.

Il démontre que dans la purification du noir animal nécessaire aux tartriers, il y a lieu :

1° D'enlever à ce noir toutes les matières calcaires;

2° De lui communiquer le maximum de pouvoir décolorant;

3° De recueillir les phosphates dissous.

Pour arriver au premier résultat, M. Carles a déterminé expérimentalement qu'il faut traiter 100 parties de noir pulvérisé par 125 à 150 parties d'acide chlorhydrique du commerce et 2,000 parties d'eau. Il reste dans ces conditions 15 p. 100 environ de charbon déphosphaté.

La seconde question se scinde en deux : partie chimique, partie physique.

La première prime la seconde, parce qu'un noir n'est utilisable comme agent de décoloration qu'à la condition absolue de ne pas influencer la composition chimique du tartre. Or, l'expérience démontre que les noirs absolument déphosphatés seuls possèdent cette propriété et laissent au bitartrate de potasse sa translucidité naturelle. Ces noirs entièrement déphosphatés sont aussi ceux qui, au point de vue physique et à poids égal, ont le pouvoir décolorant le plus élevé à l'ébullition, aussi bien sur les teintes de lies de vin que sur le caramel. Ces noirs sont encore les plus poreux et les plus propres aux filtrations rapides.

Pour recueillir les phosphates d'os, M. Carles conseille de traiter leur solution chlorhydrique vers 100° par un lait de chaux non en excès. Le phosphate calcaire qui se précipite dans ces conditions est cristallin, peu volumineux, de lavage facile, il marque de 38 à 40 degrés et est soluble dans le citrate d'ammoniaque. C'est un produit fort recherché par l'agriculture et qui permet au tartrier, naturellement outillé pour faire ces traitements, un bénéfice réel. De cette façon, il lui reste, comme surcroît de bénéfice, un noir

déphosphaté supérieur à tous autres agents physiques pour la décoloration des bouillons de tartres et de lies.

— M. Denigès expose l'application de sa méthode au dosage des chlorures dans le lait et dans les boissons fermentées.

Le procédé général de dosage des chlorures que j'ai indiqué dans ma précédente communication est applicable, avec quelques modifications de détail, au lait et aux boissons fermentées.

1° *Dosage dans le lait.* — On met dans un ballon de 250 centimètres cubes, 20 centimètres cubes de lait, 5 centimètres cubes d'une solution à 5 p. 100 de métaphosphate de soude, 100 centimètres cubes d'eau environ et 2 centimètres cubes d'acide azotique, on ajoute 20 centimètres cubes d'azotate d'argent N/10 et on complète le volume à 250 centimètres cubes, enfin on filtre en rejetant à trois ou quatre reprises sur le filtre le liquide qui passe au début et qui est un peu louche.

Quand le filtratum est absolument limpide, on en prélève 125 centimètres cubes, qu'on additionne de 10 centimètres cubes d'ammoniaque, de quelques gouttes d'iodure de potassium et de 10 centimètres cubes d'une solution de CyK alcalinisée par 1 p. 100 d'ammoniaque et équivalant volume à volume à la solution argentique. Puis on verse $AzO^3AgN/10$ jusqu'à trouble permanent; soit a centimètres cubes, la proportion employée pour arriver à ce résultat.

La quantité de chlorures, comptée en ClNa, sera, par litre de lait :

$$x = [10 - (10 - a)] \times 0^{gr}00585 \times \frac{1000}{10} = a \times 0^{gr}585.$$

2° *Dosage dans les boissons fermentées.* — La méthode que je développe est surtout intéressante pour les vins rouges, mais elle est applicable à toutes les boissons fermentées.

Pour les vins rouges, on chauffe dans une capsule de porcelaine 50 centimètres cubes de vin jusqu'à ébullition, qu'on maintient environ deux minutes, puis on enlève le feu et on ajoute aussitôt 2 centimètres cubes d'acide azotique concentré pur. On agite; le liquide devient d'abord d'un rouge très vif, puis jaunit, en laissant déposer des flocons colorés; si ce résultat n'était pas atteint au bout d'une minute, on ajouterait encore 1 centimètre cube d'acide. Dès qu'on l'a obtenu, on verse dans la capsule 20 centimètres cubes d'$AzO^3AgN/10$, on laisse refroidir, et on met le tout dans un matras jaugé de 200 ou 250 centimètres cubes, et on achève de le

remplir avec de l'eau distillée. On jette le liquide sur un filtre, on repasse les premières portions jusqu'à ce que le filtratum soit limpide et on en recueille une quantité correspondant à la moitié de la masse totale (100 ou 125 centimètres cubes). A partir de ce moment, on opère, comme il a été dit plus haut, avec le filtratum du lait.

La dose de chlorures sera ici, par litre de vin :

$$[10 - (10 - a)] \times 0,00585 \times \frac{1000}{25} = a \times 0^{gr}234.$$

La teinte acajou du liquide additionné d'ammoniaque ne gêne en rien l'appréciation de la réaction finale. — Avec les vins blancs, les bières, les cidres, etc., il faut continuer l'ébullition jusqu'à évaporation à moitié au moins, ajouter 1 centimètre cube seulement d'acide azotique et très rapidement après l'azotate d'argent, puis continuer comme plus haut.

Séance du 7 février 1894. — M. Picart fait une communication sur une expression de la force vive d'un système de corps.

On sait que « la force vive d'un système de points matériels est égale à la force vive qu'aurait la masse totale concentrée au centre de gravité, augmentée de la force vive totale dans le mouvement relatif par rapport à des axes de directions invariables menés par le centre de gravité ». (Appell, *Cours de mécanique,* p. 293.)

Le but que je me propose est de voir ce que devient ce théorème lorsqu'on décompose le système en un certain nombre de corps, rigides ou non.

Le théorème suivant est à peu près évident :

La force vive d'un système de deux corps A_0 et A_1, de masses m_0 et m_1, se mouvant autour de leur centre de gravité commun G, est égale à la somme des forces vives de A_0 et A_1 dans leur mouvement relatif autour de leurs centres de gravité G_0 et G_1 augmentée de la force vive résultant du mouvement de deux points matériels de masses m_0 et m_1 placées en G_0 et G_1 autour du point G.

On a, en effet, avec des notations qui se comprennent immédiatement

$$\begin{aligned} F_v(A_0, A_1)_G &= F_v(A_0)_G + F_v(A_1)G \\ &= F_v(A_0)_{G_0} + F_v(G_0)_G + F_v(A_1)_{G_1} + F_v(G_1)_G. \end{aligned}$$

Le point G étant le centre de gravité de deux masses m_0 et m_1

placées en G_0 et G_1 les expressions $F_v(G_0)_G$ et $F_v(G_1)_G$ peuvent être réunies en une seule $F_v(G_0, G_1)_G$. On a finalement

$$F_v(A_0, A_1)_G = F_v(A_0)_{G_0} + F_v(A_1)_{G_1} + F_v(G_0, G_1)_G.$$

Le théorème s'étend à un système composé d'un nombre quelconque de corps $A_0, A_1, \ldots, A_n$, dont les masses sont $m_0, m_1, \ldots, m_n$ et les centres de gravité $G_0, G_1, \ldots, G_n$.

Soit toujours G le centre de gravité du système; désignons par g_0 le centre de gravité des corps $A_1, A_2 \ldots, A_n$; par g_1 le centre de gravité de $A_2, A_3, \ldots, A_n$, etc.; par g_{n-2} le centre de gravité de A_{n-1} et A_n.

La force vive totale dans le mouvement autour de G se compose:

1° De la somme des forces vives de chacun des corps dans leur mouvement autour de leurs centres de gravité respectifs;

2° D'une somme de forces vives provenant du mouvement de deux points matériels autour de leur centre de gravité, savoir: G_0 de masse m_0 et g_0 de masse $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ autour de G; G_1 de masse m_1 et g_1 de masse $m_2 + m_3 + \ldots + m_n$ autour de g_0, etc.; enfin G_{n-1} et G_n de masse m_{n-1} et g_n de masse m_n autour de g_{n-2}.

En effet, on a, d'après ce qui précède:

$$F_v(A_0, A_1, \ldots, A_n)_G = F_v(A_0)_{G_0} + F_v(A_1, \ldots, A_n)_{g_0} + F_v(G_0, g_0)_G$$

où g_0 est supposé, dans le dernier terme, avoir la masse $m_1 + m_2 + \ldots, + m_n$.

En décomposant le second terme, on arrive à l'expression

$$\begin{aligned} F_v(A_1, A_2, \ldots, A_n)_G = {} & F_v(A_0)_{G_0} + F_v(A_1)_{G_1} + \ldots, + F_v(A_n)_{G_n} \\ & + F_v(G_0, g_0)_G + F_v(G_1, g_1)_{g_0} + \ldots, + F_v(G_{n-1}, G_n)_{g_{n-2}}. \end{aligned}$$

Première application. — Les équations différentielles du mouvement des centres de gravité des corps célestes se présentent sous la forme $\frac{d^2x}{dt^2} + f(m_0 + m)\frac{\alpha}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}$, x étant une des coordonnées par rapport à des axes de directions fixes passant par le centre de gravité du système solaire. R est une fonction dont l'expression change lorsqu'on passe d'une planète à l'autre.

Dans son mémoire célèbre « sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps », Jacobi a montré qu'on peut transformer ces équations et les ramener à une forme symétrique.

M. Radau (sur une transformation des équations différentielles de la Dynamique, Annales de l'École normale, 1[re] série, tome V) a

donné une interprétation de la transformation de Jacobi et montré qu'on peut l'obtenir par un changement de coordonnées. Soit G_0 le centre de gravité du soleil, G_1 ..., G_n ceux des planètes, et soient m_0, m_1, ..., m_n les masses de ces corps. M. Radau définit la position de G_1 par ses coordonnées x_1, y_1, z_1 relativement à trois axes rectangulaires de directions fixes passant par G_0; celles de G_2 par ses coordonnées x_2, y_2, z_2 relativement à trois axes parallèles aux premiers passant par le centre de gravité de G_0 et G_1, etc.

En adoptant cette méthode, le théorème que je viens d'indiquer permet de trouver facilement l'expression de la force vive du système, et par suite, à l'aide des formules de Lagrange, les équations du mouvement.

Puisque nous ne cherchons que les mouvements des centres de gravité, nous pouvons considérer G_0, G_1 ..., G_n comme des points matériels. La force vive totale sera alors égale à

$$F_v (G_0, G_1)g_2 + F_v (g_2, G_2)g_3 + \ldots, + F_v (g_n, G_n)_G,$$

g_2 étant ici le centre de gravité de G_0 et G_1, g_3 celui de g_2, de masse $m_0 + m_1$ et de G_3, etc., G le centre de gravité du système.

Formons l'expression de la force vive résultant du mouvement de G_0 et G_1 autour de leur centre de gravité g_2 en fonction des coordonnées x_1, y_1 z_1 de G_1 relativement à G_0. On trouvera facilement.

$$\frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right].$$

En effet, relativement à des axes passant par g_2 et parallèles aux axes fixes, les coordonnées de G_1 sont

$$\frac{m_0 x_1}{m_0 + m_1}, \frac{m_0 y_1}{m_0 + m_1}, \frac{m_0 z_1}{m_0 + m_1},$$

celles de G_0

$$-\frac{m_1 x_1}{m_0 + m_1}, -\frac{m_1 y_1}{m_0 + m_1}, \frac{m_0 z_1}{m_0 + m_1}$$

et la force vive résultante est

$$\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]\left(\frac{m_1 m_0^2}{(m_1 + m_0)^2} + \frac{m_0 m_1^2}{(m_0 + m_1)^2}\right),$$

ce qui donne bien l'expression précédente. On aura de la même façon tous les autres termes, et la force vive totale sera :

$$\frac{m_0 m_1}{m_0+m_1}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]$$
$$+\frac{(m_0+m_1)m_2}{m_0+m_1+m_2}\left[\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right]$$
$$+\dots+\frac{m_0+m_1+\dots+m_{n-1})m_n}{m_0+m_1+\dots+m_n}\left[\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_n}{dt}\right)^2\right].$$

La fonction des forces

$$V=fm_0\left[\frac{m_1}{G_0G_1}+\frac{m_2}{G_0G_2}+\dots+\frac{m_n}{G_0G_n}\right]$$
$$+fm_1\left(\frac{m_2}{G_1G_2}+\dots+\frac{m_n}{G_1G_n}\right)+\dots+f\frac{m_{n-1}m_n}{G_{n-1}G_n}$$

s'exprimera aisément en fonctions de $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$.

Les équations du mouvement s'obtiendront par la méthode de Lagrange et seront :

$$\frac{(m_0+m_1+\dots+m_{i-1})m_i}{m_0+m_1+\dots+m_i}\frac{d^2x_i}{dt_2}=\frac{\partial V}{\partial x_i},$$
$$\frac{(m_0+m_1+\dots+m_{i-1})m_i}{m_0+m_1+\dots+m_i}\frac{d^2y_i}{dt_2}=\frac{\partial V}{\partial y_i},$$
$$\frac{(m_0+m_1+\dots+m_{i-1})m_i}{m_0+m_1+\dots+m_i}\frac{d^2z_i}{dt_2}=\frac{\partial V}{\partial z_i}.$$
$$i=1, 2 \dots n.$$

Deuxième application. — On peut exprimer de la même façon le moment d'inertie d'un système par rapport à un point, un axe ou un plan.

Soit un arc de courbe, limité en deux points A et B et cherchons son moment d'inertie par rapport au centre de gravité G. Traçons la courbe que décrit le centre de gravité g de la portion AM lorsque M parcourt l'arc AB. La droite Mg est tangente en g à cette courbe.

Nous aurons à faire la somme des moments d'inertie des éléments MM_1 par rapport au point g_1 voisin de g, et des moments d'inertie de g, supposé avoir une masse égale à celle de l'arc AM par rapport à g_1; cette dernière quantité est du second ordre.

Si donc on compte l'arc à partir de A, et si l'on désigne par l la

distance Mg, par ρ la densité en M et par s_1 la longueur de AB, on aura pour le moment d'inertie cherché

$$\int_0^{s_1} \rho l^2 \, ds.$$

Cette expression s'écrit aussi, r désignant la distance MG,

$$\int_0^{s_1} \rho r^2 \, ds.$$

Donc

$$\int_0^{s_1} \rho l^2 \, ds = \int_0^{s_1} \rho r^2 \, ds.$$

Si en particulier on suppose la courbe homogène et qu'on cherche le moment d'inertie par rapport au plan des yz passant par G, on trouvera, ξ, η, ζ étant les coordonnées de g,

$$\int_0^{s_1} (x - \xi)^2 \, ds = \int_0^{s_1} x^2 \, ds,$$

ce qui donne

$$\int_0^{s_1} \xi^2 \, ds = \int_0^{s_1} 2x\xi \, ds,$$

formule qu'on aurait pu obtenir à l'aide d'une intégration par parties.

Séance du 22 février 1894. — M. le Président annonce à la Société la mort d'un de ses membres correspondants, M. le Dr Emil Weyr, professeur à l'Université de Vienne, et M. l'Archiviste rappelle quelques-uns des titres scientifiques de ce savant.

— M. Rayet présente un travail sur les grands hivers de Bordeaux, qui sera publié dans les *Mémoires*.

— M. Laborde communique à la Société une méthode nouvelle, beaucoup plus précise que celles que l'on emploie actuellement, pour le dosage de la glycérine dans les liquides fermentés alcooliquement.

Elle est basée sur les deux faits suivants :

1° Si on concentre, en présence d'une petite quantité d'acide sulfurique, une solution aqueuse de glycérine, celle-ci n'est pas entraînée pendant l'évaporation de l'eau, comme cela arrive en milieu neutre ou alcalin;

2° Si l'on porte rapidement à une température voisine de 150°

un mélange de glycérine et d'acide sulfurique concentré, il se produit une réaction qui peut être représentée par la formule :

$$C^6H^8O^6 + 2SO^3HO = 2SO^2 + 10HO + 6GC.$$

C'est d'après la quantité de charbon obtenue, qui peut être déterminée avec précision, que l'on déduit le poids de glycérine correspondant.

— M. PICART expose la première partie d'un travail sur les équations du mouvement d'un ellipsoïde déformable. Ce travail sera publié dans les *Mémoires*.

Séance du 8 mars 1894. — M. GAYON, rapporteur de la Commission des Finances, annonce que cette Commission a trouvé la comptabilité dans un ordre parfait.

La Société vote des remerciements à son trésorier.

Au nom de la Commission, le rapporteur présente le projet de budget suivant :

Frais de recouvrement des cotisations............F.	70
Frais de convocation................................	100
Frais de correspondance	150
Entretien...	300
Frais de catalogue..................................	300
Achats de livres pour compléter les collections......	200
Reliure...	500
Impression des *Mémoires*...........................	6,000
TOTAL..................F.	7,620

Ce projet de budget est adopté.

— M. DE LAGRANDVAL, rapporteur de la Commission des Archives, donne l'état des publications de la Société, et, sur sa proposition, des remerciements sont adressés à M. l'Archiviste.

— M. DEVAUX présente un travail sur le passage des gaz à travers les végétaux, qui sera publié dans les *Mémoires*.

— M. BRUNEL expose à la Société le résultat de recherches faites sur un polyèdre particulier, déjà étudié par Kirkman.

Kirkman, dans l'*Educational Times* (voir *Mathematical Reprints*. t. XXXV), a considéré un polyèdre, qui peut être décrit de la façon suivante : il possède 46 sommets, que l'on désigne par les chiffres successifs de 1 à 46, les arêtes étant fournies par le tableau sui-

vant, qui est alors, avec notre dénomination, le tableau de liaisons du réseau spécial constitué par ce polyèdre :

1	2	41	46	16	17	20			31	32
2	3	6		17	18	42			32	33
3	4	39		18	19	40			33	34
4	5	36		19	20	38			34	35
5	6	34		20	21				35	36
6	7			21	22	26			36	37
7	8	33		22	23	27			37	38
8	9	46		23	24	35			38	39
9	10	32		24	25	31			39	40
10	11	45		25	26	29			40	41
11	12	30		26	27				41	42
12	13	28		27	28				42	43
13	14	44		28	29				43	44
14	15	27		29	30				44	45
15	16	43		30	31				45	46

Kirkman a montré comment on peut, par tâtonnement, arriver à construire un trajet passant par tous les sommets du polyèdre et formé avec ses arêtes. Tel est le trajet 1, 2, 3... 46, qu'il a donné, et que nous avons employé pour écrire le tableau des liaisons qui précède.

Kirkman donne quelques autres trajets de même nature et dit que le nombre total de ces trajets est de 44.

La méthode que nous avons précédemment exposée à la Société permet de traiter la question d'une façon complète. Le développement du tableau des liaisons est évidemment assez complexe, mais ne présente aucune difficulté.

Nous avons déterminé en même temps les trajets passant par tous les sommets, et formés de un, deux, trois et quatre traits. Il n'y a pas de trajet de la nature considérée formé de plus de quatre traits. Comme nous l'avons remarqué déjà, les trajets formés de plus d'un trait sont utiles à considérer, car l'existence d'un trajet de deux, trois ou quatre traits entraîne des vérifications en nombre respectivement égal à une, trois ou sept.

Le polyèdre de Kirkman comporte :

180 trajets d'un seul trait,
236 trajets de deux traits,
80 trajets de trois traits,
15 trajets de quatre traits.

M. Brunel présente à la Société le dessin de ces différents trajets.

Séance du 5 avril 1894. — M. Brunel fait quelques remarques sur l'enlacement des courbes.

Tait a donné dans ses travaux sur les nœuds publiés dans les *Transactions de la Société Royale d'Edinbourg*, en 1876, un exemple de trois courbes, qui, si on les suppose matérielles, ont une disposition relative telle que l'on ne peut éloigner l'une d'elles des deux autres sans les rompre, mais que si l'on enlève une quelconque d'entre elles, les deux autres ne sont plus enlacées, mais peuvent être sans rupture éloignées l'une de l'autre. Brunn, dans les *Sitzungsberichte de Münich*, de 1892, a donné d'autres exemples d'ensembles de courbes jouissant de propriétés analogues; il a figuré en particulier deux généralisations de la configuration de Tait donnant des exemples d'enlacements de n courbes tels que si l'on supprime une quelconque des courbes, les courbes qui restent ne sont plus nullement enlacées.

Si l'on considère une tresse à trois brins numérotés 1, 2 et 3, et si on la suppose arrêtée au premier moment où, dans la construction, les brins 1, 2 et 3 reviennent à la position relative initiale, en reliant les deux extrémités de chacun des brins, on obtient trois courbes qui ne sont autres que la configuration de Tait.

Une des formes que l'on peut donner par déformation à cet ensemble des trois courbes conduit immédiatement à la généralisation de Brunn, représentée dans sa figure 11. L'autre généralisation de Brunn se rattache à la même déformation du même ensemble.

Mais on peut supposer que la tresse à trois brins ait été prolongée jusqu'à ce que, dans la construction, les brins 1, 2 et 3 reviennent pour la $q^{\text{ième}}$ fois à la position relative initiale, en reliant les deux extrémités de chaque brin, on obtient pour chaque valeur de q trois courbes jouissant des mêmes propriétés que la configuration de Tait et se prêtant encore aux généralisations de Brunn.

On peut d'ailleurs, pour obtenir une figure beaucoup plus générale que la figure 11 de Brunn, employer des maillons, pour construire cette chaîne, qui soient obtenus par déformation de courbes correspondant à des indices q différents.

Enfin, de même que nous considérons précédemment des tresses à trois brins, on peut prendre une tresse à $2p+1$ brins, qui conduit

à la construction d'un enlacement de $2p+1$ courbes tel que, si l'on détruit $2p-1$ quelconques des courbes, les deux autres ne sont plus enlacés.

M. Brunel termine en montrant comment on peut symboliquement représenter des enlacements de courbes et reconnaître sur ces symboles si les courbes représentées jouissent de propriétés semblables à celles qui viennent d'être rappelées.

— M. Aignan fait une communication « sur la déviation moléculaire » ou le « pouvoir rotatoire moléculaire » des substances actives.

Au cours de ses beaux travaux sur la dyssimétrie moléculaire des substances actives, M. Ph.-A. Guye a été conduit à considérer une constante nouvelle, qu'il désigne sous le nom de *déviation moléculaire,* et qui, pour la raie D, sera représentée par $(\delta)_D$. Par définition on pose

$$(\delta)_D = \frac{\alpha}{l}\sqrt[3]{\frac{M}{d}};$$

α est la déviation du plan de polarisation de la lumière qui a traversé une longueur l de substance active, M est le poids moléculaire, d la densité du corps actif.

« On comprendra aisément, dit M. Guye, que $(\delta)_D$ représente les » déviations observées pour des colonnes liquides contenant toutes » le même nombre de molécules. Le volume moléculaire apparent » étant $\frac{M}{d}$, la racine cubique de cette expression est, en effet, » proportionnelle aux longueurs contenant le même nombre de » molécules (1). »

D'autre part, le *pouvoir rotatoire spécifique* $[\alpha]_D$, tel qu'il a été défini par Biot, a pour expression

$$[\alpha]_D = \frac{\alpha}{ld}$$

et le *pouvoir rotatoire moléculaire* $[\alpha']_D$, tel que nous l'avons défini dans un précédent mémoire (2), est représenté par

$$[\alpha']_D = M\frac{\alpha}{ld} = M[\alpha]_D.$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVI, 1893.

(2) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1893.

Il est certain que si l'on prend des liquides purs, le terme $(\delta)_D$ défini par M. Guye a bien le même signe que le terme de Biot, et, quand il s'agit de vérifier d'une manière approchée les lois établies par M. Guye, au sujet du centre de gravité du tétraèdre schématique, il importe assez peu de considérer l'une ou l'autre expression. Si nous comparons la déviation moléculaire $(\delta)_D$ au pouvoir rotatoire spécifique $[\alpha]_D$, on a

$$(\delta)_D = [\alpha]_D \sqrt[3]{Md^2}.$$

Examinons ce que devient l'expression de la déviation moléculaire $(\delta)_D$ lorsque le corps actif est dissous dans un dissolvant neutre, qui ne modifie pas la molécule du corps dissous.

Soit une masse Q de dissolution renfermant une masse M de corps actif, de densité d, égale à une molécule-gramme; la concentration ε de la dissolution sera $\frac{M}{Q}$. La densité de cette dissolution étant d_1, son volume sera $\frac{Q}{d_1}$. Pour suivre les indications de M. Guye, nous dirons : un même rayon lumineux, traversant une épaisseur l de liquide actif et de sa dissolution, rencontrera des nombres n et n_1 de molécules actives, qui seront en raison inverse des racines cubiques des volumes occupés par M

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt[3]{\frac{M}{d}}}{\sqrt[3]{\frac{Q}{d_1}}};$$

les rotations observées devront être dans le même rapport; d'où, en remarquant que $Q = \frac{M}{\varepsilon}$,

$$\alpha_1 \sqrt[3]{\frac{M}{\varepsilon d_1}} = \alpha \sqrt[3]{\frac{M}{d}}$$

divisant par l, longueur du tube dans lequel le liquide actif est examiné, on obtient l'expression que M. Guye désigne sous le nom de *déviation moléculaire*

$$(\delta)_D = \frac{\alpha}{l} \sqrt[3]{\frac{M}{d}} = \frac{\alpha_1}{l} \sqrt{\frac{M}{\varepsilon d_1}}.$$

Or, cette relation n'est pas vérifiée par l'expérience.

Le pouvoir rotatoire spécifique est représenté dans les mêmes circonstances par

$$[\alpha]_D = \frac{\alpha_1}{l\varepsilon d_1},$$

d'où

$$(\delta)_D = [\alpha]_D \sqrt[3]{M\varepsilon^2 d_1^2},$$

et l'on voit que la déviation moléculaire de M. Guye est une quantité *variable*, qui diminue à mesure que la dilution augmente et que l'on dissout le corps actif dans un dissolvant plus léger, puisque le pouvoir rotatoire de Biot $[\omega]_D$ doit être considéré comme constant.

L'erreur de M. Guye vient de ce qu'il assimile implicitement les rayons lumineux à des *droites géométriques* et les molécules actives à des *points* rencontrés par ces droites; or, cette conception n'est pas conforme aux faits d'expérience. Il convient de prendre, dans le trajet de l'onde polarisée incidente, un faisceau prismatique de section finie et d'examiner l'action des particules actives qui se trouvent sur la trajectoire de la partie de l'onde considérée.

Pour fixer les idées, nous supposerons la section du faisceau lumineux égale à l'*unité*. En traversant une épaisseur l de dissolution active, le plan de polarisation de la lumière éprouve une déviation α; pour une épaisseur égale à *un* la déviation serait $\frac{\alpha}{l}$. Soit, dans ce cas, N le nombre des molécules actives rencontrées par le faisceau; une molécule produit une déviation moyenne $(\delta) = \frac{\alpha}{lN}$ (en réalité, une seule molécule ne produirait qu'une action insensible, mais il faut remarquer que dans une molécule-gramme il existe un très grand nombre de molécules réelles).

Soit M le poids moléculaire du corps actif considéré, sa masse spécifique, c'est-à-dire la masse de corps actif dans l'unité de volume de la dissolution sera

$$\rho = NM, \qquad \text{d'où} \qquad N = \frac{\rho}{M}.$$

La valeur de la déviation moléculaire (δ) devient alors

$$(\delta) = M\frac{\alpha}{l\rho} = M[\alpha].$$

Cette valeur de la déviation moléculaire ne diffère pas essentiellement de l'expression formulée jadis par Biot.

Il n'y a donc pas lieu de substituer à l'expression du pouvoir rotatoire spécifique

$$[\alpha] = \frac{\alpha}{l\rho} = \frac{\alpha}{l\varepsilon d}$$

l'expression nouvelle

$$(\delta) = \frac{\alpha}{l}\sqrt[3]{\frac{M}{d}}.$$

— M. de Lagrandval entretient la Société de la trouvaille faite au jardin du couvent des Bénédictins de Sainte-Croix, d'un socle en pierre de forme pyramidale, à base carrée, portant vingt et un cadrans solaires disposés dans toutes les orientations possibles.

Une particularité de ces cadrans, c'est que la tige en métal y est remplacée par un parallélipipède taillé dans la pierre avec arêtes vives parallèles à l'axe du monde.

Les orientations diverses de ces cadrans permettaient d'avoir l'heure à tous les moments du jour, et dans toutes les saisons de l'année.

Séance du 19 avril 1894. — La Société approuve vivement la proposition de la Société royale de Londres, ayant pour but la création d'un Comité international chargé de l'établissement d'un catalogue général des publications scientifiques, et s'engage à fournir à ce Comité la communication de ses travaux.

Sont élus membres titulaires de la Société :

MM. Avril, ingénieur de la Compagnie du gaz.
Rodberg, directeur des usines à gaz.
Sarrazin, ingénieur à la Compagnie des chemins de fer du Midi.

MM. Gayon et Dubourg, poursuivant leurs recherches sur la fermentation mannitique du lévulose, sont arrivés à transformer plus de 150 grammes de sucre par litre, ayant donné 112 grammes de mannite et 17 grammes d'acides volatils. Pour cela, la réaction doit se passer en présence du carbonate de chaux qui sature les acides à mesure qu'ils se produisent.

Ils ont, en outre, essayé l'action de divers antiseptiques, à la dose de $\frac{1}{1000}$ sur le ferment mannitique. Ils ont constaté que, dans ces conditions, le sous-nitrate de bismuth, le salicylate de soude,

le naphtol, le thymol, l'iodoforme, le sublimé, l'acide arsénieux, l'acide chromique, l'acide picrique, avaient empêché toute fermentation, et que l'abrastol, l'asaprol, l'aristol, le salol, l'acide borique, le tannin, avaient été absolument inefficaces. Même aux doses de 2 grammes et de 3 grammes par litre, le tannin n'a donné aucun résultat.

Le sous-nitrate de bismuth présente cet intérêt qu'il est inoffensif et que, seul de la liste, il pourrait être employé sans inconvénient dans le pratique vinicole.

— Après quelques mots de M. Blarez sur la communication précédente, M. Carles fait les remarques suivantes : MM. Gayon et Dubourg nous ont parlé de l'action antiseptique sur les vins du sous-nitrate de bismuth, de l'abrastol; et M. Blarez a réclamé, au nom de la viticulture, un agent simple, anodin et peu coûteux, pour préserver la récolte de 1894 et les suivantes de la maladie mannitique.

Si M. Gayon tient à répéter l'expérience qui a attiré l'attention sur l'action microbicide du sel de bismuth, que j'ai faite il y a huit ans, à la Société de pharmacie de Bordeaux, il n'a qu'à rendre filante de l'eau de fleurs d'oranger en la maintenant quelques jours dans une étuve à 25 degrés. Dès qu'elle aura pris assez de viscosité pour ne plus passer à travers un linge très fin, il suffira de l'agiter avec quelques millièmes de bouillie de bismuth. Immédiatement elle perdra toute viscosité et filtrera à travers le papier.

MM. Gayon et Dubourg ont constaté par expérience que l'abrastol n'avait vis-à-vis des ferments secondaires du vin, et spécialement sur le ferment mannitique, aucune action antiseptique. Ce résultat expérimental est précieux à retenir. J'ai toujours déconseillé l'emploi de l'abrastol dont l'action physiologique à long terme me paraît avoir été fort hâtivement étudiée, et qui n'est certainement pas sans action sur les reins de certains sujets délicats; aujourd'hui je ne manquerai pas de dire qu'il représente une dépense inutile, à côté d'une action suspecte sur l'organisme.

Enfin, je répondrai à M. Blarez qu'il sera facile de calmer l'anxiété des viticulteurs au sujet de la maladie mannitique des futures vendanges. J'en ai indiqué ici même, il y a dix mois, le moyen, qui m'a paru assez goûté de quelques viticulteurs méridionaux. Il consiste à ajouter aux moûts assez d'acide tartrique pour élever leur degré d'acidité jusqu'à 6gr50 par litre (acidité représentée en acide sulfurique, ce qui équivaut à 10 grammes d'acide tartrique par litre). J'ai constaté avec la plus grande satisfaction

que le même fait, dans les mêmes limites, venait d'être corroboré par les diverses expériences de MM. Gayon et Dubourg. L'acide tartrique sera certainement accepté sans arrière-pensée par tous les viticulteurs;

Parce que c'est l'acide naturel et caractéristique du raisin et du vin de tous les pays du monde;

Parce que son addition aux moûts n'est pas une fraude, mais au contraire un acte louable;

Parce qu'avec la dose indiquée les moûts atteignent aux maximums de degré alcoolique, de couleur rutilante et de limpidité.

Enfin, parce qu'avec lui on arrive à ce fait très curieux et *a priori* paradoxal, c'est que plus il rapproche les moûts du degré d'acidité indiqué, soit 6gr50, et moins les vins obtenus après fermentation sont acides. Cela tient à ce que, lorsque sa proportion est suffisante, les ferments secondaires ne pullulent plus, et il ne se produit plus, aux dépens du sucre, de ces acides volatils qui ternissent la couleur; c'est aussi parce que, dès que l'œuvre est accomplie, tout l'acide tartrique en excès passe dans les lies à l'état de bitartrate de potasse: la nature a placé dans le raisin et la plupart des fruits sucrés assez de potasse pour cela. Les physiologistes, ennemis des sels de potasse, nous soutiendront assurément dans cette circonstance.

J'estime qu'à la suite de la concordance des résultats de MM. Gayon et Dubourg avec les miens, les chimistes éprouveront le devoir d'indiquer aux viticulteurs l'acidulation tartrique des moûts pour bonifier et quelquefois sauver leur récolte.

— M. Hadamard présente une remarque sur les centres de courbure des roulettes. Soit M′ un point lié à la courbe C′ qui roule sur la courbe C; le centre de courbure M de la trajectoire du point M′, au moment où les courbes C et C′ se touchent en O, est situé sur la droite OM′ et les distances $OM = r$, $OM' = r'$ sont liées par la relation

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\frac{1}{\sin\theta},$$

où ρ, ρ' sont les rayons de courbure de C, C′, et θ l'angle de OM′ avec la tangente commune en O.

Or, cette relation peut s'écrire

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho\sin\theta} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{\rho'\sin\theta}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement :

1° Qu'elle ne change pas si l'on permute les deux courbes roulantes ainsi que les deux points M, M′. Ainsi, M *étant le centre de courbure de la trajectoire du point* M′ *lié à la courbe* C′ *lorsque celle-ci roule sur la courbe* C, M′ *sera le centre de coubure de la trajectoire du point* M *considéré comme lié à la courbe* C *si l'on fait rouler celle-ci sur la courbe* C′ *laissée fixe;*

2° Que si l'on considère une troisième courbe C″ tangente aux deux premières en O avec un rayon de courbure ρ'' et que l'on prenne sur la droite OMM′ un point M″ défini par la condition

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho\sin\theta}=\frac{1}{r'}-\frac{1}{\rho'\sin\theta}=\frac{1}{r''}-\frac{1}{\rho''\sin\theta}$$

(où r'' désigne OM″), chacun des points M, M′, M″ est le centre de courbure de la trajectoire de l'un quelconque des deux centres quand on fait rouler l'une sur l'autre les deux courbes correspondantes. En particulier, *si le point* M″, *lié à la courbe* C″, *décrit, lorsque cette courbe roule successivement sur les courbes* C, C′, *des trajectoires ayant pour centres de courbure respectifs les points* M, M′, *le point* M *sera le centre de courbure de la trajectoire du point* M′ *lié à la courbe* C″ *lorsque celle-ci roulera sur la courbe* C *supposée fixe.*

Le théorème connu sur les centres de courbure des enveloppes doit être regardé comme une conséquence de ce qui précède. Soit, en effet, Γ′ une courbe invariablement liée à la courbe C′, Γ son enveloppe lorsque C′ roule sur C; on sait que la courbe Γ′ peut être regardée comme le lieu décrit par un point M″ lié à une certaine courbe C″ roulant sur C′, et la courbe Γ comme le lieu du même point lorsque C″ roule sur C. Les points M, M′ (centres de courbure de Γ, Γ′) et M″ constituent donc le système de points dont il a été parlé en second lieu et l'on construira par conséquent le point M en appliquant au point M′ la construction de Savary.

Séance du 10 mai 1894. — M. Bordier dépose sur le bureau de la Société, au nom de M. le Dr Cassaët et au sien, le travail de M. Merget *sur le Mercure,* dont ils ont terminé la publication sur la demande de leur ancien professeur.

M. le Président adresse à MM. Bordier et Cassaët les remerciements de la Société et rappelle en quelques mots l'importance des recherches que contient le volume de notre regretté collègue.

— M. Devaux présente à la Société la suite de ses travaux sur la porosité de quelques tiges ligneuses. Le travail paraîtra dans les *Mémoires*.

— M. Brunel donne une application nouvelle de la méthode générale pour déterminer un trajet passant par tous les sommets d'un réseau donné.

Un saut du cavalier ayant été tracé, on en arrache un morceau et l'on demande de construire les trajets qui, avec la partie conservée, constituent des sauts du cavalier sur l'échiquier.

M. Brunel montre sur un exemple particulier comment la question se ramène immédiatement à la théorie des trajets sur les réseaux et rappelle comment alors le problème se résout.

Dans le cas présent, le saut du cavalier incomplet était tracé sur un morceau de carton dans lequel un trou correspondait à la partie déchirée. Les solutions, qui étaient au nombre de douze, se trouvaient figurées sur une feuille, et en posant les douze compléments au-dessous du trou formé dans le carton on obtenait les trajets cherchés.

Cet exemple a été choisi pour montrer sur un cas encore assez simple, mais cependant offrant à première vue quelque difficulté, l'application de la méthode générale de développement du tableau des liaisons d'un réseau.

Séance du 24 mai 1894. — M. Brunel présente quelques remarques sur la représentation graphique des carbures saturés de formule C^nH^{2n+2}.

Cayley, dans un mémoire paru en 1875 dans les *British Association Reports* « On the Analytical Forms called Trees, with Application to the Theory of chemical Combinations », a montré, en particulier, comment on pouvait déterminer le nombre des isomères distincts pour les valeurs successives de n. Il a recours à la notion de centre ou de bicentre d'une ramification. Mais les centres et les bicentres qu'il considère et que l'on peut appeler centres et bicentres d'altitude ou de longueur, ne sont pas les seuls que l'on peut considérer. Jordan, dans un mémoire sur les assemblages de lignes (*Journ. de Crelle,* 1870, t. LXX), avait montré qu'il y a lieu de considérer dans les ramifications des centres et des bicentres de nature différente, que l'on peut appeler centres et bicentres de magnitude ou de nombre.

Déjà, dans une question différente (*Amer. Journ.*, t. IV, 1881, p. 266), Cayley avait remarqué que les centres et bicentres de

magnitude conduisaient à des calculs beaucoup plus simples et plus rapides. Il en est de même ici, et le procédé à employer pour résoudre le problème de la détermination des isomères des paraffines n'est autre que celui indiqué par Jordan dans le mémoire cité plus haut.

Nous avons ainsi retrouvé, d'une part, le nombre des ramifications φ_ν des ramifications à racine et à une seule branche principale, issue de cette racine pour les valeurs de ν de 1 à 14

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
φ_ν	1	1	1	2	4	8	17	39	89	211	507	1238	3057	7639

Le tableau de Cayley donne pour $\nu = 13$ $\varphi_{13} = 3056$; l'erreur provient de ce que le nombre des ramifications considérées d'altitude 10 est égal à 53 et non pas à 52.

D'autre part, le même procédé donne pour $n = 1$ jusqu'à $n = 27$ le nombre ψ_n des isomères de formule C^nH^{2n+2}. Les calculs sont indépendants les uns des autres. Ils ont été faits de $n = 1$ à $n = 16$, et aussi pour $n = 27$

n	ψ_n	n	ψ_n	n	ψ_n	n	ψ_n
1	1	5	3	9	35	13	802
2	1	6	5	10	75	14	1858
3	1	7	9	11	159	15	3991
4	2	8	18	12	355	16	10339

$$\psi_{27} = 234\ 172\ 832.$$

Les nombres $\psi_{12} = 355$ et $\psi_{13} = 802$ sont différents de ceux de Cayley, mais identiques à ceux donnés par Delannoy dans le *Bulletin* de la Société chimique, en exposant la méthode de Cayley. Nous avons donné les nombres ψ pour les valeurs de n égales à 14, 15, 16 et 27, non pas parce que nous les croyons utiles, mais parce que nous les avons obtenus sans aucune peine. S'il y avait quelque utilité à obtenir les nombres ψ de $n = 17$ à $n = 26$ ou même au delà de 27, le travail ne serait pas énorme, mais le nombre des multiplications à faire augmente et les chances d'erreur de calcul vont également en croissant.

Séance du 7 juin 1894. — Le fascicule 2 du tome IV des *Mémoires* de la Société est déposé sur le bureau et mis en distribution.

— M. Hautreux entretient la Société de l'étude qu'il vient de faire sur les courants et sur la direction des vents de la côte des Landes.

Ce travail sera publié dans les *Mémoires*.

— M. Croisier communique à la Société, au nom de M. Joannis et au sien, les résultats auxquels ils sont arrivés dans l'étude des combinaisons des sels d'argent avec l'ammoniaque.

Ils ont suivi la méthode que M. Joannis avait employée pour préparer les chlorures ammoniacaux de sodium et de baryum; elle leur a permis de réaliser plus exactement les combinaisons déjà connues, et d'en effectuer qu'on n'avait pas pu obtenir avec la méthode antérieurement suivie. Tandis que dans celle-ci on faisait passer du gaz ammoniac sur le sel métallique jusqu'à ce que celui-ci n'augmentât plus de poids, le principe de la méthode actuelle consiste à condenser de l'ammoniaque dans un réservoir contenant de la soude caustique qui en assurera la parfaite dessiccation. Puis on envoie ce gaz sur le sel également bien desséché, par petites portions, de façon que l'échauffement dû à la combinaison n'amène pas la fusion d'une partie du sel, qui dès lors ne se combinerait plus que partiellement par sa surface. Dès que le sel ne s'échauffe plus sensiblement par l'arrivée d'une nouvelle portion d'ammoniaque, on refroidit dans la glace additionnée de sel marin le tube qui le contient en laissant s'échauffer à l'air le réservoir à ammoniaque; ce gaz arrivant sous une pression de 2 à 3 atmosphères continue de saturer le sel, et ses dernières portions se liquéfiant baignent celui-ci et en complètent la saturation.

Après avoir laissé le sel en contact avec l'ammoniaque liquide pendant une heure ou deux, on fait dégager l'excès de ce corps à 0° et sous la pression atmosphérique. Une pesée donne alors l'augmentation de poids du sel et, par suite, la composition du composé formé.

Ensuite, on chauffe le composé à des températures progressivement croissantes, et, quand le dégagement gazeux devient plus abondant que celui dû à la dilatation seule, on maintient fixe la température atteinte tant que dure le dégagement. La perte de poids permet de calculer la composition du composé restant.

Si on veut avoir les tensions de dissociation d'un composé ammoniacal aux différentes températures, on relie le tube qui le contient à un manomètre à air libre par un tube à quatre embranchements, dont l'un conduit à un robinet de dégagement. Puis on chauffe le composé de façon à enlever assez d'ammoniac pour qu'il

reste toujours en partie dissocié aux plus basses températures auxquelles on porte l'appareil.

Alors, en maintenant le corps à des températures fixes assez longtemps pour que le manomètre se mette en équilibre, on mesure les tensions correspondant à ces températures.

La formule qui relie les tensions de dissociation aux températures est celle qui a été établie par A. Dupré pour les tensions de vapeur et employée par M. Bertrand, pour représenter les résultats de l'étude de la dissociation des chlorures ammoniacaux faite par M. Isambert :

$$\text{Log P} = \frac{a}{T} + b \log T + c,$$

où P = la pression en centimètres de mercure,

T = la température absolue,

a, *b* et *c* étant des constantes à déterminer pour chaque composé.

Voici les résultats obtenus :

Bromure d'argent. — Ce sel a donné trois composés qu'on n'avait pas pu obtenir avec l'ancienne méthode, tous trois solides et blancs.

	$AgBr, 3AzH^3$		$AgBr, \frac{3}{2} AzH^3$		$AgBr, AzH^3$	
	Théorique.	Trouvée.	Théorique.	Trouvée.	Théorique.	Trouvée.
AgBr. .	78,66	78,56	88,06	88,07	91,71	91,74
AzH^3. .	21,34	21,44	11,94	11,93	8,29	8,26

Leurs tensions de dissociation sont données par les formules suivantes :

Pour $AgBr, 3AzH^3$,

$$\text{Log P} = -\frac{1787,1294}{T} + 1,075 \log T + 5,7148,$$

vérifiée entre 0° et 21°;

Pour $AgBr, \frac{3}{2} AzH^3$,

$$\text{Log P} = -\frac{6650,6086}{T} - 35,239 \log T + 111,1904,$$

vérifiée entre 30° et 55°;

Et pour $AgBr, AzH^3$,

$$\text{Log P} = -\frac{4033,0512}{T} - 13,2489 \log T + 47,5847,$$

vérifiée entre 18° et 64°.

Les températures de dissociation de ces composés, sous la pression normale, sont respectivement : 3°5; 34° et 51°5.

Iodure d'argent. — Ce sel a donné, outre le composé déjà connu AgI, $\frac{1}{2}$ AzH^3, le composé nouveau AgI, AzH^3. Tous deux sont solides et blancs.

Voici les compositions obtenues :

	AgI, AzH^3		AgI, $\frac{1}{2}$ AzH^3	
	Théorique.	Trouvée.	Théorique.	Trouvée.
AgI. . .	93,25	92,92	96,51	96,34
AzH^3. .	6,75	7,08	3,49	3,66

Les formules de leur tension de dissociation sont :

Pour AgI, AzH^3,

la même que pour AgBr, $3AzH^3$,

Et pour AgI, $\frac{1}{2}$ AzH^3,

$$\text{Log } P = -\frac{3438,3604}{T} - 8,8803 \log T + 34,0799,$$

vérifiée entre 26° et 100°.

Les températures de dissociation, sous la pression normale, sont respectivement pour ces deux composés : 3°5 et 90°.

Cyanure d'argent. — Le composé AgCy, AzH^3 a été signalé par Isambert; nous lui avons trouvé la composition suivante :

	Théorique.	Trouvée.
AgCy. .	88,74	88,36
AzH^3. .	11,26	11,64

Il est soluble dans l'ammoniaque liquide à — 10°.

La formule de ses tensions de dissociation est :

$$\text{Log } P = -\frac{12497,1255}{T} - 58,7176 \log T + 186,3546,$$

vérifiée entre 81° et 117°.

Sa température de dissociation sous la pression normale est 102°. Sa tension de dissociation à 100°, indiquée par Isambert comme égale à 55 centimètres, a été trouvée de 69 centimètres.

Azotate d'argent. — Nous avons trouvé les compositions sui-

vantes pour deux des trois composés connus de ce sel avec l'ammoniac :

	$AgAzO^3, 3AzH^3$		$AgAzO^3, 2AzH^3$	
	Théorique.	Trouvé.	Théorique.	Trouvé.
$AgAzO^3$	76,92	76,44	83,33	82,92
AzH^3 . .	23,08	23,56	16,67	17,08

Le composé $AgAzO^3, 3AzH^3$ est soluble dans l'ammoniaque liquide au-dessous de — 10°.

Ses tensions de dissociation sont données par la formule :

$$\text{Log P} = -\frac{5864,6826}{T} - 26,1384 \log T + 85,3665,$$

vérifiée entre 15° et 83°.

Sous la pression normale il se dissocie à 63°.

Le composé $AgAzO^3, 2AzH^3$ se dissocie sous la pression normale vers 170°; il fond et, comme dans tous les cas analogues, sa dissociation se fait irrégulièrement, et nous n'avons pas pu l'étudier à ce point de vue ni déterminer la composition du dernier composé.

Séance du 21 juin 1894. — M. Brunel fait une communication sur la construction et l'énumération des n-èdres à base $(n-1)$ gonale et à sommets trilatéraux.

Kirkman, dans les *Philosophical Transactions* de 1855, a déjà étudié cette classe particulière de polyèdre et il a montré que le nombre des n-èdres distincts était pour

$n = 4$	5	6	7	8	9	10	11
égal à 1	1	1	3	4	12	27	82.

Si l'on considère un polyèdre de cette nature et que l'on suppose supprimées les arêtes de la base, les autres arêtes constituent une ramification à sommets trilatéraux et à connexion simple. Inversement, à toute ramification à sommets trilatéraux et à connexion simple tracée sur un plan, par exemple, correspond un polyèdre du genre considéré.

La considération des centres et des bicentres de magnitude qui nous a été utile dans une séance précédente dans la détermination des isomères des paraffines se prête ici non moins facilement à la solution de cette nouvelle question.

Le premier problème à résoudre est de construire les ramifica-

tions à sommets trilatéraux, à racine et à une seule branche principale issue de cette racine pour 2, 4, 6 .... $2p$ sommets. Mais ici, deux ramifications qui sont l'image l'une de l'autre dans un miroir ne doivent pas être considérées comme identiques.

Si l'on désigne par φ_k le nombre de ramifications contenant $2(k+1)$ sommets, il est facile de voir que les ramifications qui entrent dans φ_k se déduisent de celles qui figurent dans les ramifications d'ordre inférieur et que l'on a

$$\varphi_{2r} = 2\varphi_{2r-1}\varphi_0 + 2\varphi_{2r-2}\varphi_1 + \dots + 2\varphi_r\varphi_{r-1}$$
$$\varphi_{2r+1} = 2\varphi_{2r}\varphi_0 + 2\varphi_{2r-1}\varphi_1 + \dots + 2\varphi_{r+1}\varphi_{r-1} + \varphi_r^2$$

avec

$$\varphi_0 = 1 \text{ et } \varphi_1 = 1;$$

d'où l'on déduit les valeurs successives de φ

1 1 2 5 14 42 132 429 1430 4862 16796 ...

Remarquons en passant que ce sont précisément les nombres qui donnent les partitions différentes d'un polygone en triangles. Nous reviendrons plus tard sur ce point.

Il suffit maintenant de réunir autour d'un centre de magnitude trois ramifications à indices égaux ou différents telles que celles qui ont été obtenues ou, s'il y a lieu, de réunir sur un bicentre de magnitude commun deux de ces ramifications de même indice pour avoir les ramifications cherchées.

Dans le cas d'un centre, si deux ou trois indices sont égaux il y a une réduction dans le nombre de figures distinctes obtenues par l'emploi des ramifications correspondantes. Il est facile de déterminer la formule qui donne les configurations distinctes dans chaque cas.

Nous avons ainsi vérifié les nombres de Kirkman. Le nombre de 10-èdres avait été donné égal à 23 par inadvertance, mais Kirkman avait lui-même reconnu et signalé cette erreur. Nous avons prolongé le tableau de Kirkman et trouvé que le nombre des n-èdres distincts était pour

$n =$ 12	13	14	15	16	17	18
égal à 228	733	2272	7528	24836	88898	285357.

Séance du 5 juillet 1894. — MM. Gayon et Dubourg, continuant leurs recherches sur la fermentation mannitique en présence

des substances antiseptiques, ont constaté que le sublimé corrosif, le sulfate de cuivre et le sous-nitrate de bismuth empêchent tout développement du ferment à la faible dose de $\frac{1}{10000}$; les autres produits essayés ne sont antiseptiques qu'à des doses plus élevées.

L'action antiseptique s'exerce avec la même intensité dans le moût de raisin et dans le bouillon Liebig sucré, en présence ou en l'absence de la levure alcoolique.

Dans le sous-nitrate de bismuth, c'est le métal qui est l'agent actif, car l'acide nitrique seul est sans effet, tandis qu'avec le carbonate de bismuth à $\frac{1}{10000}$ il n'y a pas trace de production de mannite.

En faisant des cultures avec du ferment mannitique porté à des températures croissantes, MM. Gayon et Dubourg ont trouvé que le ferment était tué à 60 degrés.

Lorsqu'on cherche l'action réciproque du ferment mannitique et de la levure alcoolique dans le même milieu sucré, on constate que le ferment gêne le développement de la levure, tandis qu'au contraire la levure favorise le ferment.

Séance du 19 juillet 1894. — M. Bordier montre quelques expériences tendant à déterminer la cause de l'adhérence du fémur dans les os du bassin.

— M. Goguel fait une communication sur quelques arséniates nouveaux, en particulier sur les arséniates de nickel et de cobalt.

— M. Hadamard complète la démonstration donnée par M. de Saint-Germain, dans le *Bulletin* de la Faculté de Caen, du théorème de Jacobi sur le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe. On sait que le cas général peut se ramener à celui où l'ellipsoïde d'inertie au point de suspension est une sphère. Dans ces conditions, M. de Saint-Germain cherche les lieux décrits par l'extrémité de la rotation instantanée dans l'espace fixe et dans le corps mobile; il trouve pour ces lieux deux herpolhodies et remarque que les constantes h des deux mouvements de Poinsot correspondants sont toutes deux égales à $\frac{1}{4}$.

Mais il faut observer tout d'abord qu'on n'a pas ainsi démontré l'identité des cônes C, C' décrits par l'axe instantané dans l'espace fixe et dans le corps mobile avec les cônes à base herpolhodie qui s'introduisent dans la théorie de Poinsot.

Car, une herpolhodie étant donnée, le point fixe du mouvement de Poinsot correspondant est à une distance parfaitement déter-

minée du plan de la courbe; cette distance est donnée par la quantité $\frac{\sqrt{h}}{l}$, et peut être portée d'un côté ou de l'autre du plan suivant le signe attribué au radical $\sqrt{h}$.

Dans le cas actuel, si l'on forme $\frac{\sqrt{h}}{l}$, on voit qu'on peut effectivement considérer les points fixes des mouvements de Poinsot comme placées au point fixe du mouvement proposé. On doit, pour cela, donner à $\sqrt{h}$ la valeur $\frac{1}{2}$ pour l'un des deux cônes, la valeur $-\frac{1}{2}$ pour l'autre.

Pour démontrer complètement le théorème de Jacobi, il suffit d'établir que les polhodies correspondant aux cônes C, C′ sont identiques. Or, ceci résulte immédiatement de la considération des rotations instantanées. Soient, en effet, Γ, Γ′ les cônes qui ont pour bases ces polhodies et qui roulent sur les cônes C, C′ pendant que ceux-ci roulent l'un sur l'autre. Si R est la rotation du cône C′ par rapport au cône C, la rotation de Γ par rapport à C sera (en raison de la valeur trouvée pour $\sqrt{h}$) égale à $\frac{1}{2}$R, et la rotation de Γ′ par rapport à C′ à $-\frac{1}{2}$R. La rotation mutuelle des cônes Γ, Γ′ est donc nulle, et comme ces cônes ont une génératrice commune variable; ils sont identiques. On a donc bien ainsi le système invariable dont le mouvement absolu et le mouvement relatif sont tous deux des mouvements de Poinsot.

— M. Brunel présente quelques remarques sur les arrangements en triades, comprenant toutes les duades, formés avec un système donné d'éléments.

Netto, dans son *Traité des substitutions,* et ultérieurement (*Mathematische Annalen,* t. XLII, 1892, p. 143-152), s'est occupé de cette question et a montré comment on pouvait former ce qu'il appelle des systèmes de triplets pour un nombre d'éléments de la forme $6n+1$ ou $6n+3$, mais les lois de formation qu'il a données étaient loin d'épuiser tous les nombres appartenant à ces deux formes, qui sont d'ailleurs les seules possibles.

Hastings Moore, dans le tome suivant du même recueil (1893, p. 271-285), a comblé ce qui pouvait être considéré d'après Netto comme une lacune.

Il n'est pas inutile de signaler à ce sujet les travaux bien antérieurs de Kirkman parus dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. En 1847, cet auteur avait déjà montré que pour $x = 6n + 1$ ou $6n + 3$ on peut construire un système de triades comprenant toutes les duades. Il s'était alors également occupé de déterminer pour les autres formes du nombre x le nombre maximum de triades possible que l'on peut construire sans répéter aucune duade. Les démonstrations relatives à cette dernière question laissent à désirer; il n'en est pas de même de celle qu'ont traitée de nouveau Netto et Hastings Moore.

M. Brunel se propose de revenir sur cette étude en profitant des avantages fournis plus particulièrement par la méthode donnée par le dernier auteur. Il signale dès aujourd'hui le fait que déjà pour $x = 15$ le nombre des systèmes de triades distincts est bien supérieur à deux; il montre comment on peut, dans ce cas particulier, déterminer une série de systèmes distincts.

FRAGMENTS

DE

BIOLOGIE CELLULAIRE

PAR M. J. KUNSTLER,

PROFESSEUR ADJOINT DE ZOOLOGIE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

I

Constitution du Protoplasma.

En examinant à l'aide du microscope la substance constitutive des végétaux, Schleiden, en 1838, vit qu'elle était criblée d'une multitude de logettes, dont les parois, rigides et cellulosiques, se montraient tapissées d'une couche protoplasmique, englobant, en un point variable, un noyau, et contenant un liquide. Il nomma ces petites cavités des *cellules,* et édifia une hypothèse générale sur la structure des plantes. Il admit que tout végétal était constitué par un nombre plus ou moins grand de ces logettes; en un mot, il créa la *théorie cellulaire.*

Cette théorie prit ultérieurement une extension qui n'était pas dans l'esprit de son auteur et changea profondément de signification. On l'appliqua aux tissus des animaux, où l'on retrouva des éléments que l'on compara aux cellules, mais qui en différaient à la première analyse en ce que, au lieu d'être de nature ternaire, leurs parois étaient azotées. La notion de *cellule* varia peu à peu et d'une façon continue; elle finit par tout englober. Au début, la cellule représentait une logette solide à contenu protoplasmique, à noyau et à

liquide interne. On admit progressivement qu'un corpuscule de protoplasma pouvait, sans cesser d'être cellule, être dépourvu de sa membrane enveloppante, de sa cavité interne et même de son noyau. Toute trace de structure pouvait disparaître sans que le protoplasma cessât d'être cellulaire.

Il fut établi dans la science que tous les éléments anatomiques qui composent les tissus des êtres vivants adultes dérivent directement, par simple changement de forme ou par soudure, d'autres cellules qui, primitivement, constituent leur embryon, et que tout organisme est formé par un nombre variable de cellules qui dérivent toujours elles-mêmes d'autres cellules.

On chercha aussi à déterminer la valeur morphologique de ces cellules.

Chez les Protozoaires, l'observation ne révèle pas l'existence de cellules. Aussi, n'a-t-on pas hésité à considérer ces organismes comme formés tout entiers d'une seule cellule, comme des êtres *unicellulaires* ou *monocellulaires*. De ce que la constitution physique de ces êtres autonomes peut souvent être ramenée à celle des différentes parties de la cellule, on en a conclu à leur équivalence avec les éléments anatomiques des êtres plus élevés, qui sont donc *pluricellulaires*. Toute la théorie coloniale se trouve là en germe.

Les organismes pluricellulaires sont devenus, par le fait, des sortes de colonies de corpuscules protoplasmiques à vie plus ou moins autonome, corpuscules pouvant exister à l'état isolé et constituer des Protozoaires, ou bien être unis en groupes pour former de nouvelles unités d'un ordre plus élevé. Les Métazoaires ou êtres pluricellulaires seraient donc de véritables organismes collectifs, des agrégats d'êtres vivants, qui ont perdu, par une certaine évolution régressive, leur qualité d'êtres autonomes pour devenir des parties d'un tout nouveau et complexe et s'adapter à des fonctions spéciales.

La marche évolutive de la théorie cellulaire a été fort laborieuse. Il lui a fallu la moitié d'un siècle pour aboutir au point où elle en est aujourd'hui. Ce n'est qu'en faisant subir à

cette théorie des transformations successives et profondes qu'on est parvenu à y faire rentrer la totalité des corps vivants.

Une cellule est une masse de *protoplasma* plus ou moins individualisée autour d'un noyau. Le terme de protoplasma donne un corps à une conception morphologique; au point de vue chimique, c'est une matière albuminoïde. Le protoplasma a cependant des propriétés que n'ont pas les matières albuminoïdes. Ses molécules ne sauraient être des molécules ordinaires, car celles-ci n'ont pas la possibilité des échanges de matière; elles sont probablement dues à la réunion de molécules chimiques diverses.

A l'examen microscopique, le protoplasma apparait généralement comme une substance homogène ou granuleuse. Aussi est-il généralement considéré comme étant une matière glutineuse, sans structure, en quelque sorte, muqueuse, à laquelle Dujardin a attribué le nom de *sarcode.*

La technique moderne permet cependant d'y distinguer des traces d'organisation fort diversement appréciées jusqu'ici. L'opinion la plus répandue aujourd'hui est qu'on discerne dans le corps cellulaire ou *cytoplasma,* des fibrilles, peut-être anastomosées en un réseau, dans les mailles duquel se trouve du protoplasma moins consistant; la coupe optique de ces fibrilles offre l'aspect de granules. Elles sont formées d'une matière réfringente connue sous les différents noms de *substance filaire, substance réticulée, spongioplasma, mitome.* La substance plus fluide et moins réfringente est de la *substance interfibrillaire,* de l'*hyaloplasma,* du *paraplasma* ou du *paramitome.*

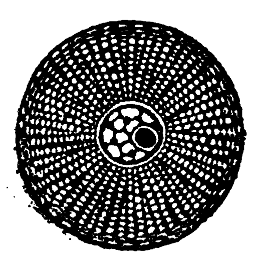


Fig. 1. — Schéma d'une cellule à structure alvéolaire. Les parois latérales des vacuoles ont l'aspect de lignes rayonnantes. Les assises superficielles sont allongées tangentiellement de manière à former un tégument (exoplasme). Le noyau, entouré d'une zone claire, montre son réseau nucléaire et son nucléole indépendant.

Dans une foule de cellules, le protoplasma se différencie en deux parties, l'une interne, l'*endoplasme,* qui persiste à peu près à l'état de protoplasma ordinaire, l'autre

périphérique, l'*exoplasme,* ou couche limitante périphérique. Cet exoplasme présente souvent des pointes, sortes de prolongements fibrillaires rayonnants.

Brass admet même que les cellules constituent un ensemble complexe, formé de plusieurs sortes de protoplasmas. A la surface, se trouverait le *plasma moteur;* puis viendrait le *plasma respiratoire,* suivi du *plasma nutritif;* enfin, autour du noyau, existerait une nouvelle couche à fonctions analogues, le *plasma nourricier.* Seul, le plasma de nutrition élaborerait les granulations qui exercent une attraction sélective sur le carmin et qui seraient donc des éléments d'assimilation.

Ce n'est que dans des cas assez peu fréquents dans la nature que l'on rencontre du protoplasma dépourvu de noyau. Le plus souvent les masses protoplasmiques contiennent un ou plusieurs de ces corpuscules.

La substance du noyau est du *karyoplasma;* il présente un aspect structuré analogue à celui du protoplasma ordinaire, quoique, dans la règle, plus net. Le réseau nucléaire est formé de *plastine* ou *nucleoplasma* ou *substance achromatique,* ou encore *achromatine,* contenant des granulations de *chromatine,* et le tout est plongé dans du suc nucléaire. La dénomination de *chromatine* rappelle la propriété que possède cette substance d'absorber les réactifs colorants. Celle du *nucléine,* qu'on lui attribue quelquefois, rappelle son siège. Ces granulations chromatiques sont encore appelées *microsomes.* La partie chromatique paraît ne pas toujours rester aux mêmes points dans les filaments et des parties achromatiques paraissent susceptibles de devenir chromatiques et réciproquement. — Dans certains noyaux, le reticulum n'est pas condensé, et il existe des lacunes dans la substance nucléaire, souvent à un point tel que le noyau prend un aspect vésiculaire.

La substance périphérique du noyau est ordinairement plus dense que celle qui se trouve à l'intérieur, de façon à former une sorte de membrane enveloppante, généralement très mince. Pour certains auteurs, ce ne serait là que la partie périphérique du réseau (dans le sens propre du mot) nucléaire, dont les

mailles seraient très rapetissées. S'il en était ainsi, la distinction en paraplasma et en suc nucléaire pourrait paraître superflue, car ces liquides communiqueraient librement à travers les mailles du réseau membraniforme. La membrane enveloppante du noyau paraît, dans certains cas, constituée par la couche alvéolaire superficielle, plus dense, et d'autres fois, et plus souvent, simplement par les portions périphériques des parois de cette même couche, un peu épaissies et formant un ensemble continu.

Le contenu du noyau présente souvent un aspect différent. On y distingue alors un ou plusieurs cordons flexueux, pelotonnés, irréguliers, formés d'une variété particulière de chromatine, la *parachromatine.* D'après certains observateurs, de ce filament pourrait dériver directement un réseau nucléaire, par le seul fait que les anses flexueuses qu'il décrit et dont la convexité est tournée vers l'intérieur, se fusionneraient à leurs points de contact. Les points de soudure ainsi constitués formeraient les points nodaux chromatiques.

Autour du noyau, on distingue souvent une étroite zone claire, que j'ai déjà signalée en 1882, entourant immédiatement cet élément. Il y a quelques années, Vejdovsky a donné le nom de *périplaste* à cette couche particulière. Elle présente quelquefois un aspect fibrillaire, et peut même montrer une sorte de structure concentrique.

A l'intérieur du noyau, mais indépendant de sa substance, se voit un corpuscule à contours nets et autonomes, dont la substance présente des réactions un peu différentes de celles du réseau chromatique, c'est le *nucléole*, formé de *prochromatine,* de *paranucléine* ou *pyrénine*. Cet élément est généralement situé près de la périphérie, contre la paroi.

Certaines observations tendent à faire admettre que le nucléole est une sphère creuse, remplie d'un fluide. Par exemple, dans l'atrophie du noyau des cellules du corps muqueux de Malpighi, il arrive que le nucléole prenne peu à peu un développement considérable, de façon à occuper toute la cavité du noyau, dont la substance est refoulée sur

un des côtés et affecte la forme d'un croissant moulé sur la vésicule du nucléole.

J'ai montré l'existence, autour du nucléole de certains Flagellés, d'une zone hyaline qu'Eimer a revue dans d'autres éléments, et que nient, à tort, Flemming et Klein.

Le rôle des nucléoles est peu connu. On les considère quelquefois comme des matériaux de réserve, destinés à être employés lors de l'activité cellulaire.

L'exposé qui précède peut être considéré comme un résumé des conquêtes scientifiques généralement admises, de celles que les esprits les plus prudents ne sauraient mettre en doute. A côté de ces vues circonspectes viennent se placer des résultats plus nouveaux, dont la jeunesse ne saurait, à elle seule, constituer une raison suffisante pour qu'elle soit accueillie avec peu de faveur.

Les travaux récents nous offrent, en effet, des vues toutes nouvelles relativement à la constitution du protoplasma.

Structure et *protoplasma* sont deux vocables qui, il n'y a pas bien longtemps, eussent fait bien singulière figure si on les avait trouvés accouplés. De nos jours, l'habitude de les voir réunis s'est insensiblement glissée dans les mœurs, et, quelle que soit l'opinion des auteurs, ils les emploient sans répugnance. C'est dire que, dans l'opinion scientifique générale, le protoplasma n'est pas la substance glutineuse homogène que l'on s'est complu à y voir, et la *théorie du sarcode* n'est plus guère autre chose qu'un aveu d'impuissance qui n'a plus qu'un intérêt historique. De nos jours, le protoplasma ne saurait plus être considéré, par définition, comme sans structure, *base physique de la vie,* dont les seules différenciations amènent la structure morphologique.

Il y a longtemps déjà que quelques auteurs ont essayé de s'insurger contre ces dogmes simplistes et ont avancé des opinions tendant à faire admettre que le protoplasma n'est pas la substance muqueuse que les doctrines courantes y voyaient. Ils ont assigné au protoplasma la structure réticulée, décrite

plus haut, formée de filaments entrecroisés et plongés dans le suc cellulaire (paraplasma de Kupffer).

Ils furent accablés sous l'indifférence générale ou même le dédain de tous ceux qui n'avaient pu voir ces faits. Leurs observations parurent longtemps non avenues et semblèrent devoir se perdre complètement pour la science.

Parmi les naturalistes réfractaires à ces idées nouvelles, il y a lieu de citer Bütschli, qui les a fortement combattues. Il explique les faits décrits par des apparences plus ou moins fortuites et par des phénomènes sans importance. Voici comment il s'exprime : « Il y a actuellement une tendance à accorder au protoplasma une structure plus compliquée qu'on ne l'a admis jusqu'ici. Kupffer, Heitzmann, Flemming et d'autres nous ont fait connaître une série de faits qui ne me paraissent toutefois pas aussi dignes de remarque qu'on le représente, ni aussi indépendants de ce qu'on savait avant. Il y a un passage graduel entre la présence de vacuoles disséminées dans le protoplasma de certains Protozoaires et l'existence du protoplasma complètement alvéolaire ou, ce qui est la même chose, réticulé. Ceci arrive lorsque les vacuoles ou alvéoles sont tellement abondantes que les parois plasmiques qui les séparent constituent un ensemble alvéolaire dont la coupe optique est un réseau. Le véritable élément mobile et vivant reste toujours ici le protoplasma homogène qui constitue les filaments muqueux. D'ailleurs, nous avons une foule d'exemples, chez de petites et de grandes Amibes, chez des organismes amiboïdes et beaucoup d'autres Rhizopodes, montrant que ce sont précisément les régions du corps qui présentent les mouvements les plus vifs, la couche corticale hyaline ou les pseudopodes larges ou fins, qui se montrent tout à fait sans structure et homogènes, tandis que, précisément, les portions protoplasmiques internes qui se distinguent par leur structure réticulée ou alvéolaire, ont la part la moins énergique aux manifestations motrices. »

Ces découvertes d'histologie fine étaient donc des faits sans

importance, pour cet auteur, ne changeant guère nos connaissances sur le *sarcode,* vers lequel existerait un passage graduel. C'étaient là, pour lui, des transformations séniles ou des phénomènes à peu près mécaniques, des vacuolisations jusqu'à un certain point accidentelles n'existant que dans certains cas, dues au développement, au sein du protoplasma le moins vivant, de vacuoles (dans le sens banal du mot) d'abord éparses, puis abondantes, et ne se montrant pas dans la substance réellement active.

Tel était l'état de la science lorsque des recherches particulières sur certains Protozoaires m'ont amené à m'occuper de cette question. L'exécution magistrale de toute idée subversive sur la structure du protoplasma faite par Bütschli et l'indifférence universelle du public scientifique, qui jugeait cette question plus ou moins insoluble, avaient plongé ces anciennes observations dans l'oubli le plus complet.

Par des recherches faites en 1880, j'ai cherché à mettre en évidence la véritable structure du protoplasma et la signification qu'elle comporte. Je n'ai, du reste, pas eu à me louer d'être entré dans une voie neuve et d'apporter quelque lumière sur un point si intéressant de nos connaissances scientifiques. La puissance des idées généralement admises est telle qu'à vouloir les heurter de front on risque de prêter à rire à ses dépens. Il est plus pratique de subir la tyrannie du milieu; il faut couler ses impressions dans le moule qui a servi aux nombreuses générations des temps passés; il faut admirer, comme elles, un peu de confiance et à l'aveugle; il faut avoir la foi qu'ils avaient et une naïveté de sentiments qui ne paraît cependant guère de mise, lorsqu'il s'agit de dogmes scientifiques. On a le plus grand tort de parcourir le domaine scientifique trop en sceptique, car tout le bénéfice des efforts qu'on a pu faire ainsi devient le partage d'autres. Tous ceux qui ont suivi, dans ces dix dernières années, l'histoire de la découverte de la structure du protoplasma savent que ceux qui l'ont mise sur pied et ceux qui en retirent le bénéfice moral ne sont pas les mêmes personnes.

J'ai montré que la constitution alvéolaire n'est pas l'apanage des tissus inertes, mais qu'au contraire c'est là une structure définie, indépendante des vacuoles ordinaires, qui existe partout et depuis le jeune âge. Si, dans certain cas, les alvéoles arrivent, en effet, à s'agrandir et à déterminer une structure réticulée plus grossière, ce n'est là qu'un état particulier de la structure alvéolaire qui ne saurait être comparé au développement de vacuoles ordinaires, d'abord rares, puis de plus en plus nombreuses. On a donc alors affaire à une évolution dans un sens particulier d'un phénomène normal et général, grâce à la transformation de logettes très petites et à parois épaisses en cavités plus grandes et à parois très amincies, dans les tissus dépourvus de mouvements propres.

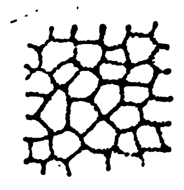


Fig. 2. — Protoplasma à vacuoles relativement vastes et polyédriques, à parois minces.

L'essence du phénomène avait été méconnue ; on n'en avait signalé que quelques manifestations, comme observations curieuses, sans en donner la vraie signification.

C'est à un moment où les anciennes observations paraissaient perdues, comme tant d'autres, et où personne ne semblait plus y songer, que mes recherches m'ont permis d'édifier une théorie de la structure du protoplasma que les observations récentes confirment actuellement dans ses points essentiels.

Fait digne de remarque, cette conception nouvelle a eu l'heur d'attirer l'adhésion de son premier adversaire, et la nouvelle théorie n'a, en effet, pas d'adepte plus ardent et y consacrant plus d'efforts que son ex-contradicteur.

Dans une de mes publications, datant de 1882, on peut lire : « En faisant récemment des recherches sur l'organisation de certains Infusoires, j'ai été frappé de la structure remarquable que présente leur substance constitutive. Leur protoplasma offre, dans toutes ses parties, l'aspect d'un réseau très fin et absolument continu de parties claires d'une grande minceur, qui circonscrivent de petits espaces plus sombres... les points

sombres ne sont autre chose que de petites cavités contenant de la substance protoplasmique plus fluide. En effet, leur examen direct ne montre jamais aucune communication entre ces vacuoles; d'un autre côté, quelle que soit la face par laquelle on observe le protoplasma en question, ces petites cavités se trouvent toujours entourées de minces parties de substance plus dense, plus réfringente et, partout, absolument continue. En faisant varier le point, on peut voir que ces vacuoles sont partout limitées par le réseau clair, et ce réseau, quel que soit le plan qu'on observe, ne présente aucune solution de continuité pouvant permettre aux vacuoles voisines de communiquer... Il était intéressant de rechercher si la structure protoplasmique des cellules des êtres plus élevés en organisation ne présenterait pas une disposition analogue... La structure du protoplasma des grosses cellules qui constituent le revêtement interne de l'intestin des cloportes rappelle nettement celle de la substance du corps des Protozoaires : leur protoplasma est aussi criblé d'une multitude de petites vacuoles séparées les unes des autres par de minces parties denses. L'énorme noyau qui se remarque dans ces cellules n'est pas, comme on l'admet généralement pour les noyaux, une vésicule à parois propres dans laquelle existerait un réseau de filaments renfermant dans ses mailles un liquide, le suc nucléaire; il présente une structure identique, celle du protoplasma de la cellule... Pendant la division cellulaire, les différentes parties qui entrent dans la constitution des cellules se comportent d'une manière spéciale. Ce phénomène (chez l'embryon de la truite) débute par l'apparition de lignes rayonnantes, au sein du protoplasma cellulaire, lignes qui s'étendent d'une étroite zone un peu plus claire entourant le noyau, à la périphérie de la cellule. Cette apparence est due à ce que les vacuoles de ce protoplasma se disposent assez régulièrement en séries rayonnantes, et ce sont leurs parois qui, se continuant de l'une à l'autre, présentent l'apparence de rayons. Au contraire, ces petites cavités alternent le plus

généralement entre elles de l'une à l'autre de ces files centrifuges, de façon que leurs cloisons transversales, peu épaisses, forment un ensemble irrégulier, assez peu apparent... » (*De la constitution du protoplasma. — Bull. sc. du Nord*, 1882.)

Les Bactériacées elles-mêmes, ces êtres élémentaires, au protoplasma desquels on a attribué une constitution absolument homogène, offrent une structure analogue, ainsi que je l'ai établi dès 1886, en y ajoutant cette remarque, que je crois importante, que les alvéoles qui s'observent dans leur substance se multiplient par division. De même aussi, j'ai vu, chez les Flagellés d'abord, chez les Ciliés et les Sporozoaires ensuite, une couche périphérique particulière, dite actuellement *couche alvéolaire,* découverte de nouveau par certains auteurs. Les fibres musculaires des Arthropodes peuvent être rangées dans le même cadre, avec un grande facilité. Le sarcoplasma y présente une structure spongieuse plus ou moins irrégulière, rappelant celle du protoplasma ordinaire et contenant des granulations interstitielles elles-mêmes hétérogènes. L'aspect analogue des fibrilles est d'autant plus remarquable que les travaux d'une foule d'histologistes ont poussé notre connaissance de ces éléments à un point tel qu'il semblait qu'on ne pût plus guère le dépasser. On retrouve là, cependant, une structure alvéolaire indubitable. Quoique la forme des fibrilles soit variable et difficile à bien déterminer, on y rencontre toujours des couches d'alvéoles qui, dans les zones sombres, sont allongées et constituées par deux séries superposées, tandis que, dans les zones claires, elles sont bien plus raccourcies.

La structure du protoplasma, tout en dérivant d'un point de départ similaire, se complique de manières diverses, plus que ne l'avaient fait pressentir les premiers travaux. L'apparence réticulée n'est que l'expression d'un état particulier et assez répandu de sa constitution qui peut offrir une foule d'autres aspects. C'est cet aspect spécial qui a surtout donné lieu à des interprétations plus ou moins contradictoires. La question de savoir si ce sont bien des vacuoles ou si c'est là un réseau,

dans le sens ordinaire du mot, se résout tous les jours par de nouvelles adhésions à la première de ces vues. Récemment encore, j'ai reçu, par lettre, l'adhésion d'un ancien adversaire de mes idées, M. le Dr Fabre-Domergue, que les faits ont amené à abandonner son ancienne manière de voir.

Dans les protoplasmas compacts, — c'est le cas de la plupart des éléments tout à fait jeunes, dont la structure est à un état de simplicité initial, — il arrive que les parois des loges soient relativement fort épaisses et les cavités très réduites. En ce cas, pour toute structure, on distingue une masse d'aspect homogène, contenant une foule de points sombres, ressemblant à des bâtonnets implantés dans une substance glutineuse. On ne saurait guère parler ici de structure vacuolaire ou alvéolaire, car les homologues des cavités présentent plutôt l'aspect de corpuscules solides. Cet état ne persiste que rarement. Généralement, il subit des transformations qui aboutissent à la constitution alvéolo-réticulée décrite plus haut. Les vacuoles s'agrandissent; leur contenu prend plutôt l'aspect d'un liquide, tandis que leurs parois s'amincissent. Aussi, dans les protoplasmas qui ne présentent pas une différenciation trop prononcée, on distingue généralement un réseau à mailles arrondies ou polygonales qui n'est, ainsi que je l'ai dit, que la coupe optique de petites logettes closes de toutes parts et contenant de la substance protéique d'aspect et de réfringence un peu différents. Les points nodaux, plus ou moins renflés — *microsomes* des histologistes modernes — ont un aspect grenu; ils correspondent, au moins en grande partie, aux granulations élémentaires des substances finement granuleuses des anciens auteurs. Dans cette charpente existent aussi de vraies granulations incluses, ou des gouttelettes graisseuses, et très fréquemment aussi le contenu des logettes, très coloré, se montre sous l'aspect de points sombres (enchylèmes), ressemblant à des granulations; dans les noyaux, on distingue des points nodaux chromatiques et des contenus alvéolaires achromatiques (nucléochylèmes).

Une évolution ultérieure peut amener la transformation des vacuoles dans des directions diverses. Tantôt cette évolution est simplement poussée à l'extrême; elle aboutit alors à la transformation des vacuoles en vastes cavités polyédriques, contenant un liquide clair peu colorable et séparées par des cloisons d'une grande minceur. Cet aspect rappelle un peu ce qui se voit, en anatomie végétale, dans les tissus subéreux ou médullaires, et la ressemblance est d'autant plus considérable que les parois vacuolaires prennent aussi un aspect comparable à celui des parois cellulosiques transformées.

Dans d'autres cas, les cavités vacuolaires peuvent encore devenir relativement grandes, mais sans que leurs parois atteignent la netteté, la minceur et l'aspect rigide cités plus haut. Celles-ci sont alors plus ou moins floues et, outre les points nodaux, on peut souvent voir encore, sur le trajet des filaments réticulaires, d'autres renflements indépendants de toute confluence des parois. Le protoplasma de ces renflements et d'autres analogues, quel que soit leur siège, est plus dense, un peu plus colorable et diffère d'aspect de celui qui forme le reste du réseau.

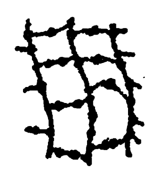


Fig. 3. — Protoplasma à grandes alvéoles, avec renflements sur les parois. La figure rend mal l'aspect flou de ces dernières.

La constitution du protoplasma peut subir encore bien d'autres modifications, dont voici quelques-unes.

Dans les couches tégumentaires de certains Flagellés, on ne voit plus un réseau réfringent simple, contenant du protoplasma plus ou moins différencié, réseau à mailles arrondies ou polygonales, toutes semblables, et présentant sur la coupe optique des filaments identiques; on trouve une constitution bien différente. Ainsi on rencontre dans les téguments de l'*Ambliophis viridis* ou des Euglènes, des rangées d'alvéoles qui, vues tangentiellement, apparaissent comme des logettes rectangulaires, disposées en files spi-



Fig. 4. — Téguments de l'*Ambliophis viridis*, vus de face et montrant des files de logettes rectangulaires, séparées par des fibrilles spirales, en forme de bandes.

rales et séparées par de minces trabécules; entre les files parallèles se voient d'épaisses lames protoplasmiques, sortes de fibrilles continues d'un bout à l'autre du corps. Les mêmes téguments, en vue sagittale, montrent d'épaisses lames concentriques, sortes de feuillets superposés, séparés souvent par des fentes qui sont elles-mêmes alors divisées par de minces trabécules; ces trabécules séparent l'une de l'autre les vacuoles parallélipipédiques d'une même file.

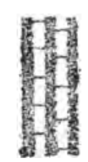


Fig. 5. — Coupe optique longitudinale des mêmes téguments. Les logettes qui constituent les fentes qui séparent les lames tégumentaires sont fort minces et correspondent aux trabécules minces de la fig. 4.

Dans l'exposé qui précède, je ne pense certes pas avoir épuisé le sujet. Des découvertes récentes nous font entrevoir bien d'autres dispositions, et nul doute que, si les histologistes modifient légèrement leurs méthodes, nous ne soyons appelés à constater de rapides progrès dans cette voie. En histologie, on recherche peut-être un peu trop les colorations nettes, pénétrant toute la masse du tissu en expérience, et des durcissements suffisants au moins pour que l'on puisse faire des coupes. C'est là tout ce qu'il faut pour détruire les fins détails de structure. Cette tendance générale à ne plus rechercher dans les tissus que les filaments et les corps rendus bien apparents par une technique colorante énergique et donnant des résultats frappants, mettant, par exemple, bien en lumière les bacilles, produit des résultats souvent médiocres. J'ajouterai, du reste, à cela, l'emploi des instruments optiques les plus en vogue, parmi lesquels je citerai le condensateur d'Abbé, qui noie toute structure dans un crépuscule lumineux pour ne faire saillir que les particules colorées. Enfin les liquides conservateurs détruisent ou diminuent les différences de réfringence, ce qui ne fait qu'aggraver le mal.

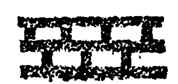


Fig. 6. — Coupe optique transversale des mêmes téguments.

Depuis 1881, époque à laquelle j'ai publié mes premiers résultats, la science a bien marché. D'anciens adversaires de toute structure protoplasmique en sont arrivés à l'admettre.

Aujourd'hui, la théorie de la structure du protoplasma n'a pas de plus chaud partisan qu'un de ses premiers adversaires, Bütschli. Cet auteur publie sur ces faits une longue série de recherches; il a été amené à cette évolution par des comparaisons faites entre l'aspect de certaines substances et celui du protoplasma structuré. Nous savons, en effet, que, dans certains cas, le protoplasma présente, jusqu'à un certain point, la constitution de la mousse de savon, dans laquelle des alvéoles à parois minces, formées par le liquide visqueux, contiennent de l'air. Les émulsions huileuses lui ont permis de reconstituer quelques-uns des aspects particuliers de la structure du protoplasma. C'est à peu près exclusivement sur ces expériences que sont basées ses vues. Sans pouvoir être effectivement qualifiées de recherches sur la structure du protoplasma, ces expériences ne manquent pas d'un certain intérêt, au moins au point de vue physique; elles jettent quelque lumière sur certains phénomènes d'osmose qui se constatent dans le protoplasma vivant. Mais, en réalité, ce sont là des résultats parallèles à la question. C'est ainsi que l'on reproduit les figures de la karyokinèse avec de la limaille de fer et des aimants sur une feuille de papier, sans qu'au fond ce fait ait le moindre rapport avec la division cellulaire. En fait, les efforts de Bütschli n'ont abouti qu'à des comparaisons d'une justesse souvent contestable, et ils n'ont pas d'autre valeur. Comparer une Méduse à une ombrelle, un Oursin à une pelote d'épingles, est-ce là en donner une idée quelconque? N'est-ce pas plutôt laisser le champ libre à toutes les notions nouvelles et justes? Bütschli s'appesantit sur une différence qu'il établit entre les émulsions et les mousses. C'est à celles-là, dont la substance fondamentale est tellement réduite qu'elle ne forme plus que de *minces lamelles* entre les gouttelettes incluses, c'est aux mousses dues à un mélange de liquides visqueux non miscibles, qu'il ramène la structure du protoplasma. Cette hypothèse exclut donc les tissus très jeunes, dont les vacuoles ont des parois épaisses; elle ne rend compte que d'une transformation

plus ou moins sénile. L'état représenté par les mousses, et qui serait général, n'est que le résultat d'une évolution spéciale avancée, seulement réalisé dans certains cas particuliers où les parois ont diminué progressivement d'épaisseur au profit des alvéoles. Le protoplasma n'est pas un mélange de deux liquides, puisqu'on trouve un passage graduel entre la paroi et le contenu vacuolaire, souvent comme si la liquéfaction n'était qu'un stade intermédiaire entre ces deux états. Du reste, entre les vacuoles à parois épaisses et celles d'aspect feuilleté, on trouve tous les intermédiaires.

A première vue, les expériences de cet auteur paraissent rendre compte de la fluidité de certains protoplasmas. La structure alvéolaire, décrite plus haut, ne saurait s'observer, en effet, que dans les tissus à structure stable et permanente. Il faut nécessairement autre chose dans les substances fluides. Mais ici encore les comparaisons de Bütschli me paraissent insuffisantes, et, à la première analyse, on peut remarquer que les mouvements du protoplasma en voie de circulation ne sont pas les mouvements d'une substance visqueuse, mais bien ceux d'une matière fluide paraissant céder à la pression des couches périphériques.

Je n'ai fait que peu d'observations directes sur le protoplasma fluide. Cependant, je l'ai observé sur un Foraminifère (1)

---

(1) J'ai donné la description du protoplasma de cet être en 1889, dans le *Bulletin scientifique du nord de la France et de la Belgique*. Les caractères de cet organisme sont assez particuliers pour qu'ils puissent intéresser les lecteurs des *Mémoires des Sciences physiques et naturelles*.

C'est un Rhizopode testacé, polythalame, marin, du groupe des Imperforés, tirant son origine du bassin d'Arcachon.

A son plus jeune âge, il paraît être constitué par une loge embryonnaire, ordinairement arrondie et pourvue d'une ouverture à laquelle fait généralement suite un canal latéral. Réduit à l'état de sphère simple, il présente une analogie frappante avec les œufs à micropyle. Puis, par une sorte de bourgeonnement de sa région orale, il constitue de nouvelles loges qui s'enroulent en spirales autour de la première. Ainsi se trouve constitué un petit individu à structure enroulée conchospiralaire, analogue à celle d'une foule de Foraminifères.

Mais bientôt on observe des phénomènes de ditaxisme poussés très loin et d'un caractère tout particulier. L'arrangement des loges qui s'était d'abord fait suivant la loi énoncée plus haut, ne tarde pas à se produire suivant une loi différente.

dans la substance fluide de son corps, où elle présentait une disposition qui rappelle des gouttelettes de liquide éparses dans un fluide. Dans ce cas particulier, ce sont des vésicules

L'enroulement devient irrégulier et il se constitue une ou plusieurs masses irrégulières, entortillées. Le phénomène se simplifie bientôt; les loges successives cessent de s'agglomérer, elles se redressent et se prolongent en une ligne plus ou moins droite, constituée par une chaîne d'articles dus à un phénomène de bourgeonnement terminal. La séparation des segments est apparente et due à la discontinuité de la coque elle-même.

Le tronc ainsi formé prend rapidement des caractères particuliers et exceptionnels chez les Foraminifères. On avait cru, jusqu'à présent, que les coquilles du type terminal ne s'accroissaient que dans une seule direction. Grâce à des dichotomisations plus ou moins abondantes s'ajoutant au bourgeonnement terminal, il se ramifie et prend un aspect arborescent, ramifié, bien différent de celui des autres animaux du même groupe. Au premier abord, la vue de cet ensemble rappellerait bien plutôt une Algue calcaire. Dans une foule de Rhizo-

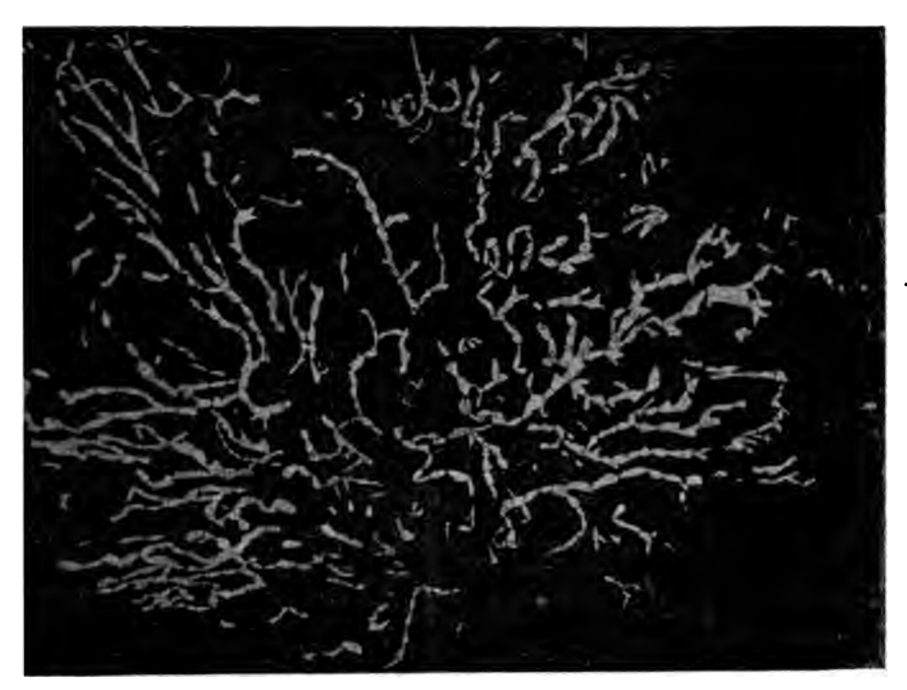


FIG. 7. — Foraminifère arborescent, d'après une photographie de M. Panajou.

podes, perforés ou imperforés, on a observé des tendances à un enroulement irrégulier, sans qu'on l'ait jamais vu poussé aussi loin.

Par la suite de cette évolution, les ramifications ultimes, les loges terminales

flottant dans un liquide granuleux, disposition qui permet la circulation. Cet agencement paraît fondamentalement différent des faits énoncés plus haut; il semble exister une profonde dissemblance entre le protoplasma stable et nettement alvéolaire et

---

qui, comme chez tous les Miliolides, sont peu adhérentes entre elles et se séparent très facilement, s'isolent les unes des autres et constituent des sortes d'individus autonomes plus simples que l'individu initial.

Ces nouveaux individus se multiplient beaucoup par eux-mêmes, tant par bourgeonnement que par division. Finalement, ils se reproduisent par les embryons dont l'évolution est esquissée plus haut : ce sont ces articles isolés qui constituent la forme la plus fréquente sous laquelle on rencontre ce Foraminifère. Par contre, les formes embryonnaires sont beaucoup plus rares que les individus de tout âge.

Les individus isolés ont la forme de coquilles lisses, allongées, assez épaisses et cassantes, calcaires et jamais sableuses, monaxiques, pylomatiques, à caractère amphistomien, mitigé par la présence de cloisons minces. Il n'existe aucune surface basale et l'épaisseur de la paroi est la même partout. Le pylome est situé à l'un des pôles d'un axe longitudinal fort développé; cette ouverture buccale est unique, un peu allongée en tube et sans piquants; les bords en sont cependant quelquefois ornés. L'axe principal est plus ou moins courbe, ce qui n'est pas un passage à la forme spirale, mais plutôt un reste de celle-ci. Les axes croisés sont à peu près égaux, de façon qu'il n'y a guère d'aplatissement; souvent on observe un renflement vers le milieu ou le bout de la coquille. Il n'y a donc pas là encore la proforme pyramidale amphitecte, ni la forme eudipleure, à symétrie bilatérale. Cependant l'eudipleurie est quelquefois atteinte par le recourbement du goulot.

Un Foraminifère, formé d'une chaîne d'articles, ne saurait guère être mobile; mais, malgré son immobilité, notre organisme n'est pas, à proprement parler, sessile. Son extrémité aborale est simplement engagée dans des masses mucilagineuses brunâtres, dans des détritus marins, ce qui constitue un mode de fixation peu stable. On trouve aussi ces individus englobés dans les draps marins, au milieu d'Oscillaires, d'Algues diverses, de débris confus plus ou moins muqueux ou granuleux, peuplés d'animaux inférieurs, qui se constituent au fond de la mer ou au fond et sur les parois des aquariums. Cette fixation est donc légère, peu stable; chez les jeunes, elle l'est encore moins.

A certains états, par son aspect extérieur, il se rapproche jusqu'à un certain point des Fabulaires, Hauerines, Triloculines, Vertebralines, Nubéculaires, etc. Tout en devant, certainement, être placé dans les Miliolides, il n'en paraît pas moins différer de cette famille par d'importants caractères; il se rapproche plus particulièrement du genre *Nubecularia,* sous certains de ses aspects.

Je résumerai donc ici, en quelques mots, les caractères de ce genre, pour permettre au lecteur de juger en connaissance de cause du degré d'affinité de ces formes.

Le genre *Nubecularia* (synon. *Serpula,* p. p. Sold., *Webbina,* p. p. d'Orb.), a été créé par Defrance, en 1825. (*Dict. Sc. nat.*, vol. XXV, p. 210.)

Dans les Bronn's Klassen u. Ordn. des Thierreichs. *Protozoa,* la caractéristique donnée de ce genre est la suivante :

Coquille calcaire, mais aussi en partie sableuse; surface basale large, fixée et

cette constitution du protoplasma fluide. Il paraît bien difficile de ramener ces deux structures à un type primitif commun.

Chez ce Foraminifère, le protoplasma cortical a conservé sa structure normale, à côté de son endoplasme fluide. Sont-ce

---

généralement sans paroi ou à paroi très mince. Polythalame. D'abord spirale, mais devenant bientôt irrégulière. Loges séparées par de simples rétrécissements de la paroi. Extérieurement, on ne voit d'ordinaire que peu d'indices de l'existence de loges. Quelquefois, il y a une sorte d'accroissement cyclique. Environ deux espèces vivantes ; depuis le Trias.

On voit que cette diagnose ne répond que fort peu et à aucun de ses stades à la description succincte du Foraminifère dont il est question dans ce Mémoire. En certains points, et non des moins importants, il y a des différences considérables.

Perrier complète cette diagnose en indiquant que les Nubéculaires ont leurs chambres incomplètement séparées par des cloisons incomplètes. Ces chambres se disposent d'abord en spirale; mais, comme l'animal est fixé, elles prennent ensuite une disposition quelconque.

Quant au *Nubecularia tibia* Park et Jones, qui est la forme avec laquelle on pourrait identifier les articles libres de notre organisme, Brady en donne la description dans le *Report on the Challenger exp.*, vol. IX, p. 135, pl. I, fig. 1-4. C'est un porcellané isomorphe du *Nodosaria*. Le test consiste en un petit nombre de segments ovalaires, piriformes, subcylindriques, quelquefois difformes, unis bout à bout, et, quand il est régulier, il présente une ressemblance plus ou moins

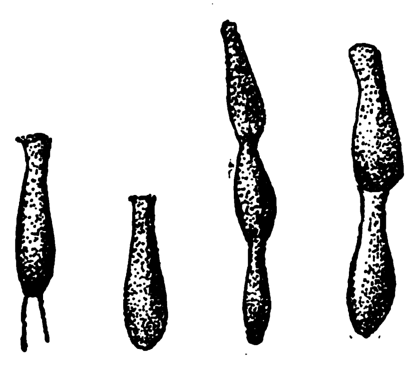


Fig. 8. — *Nubecularia tibia*, d'après Brady.

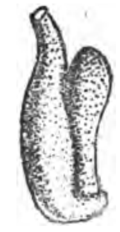


Fig. 9. — Le même, d'après Schlumberger.

considérable avec une mince dentaline. L'ouverture est un orifice terminal simple, arrondi, parfois bordé par une lèvre épaissie ou renversée. La coquille est opalescente ou opaque, blanche et imperforée; elle est souvent striée en travers. Presque jamais les spécimens n'avaient plus de trois segments atteignant, au plus, la longueur de 84 millimètres, ce qui est dû, peut-être, à la minceur de la paroi et à la finesse du tube stoloniforme.

là deux types de structure bien indépendants, ou l'une ne serait-elle qu'un dérivé de l'autre?

Dans l'état actuel de nos connaissances, il ne paraît guère possible de répondre d'une manière quelque peu affirmative à l'une ou à l'autre de ces questions. Certains faits cependant pourraient peut-être plutôt faire pencher la balance du côté de la dernière interprétation. En effet, les jeunes individus sont constitués tout entiers par une substance compacte finement réticulée, sans courants fluides. Au fur et à mesure de leur développement, leur substance centrale se fluidifie, et la voie que suit cette transformation présente un certain intérêt. Leurs logettes protoplasmiques augmentent de volume. Mais, en même temps, elles paraissent devenir indépendantes les unes des autres, de façon à pouvoir nager dans un liquide endoplasmique. Leur abondance peut être telle qu'elles sont quelquefois rendues polygonales par pression réciproque. Ces phénomènes se manifestent comme si les parois des vacuoles primitives se dédoublaient et comme si elles se transformaient en vésicules autonomes. S'il en était réellement ainsi, ce ne seraient pas là des formations nouvelles, mais bien les vacuoles primitives, séparées, devenues libres, et entre lesquelles un fluide plus ou moins abondant s'est placé.

De récentes observations de Bokorny établissent la possibilité de ce processus. Les cellules végétales contiennent presque toujours des vacuoles qui sont entourées de parois propres. Ces enveloppes ne sauraient être observées directement au microscope. Mais par l'emploi de diverses solutions, par exemple une solution de 10 0/0 d'azotate de potasse, on peut les détacher du protoplasma environnant par leur contraction, ce qui démontre bien leur existence en tant que vésicules autonomes. H. de Vries a nommé cette paroi vésiculaire *tonoplaste*. Elle est contractile et peu perméable aux liquides; de là, elle peut servir de réservoir au suc cellulaire et grandir sous la pression du liquide interne.

Sans attacher à ce qui précède d'autre valeur que celle

d'une interprétation, j'ajouterai cependant quelques observations qui viennent confirmer la probabilité déjà établie par les faits cités plus haut.

Ces observations portent sur les vésicules endoplasmiques elles-mêmes. Leur étude décèle une structure particulière. Elles paraissent pourvues de parois plus denses, entourant une substance plus fluide et quelquefois un peu granuleuse. Traitées par l'ammoniaque, leur mode de disposition, à certaines nuances près, est celle du protoplasma. Elles se gonflent un peu et pâlissent. Si le protoplasma disparaît progressivement, ces vésicules pâlissent lentement d'abord jusqu'à ce que, brusquement, on ne les voie plus. Ce fait corrobore l'existence d'une couche périphérique plus résistante, ralentissant l'action du réactif, et à la destruction de laquelle succède, à peu près instantanément, celle du protoplasma interne plus fluide.

En résumé, chez certains organismes, on trouve au sein d'un protoplasma granuleux et fluide de petites sphères vésiculaires ordinairement arrondies, quelquefois polygonales par pression réciproque et accolées, constituées par une paroi dense contenant un fluide homogène ou granuleux. Lorsque le corps est écrasé, ces éléments saillissent souvent par groupes complexes, agglutinés par la substance interstitielle. Cette constitution peut permettre de comprendre la fluidité du protoplasma interne de ces êtres, coexistant avec des éléments figurés. Les vésicules pourraient être morphologiquement comparables aux logettes de la substance protoplasmique des espèces à endoplasme non fluide, dont elles dériveraient directement par dédoublement des parois. Ainsi que je l'ai montré autrefois, chez certaines espèces, à mesure que l'animal avance en âge, le nombre des vésicules internes augmenterait aux dépens des logettes ectoplasmiques qui diminuent constamment; elles finissent par constituer la presque totalité du corps. Aussi bien chez les formes dépourvues de liquide interstitiel que chez celles qui en possèdent, toute la substance du corps,

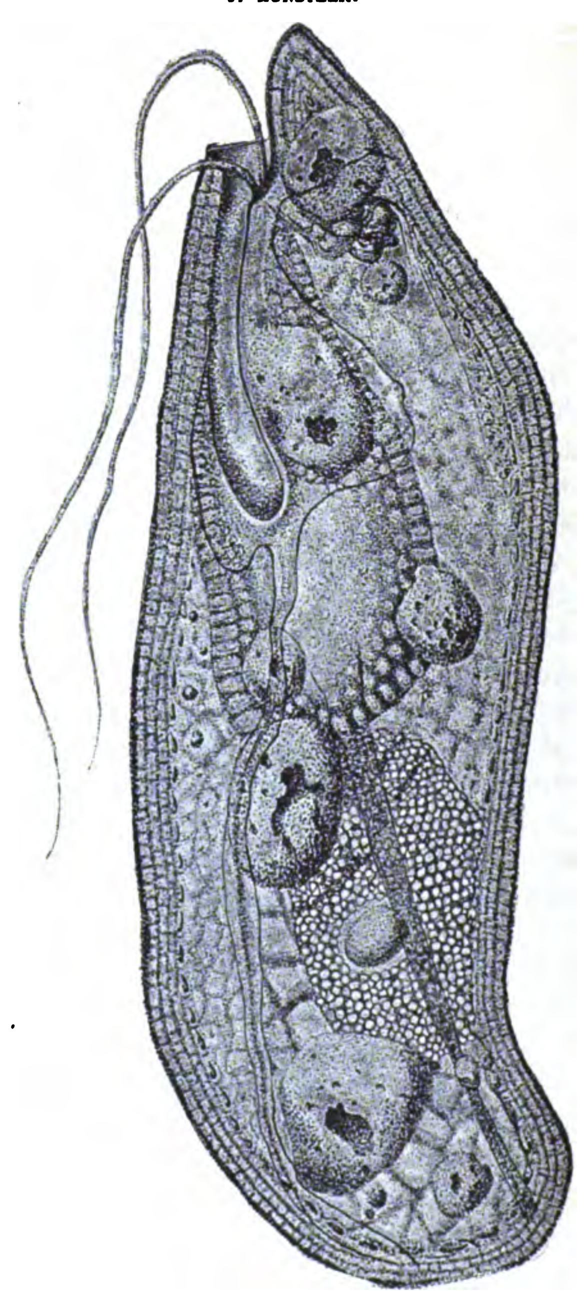


Fig. 10. — *Cryptomonas curvata* montrant la structure alvéolaire de sa substance.

de finement ponctuée qu'elle était, se transforme d'après ce procédé, et on voit alors un protoplasma d'aspect réticulé, ou un ensemble de vésicules, enveloppé d'une cuticule, ou mieux d'une couche alvéolaire surperficielle.

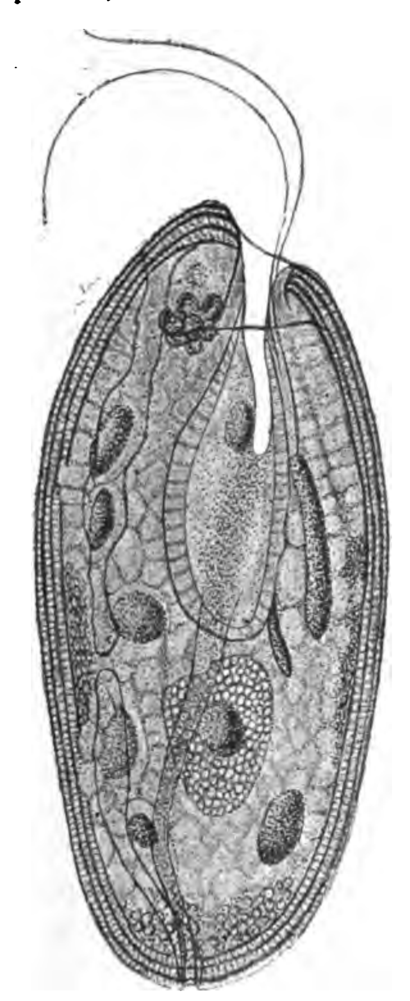


FIG. 11. — *Cryptomonas Giardi.*

Il est un certain nombre de faits de structure du protoplasma vers lesquels l'attention des naturalistes ne s'est jamais fixée. Nous savons que les téguments de certains Flagellés sont constitués par la réunion de lames concentriques entre lesquelles se trouvent des fentes fort minces, divisées en logettes. D'après les vues précédentes, ces alvéoles répondent aux vacuoles protoplasmiques ordinaires, tandis que les lames sont des parois tangentielles épaissies, dont la plus superficielle est la cuticule. Cependant une étude attentive de cette couche cuticulaire la montre en coupe optique, comme légèrement hétérogène. Ses deux faces sont parallèles, et cependant elle produit l'impression d'une sorte de chapelet moniliforme, d'une rangée de petites perles disposées en une couche unique. Peut-être cette apparence offre-t-elle quelque parenté avec les renflements sombres, signalés plus haut, sur les trabécules des grandes alvéoles internes.

Ainsi, le protoplasma présente une structure fondamentale

particulière. Sa substance est constituée par un mélange régulier de parties fluides et de parties moins aqueuses, les premières remplissant de petites cavités circonscrites par les secondes. De cette manière d'être dérivent une foule de modifications, d'aspect souvent peu explicable. Dans cet ordre d'idées je citerai, par exemple, les structures fibrillaires de certains éléments.

Nous avons vu que le protoplasma fluide paraît dériver du protoplasma stable par une dissociation régulière en sphérules qui présentent une partie centrale aqueuse, entourée d'une mince enveloppe dense, résultat du dédoublement de la substance compacte qui, dans les tissus ordinaires, sépare les vacuoles. Ce fait pourrait faire admettre que le protoplasma qui constitue ces substances peut être considéré comme formé par la réunion d'une immense quantité de sphérules protéiques d'une extrême petitesse, accolées entre elles pour former la matière compacte. Ces sphérules seraient constituées par une portion périphérique plus réfringente, qui entoure du protoplasma central plus riche en eau et souvent granuleux, intimement accolées et à autonomie plus ou moins nette ou confuse; leur existence est l'objet d'une hypothèse que j'ai publiée dès 1881.

Ce n'est, du reste, pas là la seule hypothèse analogue qu'ait à enregistrer la science. Mais je puis dire que la plupart des vues publiées ne reposent que sur des suppositions hypothétiques et non sur l'observation directe d'éléments visibles et nets.

Le philosophe anglais H. Spencer admet des *unités physiologiques* de constitution hypothétique et occupant une situation intermédiaire entre l'unité morphologique, la cellule et la molécule chimique. Ce seraient des particules vivantes d'une infinie petitesse, susceptibles de se reproduire par division, et les corps vivants seraient l'ensemble constitué par la réunion de ces unités.

Darwin, dans son hypothèse de la pangenèse, admet aussi l'existence de pareils corpuscules, qui auraient la valeur de petits germes, ayant la propriété d'amener l'hérédité et de

déterminer la production des cellules. Mais il ne parle pas de la part que ces éléments peuvent prendre à la constitution de la matière vivante.

Hugo de Vries croit aussi à l'existence d'infimes unités vivantes, les *pangènes,* pouvant se multiplier par division et rappelant les germules de Darwin.

Weismann pense que les molécules organiques sont complexes, formées par la réunion de molécules chimiques et constituant des unités vivantes d'une infinie petitesse, les *biophores*.

Les hypothèses précédentes sont d'ordre purement spéculatif. La suivante est, en partie, basée sur l'observation.

Béchamp pense que toute substance vivante est formée par la réunion d'un nombre immense de granulations répandues dans une matière intergranulaire plus ou moins abondante. Il fait jouer à ces granulations, ses *microzymas,* un rôle considérable. Il pense que ce sont là des sortes d'organismes vivants, autonomes, réunis en colonie pour former le corps de tous les êtres. Sous l'influence de causes diverses, un certain nombre d'entre eux pourraient devenir libres, se développer et constituer les germes des maladies, décrites comme des Bactéries pathogènes diverses, qui peuvent amener alors la désagrégation de la collectivité entière, c'est-à-dire la mort de l'individu composé. Cette mort ne serait pas réelle, mais apparente, puisque les éléments du corps primitif continueraient à vivre, en grande partie, et ne seraient autre chose que les Bactéries déterminant la pourriture. Ainsi serait réalisée une sorte de métempsycose; il n'y aurait pas de mort effective et les êtres se transformeraient incessamment les uns dans les autres. Telle qu'elle est présentée, cette hypothèse constitue un contresens biologique, compréhensible de la part d'un chimiste habitué à assister aux transformations et aux dédoublements continuels de la matière, mais qui, de la part d'un naturaliste, constituerait une faute grave. Tous les êtres vivants, y compris les Bactéries, présentent une évolution déterminée et propre; ils naissent d'êtres semblables à eux et en reproduisent d'autres identiques.

Béchamp a probablement vu, plus d'une fois, de véritables sphérules protoplasmiques, et, quand il affirme que tout protoplasma se décompose en corpuscules, il peut avoir raison. Mais son tort, c'est d'accorder à ces corpuscules la valeur morphologique d'une Bactérie, ce qui est la partie de son hypothèse sur laquelle il attache le plus d'importance; la constitution intime du protoplasma en elle-même semble le laisser fort indifférent. De plus, la sphérule n'est pas une granulation placée dans un liquide. Il est très probable que Béchamp n'a jamais reconnu la sphérule dans les tissus mêmes et qu'il ne l'a vue qu'après leur désagrégation. Au sein des tissus, il la confond avec la vacuole centrale; celle-ci contient souvent un granule; il est à présumer que c'est cette granulation, produit de sécrétion de la sphérule, qui constitue assez souvent son microzyma.

Dans mon hypothèse, j'envisageais la sphérule comme un élément anatomique analogue à la cellule, mais d'un ordre inférieur; comme une unité morphologique réelle, jouissant d'une puissance d'évolution propre, capable d'assimiler, de s'accroître et de se diviser, au même titre que toutes les unités vivantes connues, qui toutes possèdent ces propriétés. Par leur réunion, les sphérules constituent le protoplasma qui est — ou non — divisé en cellules qui peuvent donc être comprises comme des sortes de tissus de sphérules. Au point de vue théorique, l'existence de celles-ci est nécessaire, car la cellule est trop complexe pour qu'on puisse expliquer par elle les fonctions élémentaires de la vie; d'un autre côté, les propriétés physiologiques primordiales doivent forcément être liées à des organites et ne sauraient être attribuées ni aux atomes, ni aux molécules. Malgré leur caractère élémentaire, ces organites présentent déjà une foule de différenciations, aussi variées que leurs fonctions elles-mêmes et que la structure, les propriétés et les particularités des cellules qu'ils constituent; ils diffèrent ainsi par leur structure, leur aspect, leur complexité, la constitution de leurs molécules, etc., de façon que leur nombre doit être, en quelque sorte, illimité. Au début, ils

ont dû exister isolés, à l'état d'êtres libres et pouvoir se reproduire par division, après nutrition et accroissement préalable. Si l'on admet la vue universellement répandue et analogue que les êtres qui ne présentent pas de cellules sont unicellulaires, c'étaient donc là des êtres *unisphérulaires*, devenus plus tard *plurisphérulaires* (Bactériacées). On pourrait aussi admettre que les structures sphérulaire ou cellulaire n'existent pas partout, et l'on aurait des organismes *acellulaires* ou *asphérulaires*, avec cette différence que la sphérule est bien plus répandue que la cellule, de telle sorte que les êtres unicellulaires sont toujours *plurisphérulaires*. Les premières espèces sphérulaires étaient, sans doute, d'une simplicité primitive, tandis que les suivantes se sont déjà montrées plus compliquées. Les propriétés nouvelles, acquises par l'évolution, peuvent être considérées comme *historiques*, et les éléments qui les possèdent ne sauraient dériver que d'éléments semblables à eux. Les sphérules constitueraient le premier degré de structure du protoplasma, appréciable par nos moyens d'investigation. Si l'on poussait l'analyse plus loin, il est probable qu'on toucherait directement à la constitution chimique, que l'on arriverait à la molécule. Cette molécule, étant donnée la complexité de composition chimique du protoplasma, présente un volume relativement très considérable; on peut admettre que ses dimensions se rapprochent d'un millionième de millimètre de diamètre et que l'atmosphère d'eau qui sépare les unes des autres les différentes molécules constitutives du protoplasma présente une épaisseur analogue. Ce serait l'ensemble de semblables molécules qui constituerait les sphérules qui, elles-mêmes, forment les cellules [1].

[1] Dans ce chapitre, certaines vues que leurs auteurs pensent tout à fait nouvelles, basées sur des observations spéciales de quelques naturalistes, tels que Fayot et d'autres, ne sont pas examinées. Les particularités signalées ne doivent, en effet, pas être classées comme des faits de structure proprement dite du protoplasma, mais bien plutôt comme des différenciations particulières, dont l'examen trouvera sa place dans un autre mémoire, en même temps que celui de la genèse et de la signification des différents états fibrillaires, si souvent signalés dans ces dernières années.

II

Division cellulaire.

La division cellulaire est le mode de reproduction asexuelle de la cellule. Elle constitue le mode de propagation unique de cet élément (division, bourgeonnement).

Toutes les cellules et tous les tissus du corps des animaux dérivent de la division répétée de l'œuf. Ces divisions sont généralement comparées à la reproduction asexuelle des Protozoaires, avec cette différence que, chez ceux-ci, les produits de la division s'isolent, tandis que les cellules des Métazoaires restent unies en tissus.

La division peut porter sur la totalité de l'élément considéré ou seulement une de ses parties. Le règne organique nous fournit une foule d'exemples de multiplication du noyau sans que le protoplasma y prenne part. Par exemple, chez les Opalines, la *Lieberkühnia* et d'autres, ce phénomène peut s'observer.

D'un autre côté, il peut arriver que ce soit le protoplasma qui se divise en plusieurs parties, alors qu'il n'existe qu'un seul noyau. Des exemples de ces faits sont faciles à trouver chez les Grégarines, beaucoup de Polythalames, où il y a moins de noyaux que de parties.

Le synchronisme entre la division du noyau et celle du protoplasma est cependant à peu près général, et chez les êtres supérieurs il paraît complet, ce qui aboutit à la constitution d'éléments uninucléés (1).

---

(1) Certaines substances chimiques, telles que le chloroforme et l'ammoniaque, ou bien encore l'hydrogène et l'acide carbonique, ainsi que l'a montré Demoar, arrêtent les mouvements du protoplasma, sans exercer la même action sur le noyau en voie de division, ainsi que cela se voit chez le *Tradescantia*. Mais la

La division cellulaire affecte deux aspects principaux : la *division directe* et la *division indirecte.*

La division directe est la moins fréquente; elle s'observe chez certains êtres inférieurs ou dans les cellules migratrices des organismes plus élevés. Elle paraît être l'apanage des organismes les plus simples ou des éléments les moins différenciés.

Dans les cas les plus simples, le nucléole s'allonge en biscuit à la cuiller et se divise; puis le noyau se partage aussi, et enfin le protoplasma.

D'autres fois, par exemple chez le *Dactylosphœra polypodia,* on voit aussi le nucléole se diviser d'abord, après allongement, puis étranglement. Puis des bourgeons se constituent à la surface du noyau, qui se pédiculisent, prennent un nucléole et s'isolent pour former des noyaux nouveaux. Finalement, le protoplasma se partage en autant de bourgeons qu'il y a de noyaux, qui se séparent aussi après pédiculisation. Ce processus rappelle donc beaucoup le bourgeonnement.

Ranvier a fait de très intéressantes observations sur ce mode de division. Chez le Triton et l'Axolotl, il a vu les noyaux des globules blancs de la lymphe, pressés, maniés et remaniés, comme une pâte molle, par les contractions du protoplasma, offrir une foule de formes sous cette pression, puis finir par se diviser. Ces observations expliquent la forme bourgeonnante de ces noyaux.

Ces divisions ont toujours pour point de départ la division du nucléole, et elles paraissent commandées par ce corpuscule. Il peut cependant arriver, par un manque net de synchronisme, que son impulsion soit insuffisante pour déterminer la division du noyau. J'ai constaté nettement ce fait chez certains

---

membrane cellulaire ne se forme alors pas, ce qui paraît bien montrer que la division du corps protoplasmique est due au protoplasma lui-même, mais aussi que la division nucléaire en est indépendante, grâce à l'action des centrosomes. Cela démontre aussi que le fuseau achromatique, ainsi que je l'ai dit depuis longtemps, est d'origine nucléaire. Il paraît donc y avoir une sorte d'indépendance fonctionnelle entre le noyau et le protoplasma.

Protozoaires *(Cryptomonas ovata, Phacus pleuronectes)*, et il serait facile de multiplier les exemples.

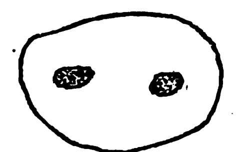


Fig. 12. — Noyau à deux nucléoles des *Cryptomonas curvata (major)*.

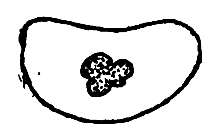


Fig. 13. — Noyau de *Cryptomonas ovata* montrant quatre lobes inégaux.

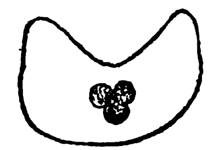


Fig. 14. — Noyau du même présentant trois lobes.

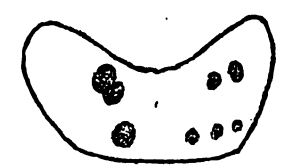


Fig. 15. — Noyau du même montrant plusieurs nucléoles de dimensions différentes.

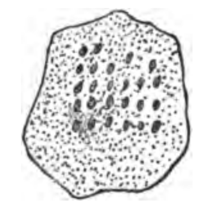


Fig. 16. — Noyau de *Phacus pleuronectes*, contenant un grand nombre de nucléoles en files.

La *division indirecte* est connue sous des dénominations diverses, *karyokinèse, cytodiérèse, mitose*, etc. Les naturalistes qui accordent un rôle prépondérant au noyau l'appellent karyokinèse, tandis que ceux qui y voient surtout un phénomène protoplasmique préfèrent l'expression de cytodiérèse. Dans ce mode de bipartition, qui s'observe chez les éléments fixes, le noyau ne se divise pas simplement; sa substance subit des transformations spéciales. Les phénomènes nucléolaires me semblent cependant encore le point de départ de tout le processus; mais la manière dont le nucléole se comporte est à la fois moins simple et moins facile à observer.

Ce processus, comparé au précédent, était d'abord caractérisé par la croyance que le noyau primitif disparaissait et que deux noyaux filles se régénéraient par une sorte de genèse nouvelle au sein du protoplasma. Cette vue était basée sur l'observation du phénomène à l'état vivant, où, en effet, il est fort difficile de voir ce qui se passe. Mais bientôt on a découvert

vert que cette disparition n'était qu'apparente, et qu'elle dissimulait un ensemble de phénomènes des plus complexes.

Le schéma de la division indirecte, tel qu'il est établi aujourd'hui, présente les caractères saillants suivants.

Au début du phénomène, le nucléole pâlit et disparaît plus ou moins rapidement. Le processus exact de cette disparition n'est pas connu. Peut-être n'est-ce là qu'un pâlissement et non une disparition réelle. On admet vaguement que sa substance s'élimine par une sorte de fusion ou de résorption dans la matière constitutive du noyau, pour nourrir, en quelque sorte, les anses chromatiques.

Dans le protoplasma cellulaire apparaît un corpuscule particulier, très difficile à voir, de structure et de volume variables suivant les cas considérés, le *centrosome.*

L'origine et la valeur morphologique de cet élément sont des plus controversés. Pour les premiers auteurs, c'est là un organite permanent de la cellule, organite dont l'existence a été méconnue. Telle est l'opinion de Van Beneden et Neyt et d'une foule d'autres. On a, en effet, souvent rencontré des centrosomes dans des cellules à l'état de repos, ce qui a entraîné l'opinion de la masse des naturalistes. Très récemment encore, Moore en montre dans des cellules à l'état de repos, sous forme d'une masse globuleuse, d'où irradient des rayons plasmiques et ressemblant à s'y méprendre à certains noyaux vitellins du Géophile.

D'après des recherches plus récentes, les centrosomes ne séjourneraient pas constamment dans le protoplasma. Ces éléments n'apparaîtraient qu'au moment de la division pour servir de centres directeurs à ce phénomène, avec lequel ils naîtraient et disparaîtraient et dont ils sont les agents les plus importants.

Chez les Salmonides, les choses ne semblent pas se passer ainsi. Il paraît plutôt — quoique le fait soit bien difficile à observer et à bien établir — que le centrosome n'est autre chose que le résultat de la division du nucléole primitif au

sein du noyau. Chez ces Poissons, le nucléole est très petit. Dans certains cas, il paraît s'allonger, s'étrangler, pour finir par se diviser en deux nucléoles secondaires, très près de la membrane nucléaire. Quelquefois même, par des divisions répétées, il semble se former trois ou quatre de ces corpuscules. L'un de ces nouveaux éléments, le proximal, paraît pâlir progressivement et disparaître par résorption, tandis que l'autre, le distal, repousse devant lui la paroi du noyau, la perfore, ou s'entoure peut-être de la portion correspondante de celle-ci, et devient le centrosome. S'il en est ainsi, ce n'est donc pas le nucléole primitif qui dirige la division. Je dois, toutefois, ajouter que j'ai, à diverses reprises, observé des symptômes de cet exode sans pouvoir relever aucune trace de division préalable, tandis que dans un cas il m'a au contraire paru que les deux moitiés, issues de la division du nucléole, sortaient du noyau par des points différents de la membrane.

Julin pense que le nucléole se résorbe, au début de la division, dans la charpente chromatique du noyau; puis que le centrosome se forme, dans le corps cellulaire, aux dépens de tout ou au moins d'une partie de la substance de ce nucléole. Cette opinion est basée sur les réactions analogues de ces deux corps vis-à-vis des réactifs colorants. Il fixe les éléments par le liquide de Flemming et les colore par la méthode de triple coloration (safranine, violet de gentiane, orange). Ce procédé établit un contraste net entre la chromatine, d'une part, et les nucléoles et les centrosomes, d'autre part. La chromatine devient rouge, pourpre ou violette, coloration due à la gentiane. Les nucléoles et les centrosomes sont rougeâtre pâle ou rouge brunâtre pâle, grâce à l'orange. Il y a donc des différences de réaction entre la chromatine et ces corps, qui se comportent comme la paranucléine ou pyrénine. Après la division, le centrosome rentre à l'intérieur du noyau, où il se résorbe. Puis, aux dépens d'une partie de la chromatine jeune du noyau entrant au repos, il se régénère, contre la membrane nucléaire, un nouvel élément paranu-

cléinien, le nucléole, qui se colore comme le centrosome. Le centrosome ne persiste généralement comme tel, pour provoquer une nouvelle division, que quand, entre deux mitoses, il n'existe pas de phase de repos intermédiaire, comme c'est le cas des deux divisions consécutives de maturation de l'œuf, ou quand cette phase de repos est tellement courte que les cellules filles s'accroissent peu ou point, comme c'est le cas pendant les premières phases de segmentation de l'œuf.

Le centrosome existe aussi chez les Protozoaires, et Guignard a établi sa présence dans la cellule végétale.

La constitution du centrosome est encore insuffisamment connue, et les descriptions qu'on en donne sont fort peu concordantes. Pour la majorité des observateurs, c'est un corpuscule globulaire auquel ils n'assignent aucune strûcture déterminée, tandis que d'autres y reconnaissent un nodule central, entouré d'une zone corticale. Le corpuscule central est le centrosome proprement dit, et la zone périphérique enveloppante, contenant ce corpuscule, correspond à la *sphère attractive* de Van Beneden. Le corpuscule central ou *zone médullaire* de Van Beneden peut être constitué par un amas de granulations, ou bien n'être pas visible, et l'on perçoit alors cet élément sous l'aspect d'une sphère claire et homogène.

Le centrosome est une portion du nucléole, formée par la division de celui-ci, et la couche corticale n'est autre chose que la zone claire que j'ai déjà signalée dans diverses formes animales et qui entoure normalement le nucléole de ces êtres.

Mais à cela ne se borne pas la complication de cet organite. Tout autour de la zone corticale se voit très fréquemment une masse protoplasmique réticulée ou granuleuse, dans laquelle il est, le plus souvent, excentriquement placé. Cette masse est l'*archoplasma* des auteurs, plus correctement dénommée, avec Benda, *archiplasma*. Elle ne semble être autre chose qu'une portion du réseau achromatique du noyau, emportée avec le corpuscule nucléolaire, lors de l'espèce de division nucléaire à laquelle celui-ci doit son exode. L'archiplasma

peut être plus ou moins volumineux; il est souvent peu visible et peut même paraître ne pas exister. C'est un amas de protoplasma, souvent grossièrement granuleux, qui existe aussi chez certains Protozoaires.

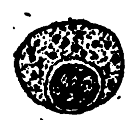


Fig. 17. — Schéma d'un élément directeur avec son centrosome, entouré d'une zone claire et d'une couche archiplasmique.

Une fois sorti du noyau, l'élément migrateur s'étale souvent à la surface de ce corps et se moule sur son contour extérieur. Les choses se passent comme s'il avait à surmonter une certaine résistance de la part du protoplasma cellulaire. Il arrive ainsi à présenter fréquemment la forme d'un croissant à surfaxe convexe périphérique et à surface concave proximale. D'ailleurs, il ne reste pas longtemps indivis

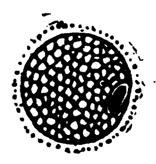
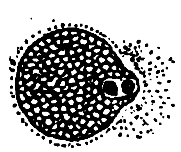
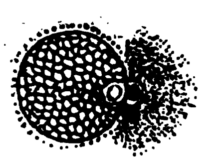
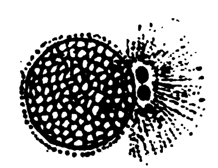
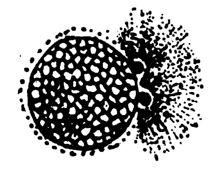
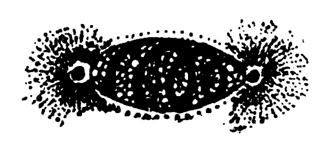







Fig. 18. — Stades théoriques du mécanisme de la division mitotique. On voit d'abord le noyau, avec son réseau, dont le nucléole s'allonge pour se diviser; puis exode et division du centrosome, suivie de la division des sphères attractives; enfin, stade du spirem.

et ne tarde pas à se partager en deux moitiés qui s'éloignent l'une de l'autre, en cheminant dans le périplaste *(monoplaste)*, pour se rendre aux deux pôles opposés du noyau. Leur nouvelle position détermine le futur plan de division de la cellule qui sera perpendiculaire à la ligne qui joint leurs centres.

Les éléments du noyau s'orientent rapidement par rapport à ces corps. — Les deux organites de nouvelle formation

correspondent aux périplastes filles *(diplaste)* de Vejdovsky ou aux sphères attractives de Van Beneden.

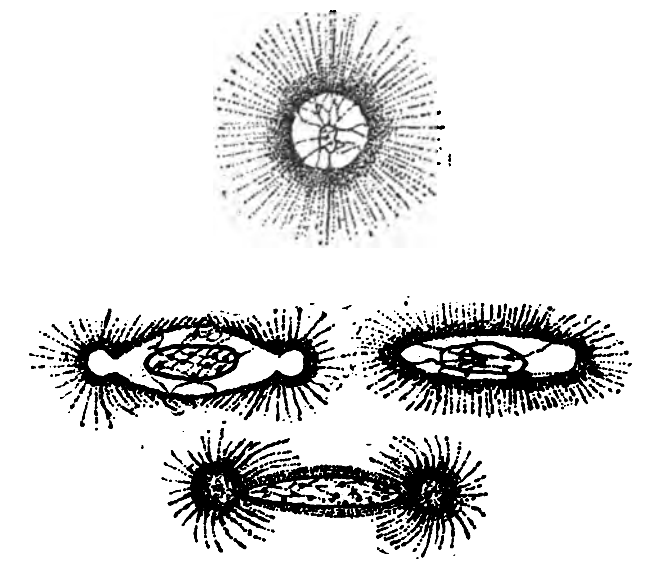


Fig. 19. — Transformation du périplaste (monoplaste) en fuseau et en périplastes filles (diplastes).

La manière précise dont la division du centrosome s'opère est encore peu étudiée.

Pour certains observateurs, cette division est un étranglement pur et simple, tandis que pour d'autres il y a là un processus assez compliqué.

Le phénomène débuterait par la bipartition du nodule central; puis l'enveloppe s'organiserait en un certain nombre de corpuscules allongés, dits *bâtonnets primaires*. Ces derniers éléments ne tarderaient pas à se fendre, suivant leur axe longitudinal, en *bâtonnets secondaires*, qui se séparent les uns des autres et vont former deux amas correspondant aux deux moitiés issues de la division du corpuscule central.

Ces différents stades ne sont pas faciles à retrouver chez les Salmonides. La division porte d'abord sur la masse interne; l'espace central, d'aspect plus clair et vésiculeux, semble se

dédoubler, de façon qu'on perçoit l'existence de deux parties analogues dans le même corpuscule qui, pendant ce temps, prend l'aspect d'un fuseau strié longitudinalement. Puis se produit un étranglement externe et un allongement suivi d'un étirement de la couche périphérique, qui se fait souvent de telle manière que, sans doute en raison de sa ténacité, elle s'étire en un filament plus ou moins long, reliant les deux bouts renflés. Ce processus paraît, du reste, être le même dans la division du nucléole primitif. — Ces corps, étant capables de se diviser, sont bien des éléments morphologiques spéciaux.

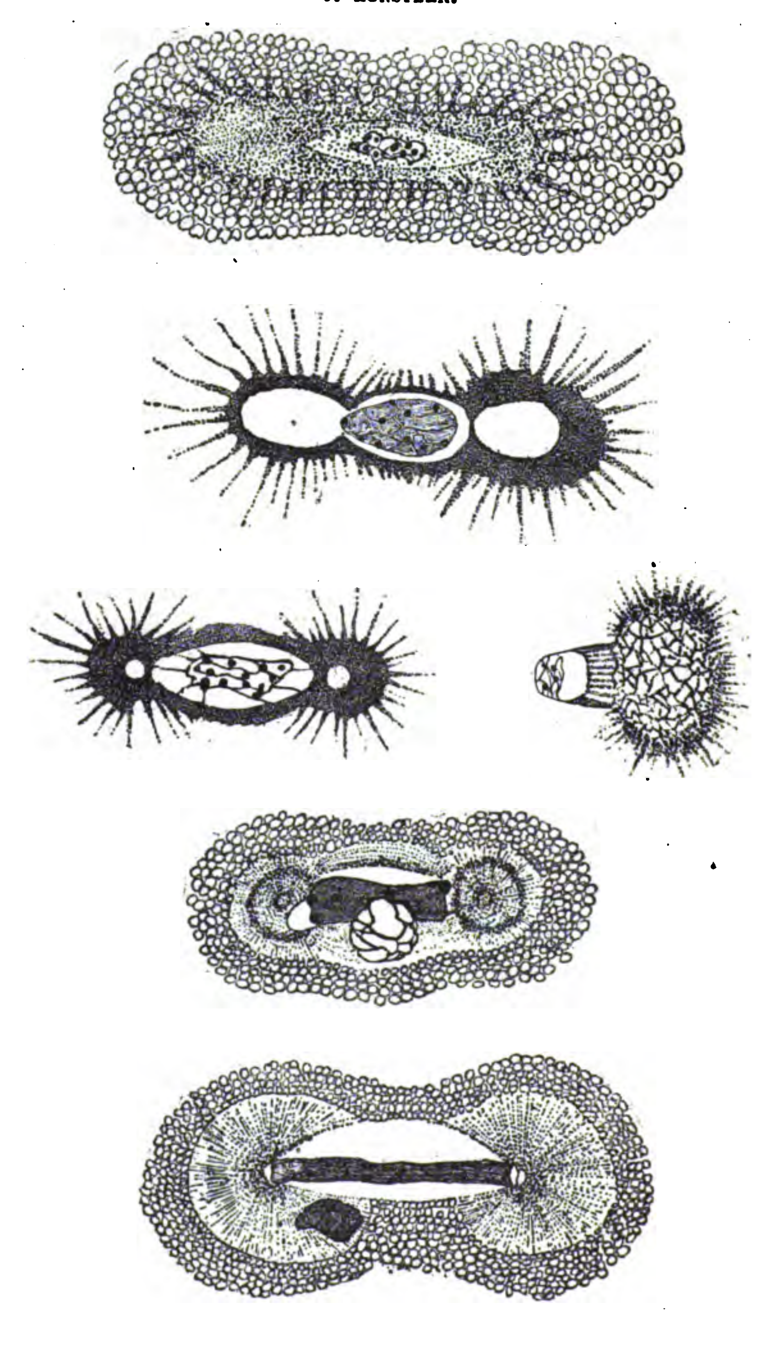
En se séparant l'un de l'autre, les deux centrosomes resteraient unis, d'après Julin, par des granulations protoplasmiques, disposées en un faisceau de filaments qui deviendrait le futur faisceau central ou axial du fuseau de division.

Au moment où le centrosome, sortant du noyau, pénètre dans le protoplasma, il se manifeste un phénomène particulier. Au sein de celui-ci se voient des lignes irradiées formant un ensemble étoilé, dont cet élément est le centre, et qui, d'abord courtes et peu visibles, s'accentuent progressivement et vont s'étendre jusqu'à la limite du corps cellulaire. Le figure ainsi formée constitue un aster protoplasmique, dû à une action particulière des centrosomes sur le protoplasma. Les expériences de Bütschli ont nettement confirmé et donné une base expérimentale à la théorie de la production de ces figures rayonnantes, que j'ai publiée en 1882 et que j'ai rappelée dans le chapitre précédent. Elles sont dues au raidissement des parois latérales des alvéoles du protoplasma, qui se continuent en séries rayonnantes jusqu'aux limites de l'endoplasme. On les considère quelquefois comme l'expression de phénomènes de mouvement (?). Déjà avant la division, lorsque le noyau paraît encore à l'état de repos, il n'en exerce pas moins une certaine action sur le protoplasma, qui montre déjà un vague rayonnement analogue.

Le centrosome paraît exercer, suivant les cas, son action avec plus ou moins d'énergie. Il peut arriver que cette action

soit très limitée, ou, au contraire, qu'elle soit des plus énergiques et qu'elle s'étende à tout le protoplasma. La modalité de son influence varie aussi : si, en effet, son résultat est de provoquer généralement des lignes rayonnantes, je n'en ai pas moins remarqué, quelquefois aussi, une tendance à la formation de couches concentriques. Mais ce cas est rare et ne se remarque guère chez des éléments très actifs. Son action sur la sphère qui l'enveloppe est aussi assez variable; sa division a, dans la règle, pour suite celle de cette sphère. Mais on peut aussi rencontrer deux centrosomes dans un seul archiplasma (Van Beneden, Flemming, Kölliker, O. Schultze, Van Bambeke, Van der Stricht, Boveri, Henneguy, Prenant, Nicolas, Guignard, Schottländer, etc.). Il peut donc se diviser avant celui-ci ou même sans que celui-ci se divise. — Dans le cadre de la variabilité d'action du centrosome, on peut citer les cas où il exerce sur le protoplasma environnant une action qui l'entoure d'une zone particulière et différenciée de celui-ci, phénomène qui semble surtout se produire quand l'archiplasma est très réduit. La masse et les caractères de cette zone de protoplasma modifiée sont des plus variables, tant chez des espèces distinctes que chez les individus d'une même espèce.

Lorsque le centrosome se divise, il provoque le dédoublement de l'aster, et il se constitue un *dyaster* ou *amphiaster* protoplasmique. Les deux moitiés, en s'éloignant l'une de l'autre, produisent, en quelque sorte, un double centre d'action sur le protoplasma, dont l'effet aboutit à la constitution des deux asters. Dès 1882, j'avais déjà signalé, au moins partiellement, ce processus en ces termes : « J'ai principalement observé la marche de cette division sur des cellules embryonnaires de Truite (2e et 3e jours)... le phénomène débute par l'apparition de lignes rayonnantes au sein du protoplasma cellulaire, qui s'étendent d'une étroite zone un peu plus claire, entourant le noyau, à la périphérie de la cellule... Lorsque l'aster commence à se diviser, la bande claire qui entoure le noyau disparaît, mais, près des deux pôles opposés



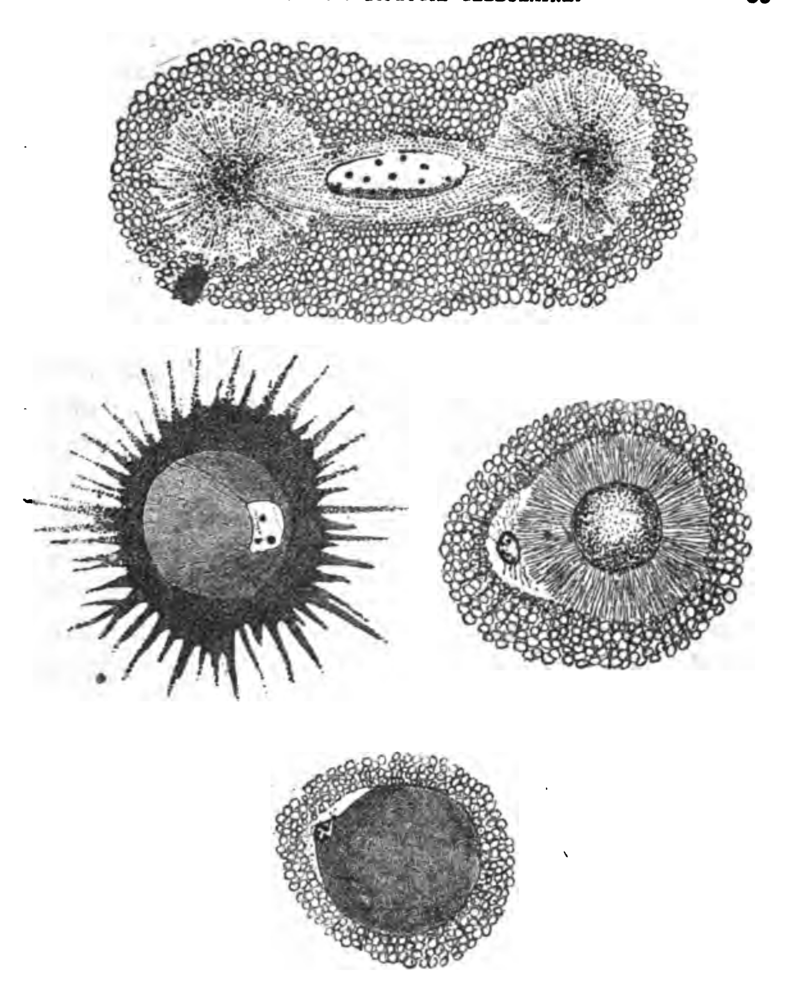


Fig. 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29. — Stades divers de la division cellulaire.

de cet organe, il se forme, sur une ligne perpendiculaire au futur plan de division de la cellule, un petit espace arrondi, clair, d'où partent, comme de deux centres, les rayons des deux asters nouveaux ; les choses se passent comme si la zone claire, point de départ primitif des rayons de l'aster, s'était divisée en deux moitiés qui seraient allées se placer aux deux pôles du noyau en entraînant avec elles les extrémités centrales des rayons qui en partent. »

Dans une communication à l'Institut, H. Fol attribue à Boveri et Ed. Van Beneden la découverte du fait que le partage des centres kinétiques est le point de départ de la division cellulaire. Le travail de Boveri, publié en mai 1887, avance textuellement que la division cellulaire se produit après que les centrosomes se sont divisés. Dans leur Mémoire, présenté à l'Académie belge le 6 août 1887, Ed. Van Beneden et Neyt affirment que les sphères d'attraction et les corpuscules centraux déterminent le phénomène de la division cellulaire.

Vejdovsky revendique, contre l'affirmation de Fol, la priorité de cette découverte, énoncée dans son travail sur le *Rhynchelmis*. Dans une récente note, il montre, de plus, que les sphères attractives et les corpuscules centraux de Van Beneden ne sont autre chose que ses *périplastes filles*. Les deux moitiés du périplaste (diplaste) lui paraissent, en effet, s'amasser aux pôles, autour des centrosomes. (Voir fig. 20 à 29.)

Quoi qu'il puisse en être de ces questions de priorité, le fait essentiel de ces vues est que le noyau cellulaire ne doit pas être considéré comme la première partie qui montre des tendances à une division prochaine, et que c'est dans le protoplasma qu'on en observe les premiers symptômes, par sa disposition autour de deux centres extranucléaires, dus à une division préalable. Ces résultats sont contenus, en grande partie, dans les lignes reproduites plus haut.

Le protoplasma qui entoure les sphères attractives paraît de plus en plus sous leur dépendance, augmente de quantité et les éloigne donc progressivement du noyau. Le phénomène rappellerait une sorte de « cristallisation » du protoplasma autour de deux centres, avec une augmentation progressive de la masse qui les entoure, d'où une séparation naturelle en deux portions, d'autant plus accentuée que les deux centres s'éloignent plus l'un de l'autre. Dans ce processus, les figures radiées paraissent se repousser, d'où doit résulter nécessairement la division du corps cellulaire en deux masses.

Les rayons qui se dirigent du côté du noyau sont les plus

forts; ils s'allongent au fur et à mesure que la distance du centrosome à ce corps augmente par l'intercalation progressive de protoplasma. La plus grande partie, ou tout au moins la couche superficielle, en paraît constituée par l'enveloppe périplastique du noyau, qui a acquis une apparence fibreuse.

Le noyau, au repos, a un contour net et présente un reticulum sans orientation déterminée. Cet état d'indifférence cesse au moment de la division, et le réseau nucléaire subit de profonds changements, sur lesquels les auteurs sont loin d'être d'accord.

D'après Henneguy, chez la Truite, dont il décrit le noyau au repos comme possédant un réseau formé de granulations irrégulières, ce réseau se fragmente en petits corps.

Mais le plus généralement il se forme dans le noyau un cordon de substance chromatique, le *filament chromatique,* qui s'offre d'abord à la vue sous l'aspect d'une sorte de réseau grossier et des plus irréguliers dû à ses entrecroisements, mais qui bientôt se dispose plus régulièrement et s'enroule, en général, en une sorte de peloton à disposition dominante spiralée, et qu'on appelle un *spirem*. Le filament tire son origine des granulations et des trabécules de chromatine, d'abord irréguliers, qui se dessoudent, s'égalisent et se réunissent à la périphérie en un cordon hélicoïdal unique (¹).

Ce cordon, appliqué contre la membrane du noyau, plus ou moins sinueux, arrive bientôt à décrire un certain nombre de sinuosités très marquées, à convexité interne, et ne touchant plus à la membrane nucléaire que par leurs points de continuité.

Le filament chromatique ne tarde pas à se fragmenter en

(¹) Brauer, dans la division des spermatogonies de l'*Ascaris megalocephala*, a observé que le premier symptôme du phénomène consistait dans l'alignement des grains de chromatine en une double rangée médiane. Le début du stade spirem montre donc une sorte de dédoublement que l'on peut rapprocher de certains faits que Flemming a décrits dans la *division hétérotypique*. L'afflux progressif de microsomes renforce cette formation filamenteuse qui, chez la variété *univalens*, se divise en deux, et chez la variété *bivalens*, en quatre segments.

tronçons, aux points où il touche la membrane du noyau. Les parties ainsi formées sont les *chromosomes;* elles ont la forme d'anses, à convexité dirigée vers le centre du noyau et à extrémités périphériques touchant à la membrane. Divers auteurs, entre autres Vejdovsky pour le *Rhynchelmis,* ont démontré que les chromosomes ne sont pas toujours chromophiles; dans l'expulsion des globules polaires de cet organisme, ce sont des granulations réfringentes non colorées.

Le nombre des chromosomes est soumis à des règles fixes.

Tous les éléments d'un même individu et de la même espèce présentent un nombre identique de ces corps; il est différent de celui des espèces voisines.

Ces *chromosomes primaires* ne sont pas des filaments homogènes et continus de chromatine; ils présentent une structure vue et décrite par divers auteurs. Ainsi Strassburger, Guignard et Carnoy ont établi qu'il y existe des disques alternativement sombres et clairs et imitant une sorte de striation transversale régulière. Outre cette striation, Carnoy leur décrit encore une membrane enveloppante formée de plastine. Pour Renaut « les trabécules du réseau chromatique du noyau sont formés par des granules de chromatine disposés en série et formant un filament en tire-bouchon. » Il y a longtemps déjà, Schultze a vu que, chez les Noctiluques, les chromosomes sont formés de sphérules.

Chez les Salmonides, le noyau, à l'état de repos, présente la structure typique. Sa membrane est régulière et formée de substance achromatique; elle est en continuité directe avec les trabécules du réseau interne, dont elle n'est que la couche la plus superficielle un peu épaissie et raidie. Cette charpente achromatique contient le long de ses trabécules des granulations chromatiques. Ces microsomes émigrent progressivement vers la périphérie et vont s'amasser à la face interne de la surface nucléaire. Ce phénomène présente peut-être une analogie plus ou moins complète avec ce qui se voit pour les déplacements des renflements protoplasmiques qui s'observent sur les pseu-

dopodes de certains Rhizopodes. Les microsomes chromatiques constituent, en effet, des renflements plus ou moins analogues. Le résultat de ce processus n'est plus, ici, la formation d'un cordon spiralaire continu. Il se produit simplement des points globuleux, épaissis, plus tingibles, ou des bâtonnets droits ou un peu courbes, éparpillés à la surface du noyau. Dès 1882, j'ai décrit à ces bâtonnets une structure aréolaire concordant avec l'existence de disques alternativement sombres et clairs vus depuis par Carnoy, Guignard, Strassburger, Renaut et d'autres. Je conçois le phénomène comme un épaississement des parois de certaines alvéoles ou de certaines séries linéaires d'alvéoles, qui, sous l'influence de l'apport de protoplasma chromatique, s'épaississent, et dont la cavité devient relativement moindre. Du reste, en général et chez d'autres espèces, les chromosomes m'ont souvent paru être formés de sphérules entourées par une fine membrane.

Il se constitue ainsi des dépôts superficiels de chromatine, des points plus denses et plus colorés que le réseau avoisinant qui existe toutefois avec ses caractères primitifs et qui ne se fragmente aucunement, ainsi que l'ont avancé certains auteurs.

Les chromosomes, quelle que soit leur forme, anses, bâtonnets ou corps globulaires, quittent leur siège primitif et se rapprochent du centre, où ils finissent par former une masse plus coloriée que le reste du réseau nucléaire. Ils se constituent ainsi, suivant l'équateur du noyau, une *plaque nucléaire mère* ou *plaque équatoriale* ou *étoile nucléaire mère,* dans laquelle les anses chromatiques sont disposées suivant un plan transversal unique, les bouts libres dirigés vers la périphérie et les parties courbes vers le centre. Ainsi se trouve constituée une figure étoilée, plane, perpendiculairement à l'axe longitudinal du noyau.

En même temps que ces phénomènes se passent, l'aspect général du noyau subit de profonds changements. Les contours de cet élément, qui, à l'état de repos, sont fort nets, deviennent moins apparents, et je ne saurais guère mieux faire comprendre

ce qui s'observe qu'en comparant le noyau normal à un kyste d'amibe, à parois minces, mais distinctes, et le noyau en voie de division, à l'amibe elle-même avec ses limites peu nettes. La ressemblance devient du reste d'autant plus grande qu'à un certain stade cet élément change effectivement de forme et que sa substance se montre contractée et irrégulière. La formation du centrosome peut déjà être comparée à une sorte de genèse pseudopodique.

Puis les pseudopodes se rétractent et le noyau devient sphérique, contracté, pour s'allonger bientôt en un corps fusiforme.

Il apparaît, à ce moment, dans le domaine du noyau une figure achromatique ayant la forme d'un fuseau constitué par des filaments achromatiques allant de la plaque étoilée chromatique aux deux centres attractifs polaires. Il existe là un ensemble de filaments, constitué par la substance achromatique du noyau organisée en fibres longitudinales, rappelant la forme d'un tonnelet, plus visibles que les rayons protoplasmiques, sorte de fuseau renflé au milieu où se trouve la plaque équatoriale, qui constitue le *fuseau nucléaire* ou *de division*. Ce fuseau nucléaire est lui-même contenu dans une gaine fusiforme formée de fins filaments achromatiques qui ne sont, sans doute, que le reste du périplaste. Il existe donc deux fuseaux distincts et emboîtés, l'un formé par le réseau nucléaire, l'autre par la couche périplastique.

La manière dont se forme ce fuseau n'est pas encore bien établie. On admet généralement que la membrane du noyau disparaît et que les stries qui partent des sphères attractives pénètrent peu à peu dans la substance de ce noyau, qu'elles traversent pour aller aboutir à l'étoile mère. D'autres fois, on admet aussi que c'est la partie achromatique du noyau qui s'organise, de manière à prendre un aspect strié longitudinalement, et dont l'ensemble formerait le fuseau.

Dans ce processus, j'ai observé la formation, aux deux pôles du noyau, d'une dépression dans laquelle se prolongent les rayons correspondants des asters, dépression qui devient irré-

gulière et de plus en plus profonde. On distingue alors la plaque chromatique située dans le plan équatorial et, de chaque côté, le réseau achromatique. Ce dernier diminue peu à peu jusqu'au moment où les filaments aboutissent à l'étoile nucléaire, et tout le noyau, membrane comprise, se transforme ainsi, à l'exception des chromosomes qui forment la plaque équatoriale. Il est probable que ce résultat est obtenu parce que ce réseau s'organise progressivement de manière à constituer des rangées en continuité avec les rayons des asters jusqu'à l'achèvement du fuseau, et que c'est sous la forme de dépressions polaires s'accentuant progressivement que le phénomène se produit. Cette interprétation découle nettement de mes anciennes observations.

Le phénomène apparaît aussi de telle sorte qu'il se pourrait que la disparition du réseau clair puisse être attribuée à une sorte de condensation de sa substance, à sa confusion avec la masse centrale, au point d'y disparaître, en même temps que les cavités polaires augmenteraient de plus en plus au point d'envahir la totalité du noyau. Ce processus est moins probable.

La marche générale de la division karyokinétique, étudiée dans la succession des phénomènes, peut amener à une conception assez particulière du rôle des différentes parties de la cellule. Les centrosomes semblent exercer une action considérable sur le protoplasma; celui-ci s'amasse autour d'eux avec plus ou moins de force, suivant qu'ils ont eux-mêmes conservé plus ou moins d'énergie. Il en est dont l'action est très faible et n'intéresse qu'une faible part de la masse protoplasmique, quelquefois presque nulle, tandis que d'autres polarisent énergiquement toute la masse jusqu'aux extrêmes limites de la cellule. Par cette action, manifestée par des lignes rayonnantes, quelquefois aussi concentriques, l'on voit le protoplasma se partager en deux masses à centre distinct, ce qui constitue une division interne, après laquelle la division externe n'a plus que peu d'importance, et qui, du reste, n'aurait pu tarder à se produire. Il est à remarquer que dans ce phénomène de repro-

duction agame des éléments cellulaires, ce sont uniquement les centrosomes qui, de toutes les autres parties du noyau, paraissent agir. Les chromosomes, au contraire, semblent une partie inutile, qui est de plus en plus repoussée par le protoplasma qui s'amasse autour du nucléole jusqu'à l'extrême limite de chaque cellule nouvelle, c'est-à-dire à leur plan de division. Dans cette reproduction agame, on constate donc une sorte d'expulsion de la partie chromatique du noyau ; le centrosome paraît l'élément essentiel, directeur de la division. La chromatine paraît avoir un tout autre rôle, et elle ne rentrera dans la cellule qu'après l'achèvement du phénomène. La variabilité de la position du centrosome montre qu'il est bien distinct du noyau. Si, en général, il va se loger à l'intérieur de celui-ci, sous forme de nucléole, il n'en est pas moins avéré qu'il peut aussi séjourner dans le corps cellulaire. Par la formation de la plaque équatoriale, la partie chromatique est expulsée temporairement du corps cellulaire ; la formation du cordon chromatique lors du stade de spirem peut donc être comprise comme un commencement de ce phénomène, par lequel la matière chromatique est d'abord rejetée à la périphérie du noyau. — Il est, toutefois, important de remarquer aussi que dans certaines divisions cellulaires, par exemple dans la formation des globules polaires des Ascidies, on n'a pu observer les centrosomes, qui paraissent ne pas exister là. Il serait donc aussi soutenable que les phénomènes mitotiques du noyau se produisent d'une façon autonome.

La constitution de la plaque équatoriale est variable. Dans la majorité des cas, on y trouve des anses à branches rayonnantes ; mais elle peut aussi être d'une simplicité élémentaire. La larve de Salamandre présente un exemple de ce genre. La plaque équatoriale est réduite à un simple filament moniliforme, formé de sphérules régulières, alignées en une file unique.

Les anses chromatiques primaires deviennent doubles en se divisant, suivant leur axe longitudinal, en *anses secondaires,* qui constituent deux groupes ou deux *plaques nucléaires*

filles, les *plaques polaires*, formées de *chromosomes secondaires*, dont le nombre est donc double de celui des chromosomes primaires, et qui sont identiques entre eux.

Cette division longitudinale des chromosomes primaires est une conséquence directe de leur structure aréolaire. Chaque alvéole se divise; mais comme ces éléments sont disposés en une file sériaire, il en résulte que la division de l'ensemble est longitudinale, quoique en réalité ce processus ne diffère pas de ce qui se voit dans la division cellulaire elle-même. Si, au lieu d'être complexes, les chromosomes étaient des éléments simples, cette division serait des plus normales. C'est, du reste, ce qui se voit chez la larve de la Salamandre, où les sphérules isolées qui forment la plaque équatoriale se divisent en deux moitiés suivant l'axe de la série qu'elles constituent. Certains naturalistes ont avancé que cette scission était déjà préparée dans le spirem et ont admis au sein de celui-ci l'existence d'une fente longitudinale plus ou moins nette. Cet aspect de fente se voit dans toutes les formations contenant des alvéoles en séries, et cette observation ne sort pas du cadre des faits déjà mentionnés. Un examen attentif permet, en effet, de constater que ces cavités axiales ne sont pas continues et qu'elles sont subdivisées par des cloisons transversales.

Les chromosomes secondaires des plaques polaires changent d'orientation et dirigent, de chaque côté, leur portion convexe vers le centrosome correspondant. Puis ils cheminent peu à peu vers ceux-ci. La manière dont ce déplacement s'exécute est encore obscure. On pense généralement que, si les chromosomes secondaires s'éloignent les uns des autres, cela est dû à la contraction des fibres du fuseau nucléaire. Strassburger admet une interprétation différente. Pour lui, c'est là une locomotion active des chromosomes s'opérant sur les fibres, et les centrosomes n'auraient qu'une action excitatrice sur ce phénomène. C'est dans les cas très simples, comme chez la larve de Salamandre, ou même chez les Salmonides, qu'on peut le mieux observer le phénomène. Il m'a semblé, dans ces cas, que la division de l'étoile mère en deux étoiles filles n'est

pas un phénomène isolé, comme on paraît le penser communément; il y aurait des divisions ultérieures d'un caractère différent. La première division donne lieu à des produits identiques, qui ne tarderaient pas à se dédoubler eux-mêmes en parties qui ne conserveraient pas le même aspect. Tandis que la partie située du côté du centrosome conserverait son aspect primitif, celle de la périphérie amincirait ses parois alvéolaires et les raidirait suivant une direction perpendiculaire au plan de division de manière à les transformer en éléments filamenteux spécialisés, alors que la partie interne resterait renflée, active, en quelque sorte embryonnaire. Il se formerait ainsi, à partir de ce plan, des séries longitudinales d'alvéoles plus pâles que les plaques, mais plus colorées que la partie achromatique, qui se trouvent toujours aux extrémités, chacun de leurs dédoublements successifs donnant naissance à une plaque périphérique chromatique et à une partie interne, s'organisant en manière de filament d'aster et plus claire, et ainsi de suite. Les deux plaques polaires sont ainsi reliées l'une à l'autre par des rayons rappelant ceux des asters, mais un peu plus nets; par les progrès de ce processus, elles finissent par arriver au contact des sphères attractives, et prennent, en se moulant sur eux, une forme concave, tout en restant encore reliées par leurs rayons *(figure pectinée)*. Cette figure montre, chez les Salmonides, un amas de chromosomes en bâtonnets, de dimensions et de configuration assez variables, orientés parallèlement suivant le grand axe de la cellule, de manière à rappeler les dents d'un peigne. Cet amas de chromosomes ne tarde pas à se tasser, en quelque sorte, et à former un corps compact, moulé sur le centrosome, et l'englober plus ou moins, à la manière d'une calotte. Ce corps compact est alors constitué de sphérules arrondies, qu'on peut désigner sous la dénomination de *cytomérites,* et qui s'accroissent et envahissent de plus en plus la surface du centrosome qui paraît y disparaître par englobement. Les sphérules se multipliant par division, le noyau augmente de volume, et, finalement, par une transformation vésiculaire de ces sphérules, le réseau

normal du noyau avec ses points nodaux se trouve reformé. Par cette métamorphose vésiculaire, la masse du noyau s'éclaircit. Il est possible que ce soit là la raison pour laquelle le nucléole deviendrait visible et ne serait autre chose que le centrosome à l'état de repos.

Dans les cas où les chromosomes ont la forme d'anses, je n'ai pas vérifié l'existence de ces bipartitions successives. Par analogie, il peut paraître cependant probable qu'elles existent.

Quant aux filaments du fuseau nucléaire primitif, ils paraissent disparaître par une sorte de coalescence progressive avec les plaques polaires qui récupéreraient donc d'un côté ce qu'elles perdent de l'autre. Dans cette marche vers les pôles, le fuseau achromatique paraît donc se rétracter activement. C'est le stade de la *métakinèse,* dans lequel il existe deux figures nucléaires étoilées, le *diaster* nucléaire, situées parallèlement. Dans leur parcours en sens inverse du trajet de l'étoile primitive, ces étoiles filles aboutissent au centrosome; elles constituent alors des spirems filles et enfin des noyaux à l'état de repos, avec leur réseau caractéristique. En un mot, les différents stades sont parcourus en ordre inverse. A ces derniers stades fait suite la division du protoplasma cellulaire par un étranglement qui pénètre de l'extérieur vers l'intérieur, en même temps que disparaissent les productions filamenteuses diverses, dont il a été question. — Dans les cas où cet étranglement manque, il se constitue des cellules plurinucléées.

Watasé conçoit la division mitotique d'une façon toute spéciale. En fixant les éléments par le réactif picro-osmique et en colorant par de la fuchsine acide, le centrosome et les cytomicrosomes du corps cellulaire se colorent d'une façon identique, tandis que les trabécules protoplasmiques qui relient ces microsomes, ainsi que les fibres du fuseau, restent peu ou point coloriés. Les dimensions des microsomes augmentent de la périphérie vers le centre. De là, il admet que le centrosome est simplement le corpuscule le plus interne et le plus gros des cytomicrosomes, dont les rangées radiaires forment les asters.

Le centrosome serait donc simplement un microsome gigantesque, point nodal de rencontre de toutes les fibres radiaires du protoplasma.

Quant à l'origine des cytomicrosomes, il admet, ainsi que je l'ai montré depuis longtemps, qu'ils se forment comme des varicosités des fibrilles protoplasmiques, ou bien comme des épaississements des points nodaux.

Pour cet auteur, lorsque les fibres du fuseau sont parallèles, il se constitue, dans le plan de division, comme premier indice, une rangée de *microsomes équatoriaux*. Mais lorsqu'à la période d'étranglement ces filaments convergent, il se forme une sorte de corpuscule plus gros que Flemming a appelé *corps intermédiaire,* mais qui, se formant de la même façon que le centrosome, est plutôt un *centrosome intercellulaire*.

Dans la formation des globules polaires du *Rhynchelmis,* les plaques nucléaires, mère et filles, sont dépourvues d'affinités pour les substances colorantes. Cet exemple, déjà cité, pourrait être fortifié par une foule d'autres. Kœhler et Bataillon ont montré que, dans l'œuf de la Vandoise, le noyau ne renfermait pas d'éléments chromatiques, et que le protoplasma se distingue vivement par sa coloration du noyau resté relativement très pâle. Même dans les fuseaux de division, il n'y a pas de granulations chromatiques, et les centrosomes seuls sont un peu plus colorés. Tels sont les caractères des premières sphères de segmentation, et il faut attendre la fin du premier jour pour trouver, dans certaines karyokinèses, quelques grains bleus extrêmement fins qui constituent les premières plaques équatoriales. Plus le temps progresse et plus ces réactions s'accentuent. Henneguy et Sabattier nous avaient déjà fait savoir que les noyaux des premiers stades embryonnaires sont difficilement colorables.

Chez les Salmonides, ainsi que l'a déjà fait remarquer Henneguy, les cellules embryonnaires sont colorées fortement et en totalité. Par les progrès de l'évolution, ces éléments augmentent de nombre et diminuent de volume, et l'action des réactifs se localise de plus en plus sur le noyau.

C'est donc là une propriété chimique acquise qui ne semble avoir rien d'essentiel. Les choses se passent comme si les propriétés chromophiles étaient d'abord réparties dans toute la cellule et qu'elles s'en détachent progressivement pour se localiser dans le noyau. — Un fait analogue se passe pour les Bactériacées qui se colorent aussi *in toto,* d'où l'on a voulu tirer la conclusion que ces êtres étaient des noyaux ambulants. L'observation précédente réduit cette déduction à sa juste valeur (1).

Kœhler et Bataillon ont décelé dans le protoplasma des cellules des éléments particuliers. Ce sont des sphérules chromophiles, à teinte d'autant plus foncée que leurs dimensions sont plus réduites. Les sphérules les plus volumineuses différencient, au sein de leur masse plus pâle, des grains plus petits, très foncés, qui sont éliminés dans le protoplasma ambiant. Ce sont ces grains qui semblent être la source des éléments chromatiques du noyau. Ces grains chromophiles paraissent représenter l'état le plus jeune sous lequel la substance chromatique se manifeste dans les cellules. Ils sont probablement les homologues des *grains rouges* des organismes inférieurs.

Brass avait signalé ce fait depuis longtemps; cet auteur a vu son *plasma de nutrition* élaborer ces granulations colorables, et ce n'est que là qu'elles se formeraient. Ce plasma transmettrait ces granules au réseau du noyau, et ce serait là l'origine de la chromatine nucléaire. Ce fait est corroboré par l'observation que les premières sphères de segmentation, pleines de matières nutritives, se colorent en masse. La substance chromatique ne paraîtrait donc être qu'une réserve nutritive qui s'est amassée dans le noyau, qui peut manquer, et dont la quantité n'est pas plus constante que la qualité; elle serait donc comparable au contenu intestinal ou au chyle des organismes.

(1) Les éléments des premiers stades de développement et les êtres les plus inférieurs jouissent donc d'une propriété identique, qui a donné lieu à bien des interprétations diverses.

Les figures chromatiques peuvent manquer; elles présentent toutes les variations; les figures achromatiques, qui sont d'origine réellement protoplasmique, ne manquent jamais dans les divisions indirectes.

La tingibilité du nucléole est aussi des plus variables, depuis des proportions minimes jusqu'à une sélection énergique; elle diffère, du reste, de celle de la chromatine, vis-à-vis de certains réactifs.

Les cellules jeunes et vigoureuses ont un protoplasma granuleux; leur noyau se colore vivement et montre un réseau chromatique fort développé. Au contraire, dans les cellules différenciées et bien adaptées à des fonctions spéciales, qui doivent donc être nourries par leurs voisines, par exemple, les cellules nerveuses, le protoplasma est peu granuleux et le noyau se colore difficilement. On y trouve un filament chromatique rudimentaire. Par conséquent, pour bien voir les filaments chromatiques des noyaux, il est préférable de s'adresser à des individus bien nourris, ou même qui viennent de manger. La coloration énergique est une preuve de force et de vitalité, la cellule se nourrissant par elle-même. En anatomie pathologique, un noyau qui se colore mal appartient à un élément peu résistant. Aussi, les éléments différenciés résistent-ils mal aux maladies.

La constitution du protoplasma, telle qu'elle est exposée plus haut, peut contribuer à jeter quelque lumière sur le mécanisme de la division cellulaire. Chez le *Spirillum tenue* (*Compt. rend.*, 17 novembre 1887, etc.), lorsque le nombre des logettes qui constitue son corps et qui se multiplient par division, atteint certaines limites, l'être se divise lui-même. Puis les alvéoles se multiplient de nouveau et le même phénomène se renouvelle, et ainsi de suite. N'est-il pas admissible que la multiplication des alvéoles protoplasmiques des cellules puisse avoir une influence analogue, et, après qu'elle a abouti à un certain chiffre, déterminer la division?

III

Division des Protozoaires.

Les Protozoaires se reproduisent asexuellement par division.

La division qui a été observée chez presque tous les Protozoaires est transversale, longitudinale ou même oblique. Elle s'observe chez tous les Infusoires, chez les Monères, chez beaucoup de Rhizopodes et de Flagellés. Jamais elle n'avait été vue chez les Grégarines jusqu'au moment où j'ai établi le fait pour le *Diplocystis Schneideri* jeune et un parasite de la pleurésie chronique, aussi à l'état jeune. La reproduction par bourgeonnement est aussi fort répandue.

Le noyau paraît manquer chez les Monères; il est absent chez les Protéromonadiens. Chez tous les autres Protozoaires, cet élément existe, soit isolé, soit en un nombre variable, souvent des plus considérables, chez le même individu. Sa constitution est souvent vésiculaire; il y a une membrane, un suc nucléaire et un ou plusieurs nucléoles; çà et là, on a observé une sorte de réseau. D'autres fois, il est homogène.

Chez la plupart des Infusoires, la disposition est compliquée. On sait que ces organismes, à l'état adulte, sont plurinucléés. Dans les cas les plus simples, il n'existe que deux noyaux qui sont alors différents entre eux, l'un relativement grand, l'autre plus petit et accolé contre le premier ou logé dans une dépression spéciale de celui-ci. Ce sont le *noyau* proprement dit (macronucléus) et le *nucléole* ou *noyau accessoire* (micronucléus). Il n'existe que peu d'espèces d'Infusoires manquant avec certitude de ces deux sortes de noyaux. Mais, chez les autres Protozoaires, on ne rencontre que le noyau proprement dit,

contenant à son intérieur un nucléole ordinaire, comme dans les éléments cellulaires ordinaires.

Chez les Infusoires, le noyau proprement dit est généralement unique; mais il peut présenter une structure tellement variable, avoir des formes si diverses qu'on a souvent cru à l'existence de deux ou plusieurs noyaux. Il varie depuis la forme globuleuse simple, jusqu'à une division en nombreux articles. Il possède une membrane propre, quelquefois peu visible, ou qui peut même manquer, et, dans quelques cas (Stylonichies, Vorticelles), elle est séparée de la substance nucléaire par une zone claire et fine. Autour de cette membrane, on observe souvent une zone claire analogue à celle qui se voit autour de certains noyaux cellulaires. L'*Hoplitophrya Legeri*, par exemple, présente cette zone périplastique d'une manière des plus nettes.

Le type vésiculeux est fort rare chez les Infusoires, dont la structure est généralement compacte et remplissant tout le noyau. Qu'il soit condensé — et plus sombre à l'état vivant, que le protoplasma — ou qu'il le soit moins — et plus clair que celui-ci — sa substance présente toujours une constitution alvéolaire fort nette, qui ne sort pas du cadre des faits dont j'ai donné la description plus haut. La coupe optique offre un aspect réticulé à points nodaux un peu épaissis et plus colorables, formant des microsomes qui peuvent aussi se trouver placés sur les trabécules eux-mêmes. Le contenu des alvéoles est clair, probablement liquide, peu colorable, et le réseau se colore le plus. Quelquefois cependant les nucléochylèmes paraissent constituer des bâtonnets plus solides et plus colorables (Nyctothères). Autrefois, on ne voyait que les microsomes, et la substance nucléaire était décrite comme finement granuleuse. C'est le cas de tous les auteurs, jusqu'en 1883, où Leydig avança que le noyau des Infusoires présentait une structure spongieuse. En 1884, Jickeli y décrivit un reticulum délicat et une substance fondamentale achromatique, et, à la même époque, Carnoy y vit aussi une structure réticulée.

Récemment, Grüber, dans ses recherches sur le *Chilodon curvidentis,* et Stein et Schneider, pour l'*Anoplophrya branchiarum* (*circulans* Balb.) et le *Nyctotherus cordiformis,* ont avancé que la substance du noyau était constituée par la réunion de sphérules serrées, petites et très tingibles *(chromatosphérites).* Cet aspect particulier n'est pas si fondamentalement différent du précédent que le sembleraient croire ces observateurs. On a simplement affaire là à des nucléochylèmes solides, et il existe cependant une substance fondamentale réticulée entre les corpuscules.

Le noyau du *Stylonichia mytilus,* comme celui de toutes les Oxytrichines, est formé de deux articles à peu près égaux, unis par une membrane commune hyaline, paraissant quelquefois séparée de la membrane nucléaire par une zone claire et

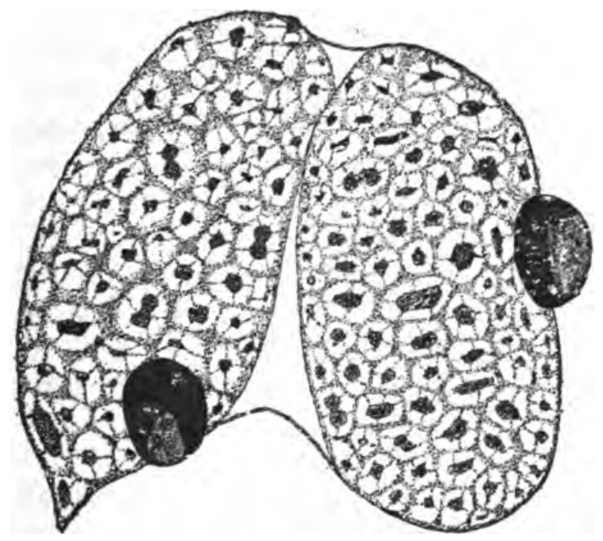


Fig. 30. — Noyau de *Stylonichia mytilus.*

d'autres fois plutôt appliquée directement sur cet élément. Chaque article est pourvu d'un petit noyau accessoire. On y distingue facilement une foule de globules sombres, plus colorés, de volumes variables et contenus dans des espaces vésiculaires plus clairs, aux parois desquels ils sont reliés par

de fins et délicats prolongements radiaires, de sorte que ces cavités sont divisées en alvéoles, disposées autour d'eux en une couche unique. Les parois de ces vésicules se continuent avec le reticulum du reste du noyau; elles peuvent ne contenir aucun corpuscule, et alors on n'observe qu'un fin réseau. Les corpuscules chromophiles sont eux-mêmes hétérogènes. Les plus petits ne paraissent présenter qu'une seule vacuole centrale peu visible, et passant insensiblement aux parois plus denses; les gros sont plurialvéolaires, à cavités aussi fort diffuses; les points nodaux où aboutissent les cloisons radiaires paraissent comme plus condensés. On a donc, chez cet organisme, un noyau pourvu de corpuscules de réserve épars, qui caractérisent l'état de repos, corpuscules multiples qui disparaissent lors de la période d'activité, au moment où le réseau prend l'aspect fibreux.

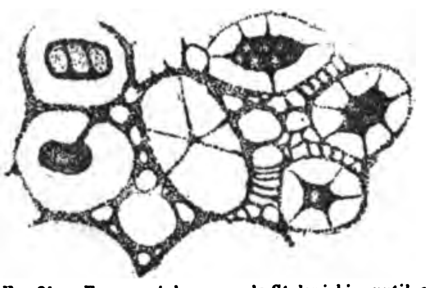


FIG. 31. — Fragment de noyau de *Stylonichia mytilus* très grossi.

Cette constitution diffère notablement de ce qui se voit chez les autres Ciliés, dont le noyau présente d'habitude un réseau simple. On rencontre cependant des exemples plus ou moins analogues, par exemple, chez certaines Vorticellines. Nous avons déjà vu chez le *Nyctotherus cordiformis* une masse fondamentale avec une foule de bâtonnets plus ou moins colorables, sortes de nucléochylèmes solides, les *chromatosphérites.* Chez le *N. Duboisii,* il y a une disposition intermédiaire entre celle-ci et celle des Infusoires en général. La structure de la masse fondamentale est finement alvéolaire, mais, dans certaines alvéoles agrandies, on trouve des corpuscules plus colorables. — Chez le *Chilodon* et le *Spirochona gemmipara,* le noyau présente l'aspect d'une cellule complète, avec son protoplasma, son noyau et son nucléole.

Chaque Infusoire présente un noyau — rarement plusieurs — dans une excavation duquel se trouve souvent logé un

corps minuscule, le noyau accessoire ou nucléole, qui est indépendant de la charpente du noyau. Cet élément existerait bien plus souvent qu'on ne le croit, et il n'y aurait que certaines espèces multinucléées et quelques Opalines qui en soient réellement dépourvues; il ne se colore que fort difficilement, et passe ainsi fréquemment inaperçu. Tandis que, en général, il n'y a qu'un seul noyau, le nucléole montre une tendance à la multiplication et très souvent on constate la présence de nombreux nucléoles. Les petites espèces, qui n'ont qu'un noyau de constitution simple, n'en présentent qu'un seul. Au contraire, chez les grandes formes, à noyau complexe, articulé, en chapelet, etc., il y en a souvent un par article. Comme, en dehors de la division des Infusoires, on n'a jamais vu la bipartition des noyaux accessoires, leur multiplicité ne laisse pas que de présenter un côté assez énigmatique.

Ronds, ovales, quelquefois fusiformes, les dimensions des noyaux accessoires varient de un à dix μ; ils sont entourés d'une membrane délicate et anhyste à laquelle, contrairement à ce qui se voit pour les noyaux, ils sont souvent fixés par un point, et, quand un réactif a eu pour effet de la détacher, on constate que le contenu y est excentriquement fixé. Souvent, leur substance paraît homogène, et alors ils apparaissent comme des corps plus ou moins sombres et un peu brillants, ce qui caractérise l'état de repos. D'autres fois, on y voit un fin reticulum. Dans les grands éléments, à membrane soudée, on observe souvent deux segments, l'un tingible (chromatine), l'autre incolore (achromatine). Le segment chromatique est plus ou moins strié longitudinalement, présentant des fibres fines ou grosses, souvent granuleuses, quelquefois variqueuses, car elles sont unies par des trabécules transversaux. Chez la Paramœcie, la partie achromatique montre aussi une pâle fibrillation.

C'est sur les nucléoles des Ciliés qu'en 1858 Balbiani, pour la première fois, a observé les premiers stades de la karyokinèse, sans se rendre suffisamment compte de la signification réelle du phénomène.

Lors de la division des Infusoires, dans les cas où les noyaux ont une forme allongée, lobée ou en chapelet, etc., le phénomène est précédé par un retour de ces éléments à une forme simple plus ou moins globuleuse ou ellipsoïdale, et ils se disposent de manière à ce que leur grand axe soit perpendiculaire au futur plan de division de ces êtres. Puis, ils reprennent leur configuration primitive et ils finissent par s'étrangler par leur milieu, de telle sorte que, dans la division, le noyau parcourt des stades qui rappellent le développement de l'adulte. Les noyaux simples, pour se diviser, s'allongent en bande se rétrécissant au milieu; par les progrès de cet allongement, la portion rétrécie devient souvent très longue et filiforme, pour finir par se déchirer, et alors les deux bouts filiformes sont rétractés chacun dans son noyau respectif.

Quant aux nucléoles, certains auteurs ont avancé qu'avant la division ils se fusionnaient entre eux, comme cela arrive pour les noyaux des cellules multinucléées, affirmation démentie par d'autres. Leur division, comme celle de tous les éléments en voie de division, débute par une augmentation de volume; ils deviennent plus clairs et moins condensés. Cette dilatation, médiocre dans la division ordinaire, est plus considérable dans la conjugaison. Puis ils se transforment progressivement en fuseaux nucléaires.

R. Hertwig et R. Bergh ont bien étudié cette division, l'un chez les Paramœcies, l'autre, chez l'*Urostyla grandis*. Les premières indications du phénomène se voient dans les deux nucléoles, qui forment des fuseaux, et même, chez l'*Urostyla,* se divisent avant que le noyau ne montre le moindre symptôme d'étranglement. En même temps paraît se produire l'ébauche d'une nouvelle bouche. Le noyau s'allonge, s'étrangle et se divise en deux autres noyaux dont chacun se rend dans la partie du corps où il devra rester. Cette division provoque l'étranglement de l'Infusoire, qui se scinde en deux, à peu près en même temps que le noyau. La division du noyau ne commencerait donc à s'effectuer qu'au moment où le corps de l'Infusoire commence à s'étrangler. Il semblerait donc que

le premier rôle appartient au nucléole, tandis que celui du noyau serait plus passif.

Dans ce processus, la structure finement alvéolaire du noyau devient toujours fibreuse; lorsque cet élément est encore sphérique ou ovale, les fibres sont très irrégulièrement entortillées et forment un peloton, modification de la structure alvéolaire qui existe normalement chez les Dinoflagellés. Quand, dans le noyau au repos, il existait des corpuscules plus ou moins colorables, tels que ceux cités plus haut, on n'en voit alors plus aucune trace. Il est probable que ce sont là des sortes de matières de réserve qui passent dans le reticulum. Lorsque le noyau s'allonge, les fibres se disposent longitudinalement, quoique d'une manière un peu irrégulière. Puis l'étranglement commence, et plus il est avancé, plus, dans les deux nouveaux noyaux, les fibres retournent à l'état de peloton, et, après l'achèvement de la bipartition, on retrouve la structure finement alvéolaire. Dans cette division, le noyau des Infusoires ne dépasse donc pas le stade du peloton de la karyokinèse. C'est là une sorte de division directe.

Chez les Opalines, la division nucléaire est connue d'une manière fort détaillée. On y remarque des phénomènes rappelant absolument ceux de la division indirecte des noyaux des cellules ordinaires. Les noyaux, au repos, présentent le reticulum ordinaire irrégulier, avec plusieurs nucléoles. Les nucléoles (ordinaires) tendent à disparaître peu à peu; il se forme un spirem, puis une plaque équatoriale, formée de chromosomes en anse, à convexité tournée vers le centre. En même temps s'organise un fuseau nucléaire, formé de filaments allant des pôles du noyau à l'étoile mère. A ce moment, les nucléoles ont disparu. Les anses se dédoublent longitudinalement, et tournent leurs convexités vers les pôles, où elles se rendent. A ce stade s'observe une différence avec la division nucléaire ordinaire. Dans celle-ci, le noyau nouveau se constitue aux dépens des plaques polaires qui s'unissent à la sphère attractive et les filaments qui relient les deux plaques disparaissent. Ici, ces plaques restent complètes et il n'y a pas

de filaments achromatiques entre les deux moitiés; elles cheminent simplement dans le réseau achromatique, et, à la fin du processus, le noyau se divise en deux par étranglement.

Dans les nouveaux noyaux apparaissent bientôt de nouveaux nucléoles, situés dans la partie achromatique. Puis les anses subissent une métamorphose régressive et le reticulum se reforme, de façon qu'on ne peut plus distinguer deux portions, l'une chromatique, l'autre achromatique. Les nucléoles sont donc, ici, des éléments existant à l'état de repos et se constituant dans la partie dépourvue de substance achromatique.

Il est à remarquer que les Opalines possèdent une foule de noyaux (macronucléus) et que la division de ces éléments ne détermine pas celle du corps.

Dans le bourgeonnement des Noctiluques, la division du noyau présente une marche un peu différente. Cet élément, observé récemment par Ishikawa, est une vésicule claire, dans laquelle les réactifs décèlent de nombreuses granulations, unies en files rectilignes ou courbes ou ayant la configuration de la lettre S. On en voit qui sont isolées ou réunies en groupes de deux ou de quatre, ce qu'on explique par une scission préalable longitudinale. Il existe environ dix de ces cordons ou groupes. Au début du bourgeonnement, on observe, serré contre le noyau, une grosse masse de protoplasma archiplasmique, à gros granules, munie d'un centrosome qui ne tarde pas à se diviser, ainsi que bientôt aussi l'archiplasma en montrant une structure fibreuse. Aux pôles du fuseau nucléaire s'amassent les granulations chromatiques tout contre la membrane enveloppante. Puis le noyau s'allonge. Les parties chromatiques des deux pôles se partagent longitudinalement; les centrosomes et leur archiplasma se divisent aussi, et il peut même arriver que la division des centrosomes soit poussée plus loin. Le noyau, en voie de division, montre une structure double, rappelant la division qui se voit après la fécondation. Autour des archiplasmas, le protoplasma rayonne.

IV

Genèse des éléments reproducteurs.

Le *sperme* est un liquide complexe, résultant du mélange du produit des testicules avec des sécrétions de glandes voisines; il sert de véhicule au véritable élément fécondateur, le *spermatozoïde*. Celui-ci est le plus petit élément du corps.

La connaissance de l'existence des spermatozoïdes date de 1677. Elle est due à un étudiant de Dantzig, élève de Leeuwenhoek, Louis Hamm, qui communiqua sa découverte à son Maître. Celui-ci vérifia la présence de ces éléments dans le sperme d'un grand nombre d'animaux et les considéra comme de petits animaux, d'où il les appela *verss permatiques*. C'est, du reste, sur une pareille interprétation qu'est basée la dénomination actuelle de *spermatozoaires*.

De tout temps, certains auteurs ont été portés à attribuer aux spermatozoïdes une structure plus ou moins complexe. Déjà Spallanzani, observant les éléments séminaux de la Salamandre, a distingué à la surface de leur prolongement caudal des ondulations, et a admis l'existence, de chaque côté de la queue, d'une rangée de cils vibratiles. Il a, du reste, été dépassé dans cette voie par Rudolph Wagner qui figura même ces cils.

Ehrenberg (1830) croyait leur avoir vu une sorte d'orifice buccal ou suçoir, situé dans la tête, et, tandis que les recherches de Lallemand et de Kölliker démontraient que c'étaient là des éléments dont la constitution pouvait être ramenée à celle d'une cellule munie d'un filament locomoteur, Pouchet (1847) leur décrivit un tube intestinal, et Gerber allait jusqu'à leur attribuer des organes génitaux.

Le premier, Siebold a reconnu que les prétendus cils vibratiles des Urodèles (Triton) n'étaient autre chose qu'un filament marginal rabattu le long du prolongement caudal. Il ne reconnut cependant pas l'existence d'une membrane reliant ce flagellum à la queue; il croyait, au contraire, qu'il s'enroulait autour de celle-ci, tandis que Gzermak montra bien que ce filament n'était jamais que d'un seul côté de la queue, et, sans voir la membrane, il conclut à son existence. Pouchet et Amici étaient déjà arrivés à la même conclusion.

En 1865, Schweigger-Seidel a montré que la queue des spermatozoïdes des Mammifères est formée de deux parties, le *segment intermédiaire* et la queue proprement dite. Ce segment intermédiaire, d'ailleurs peu distinct, est plus épais que le reste de l'appendice; il se comporte différemment vis-à-vis des réactifs. La teinture d'iode, par exemple, le colore plus vivement que la tête et la queue. Il a démontré, chez le Pinson *(Fringilla cœlebs)*, l'existence d'un filament central et d'un filament périphérique spiralé.

Leydig a décrit aux spermatozoïdes des Reptiles une membrane ondulante; chez le Pelobate, il a vu un fin rebord spiral.

Chez les Insectes, Bütschli a vu une queue formée de deux filaments, l'un droit, l'autre à nombreuses ondulations, seul contractile et n'entourant probablement pas le premier.

Ces faits ont été revus par La Valette Saint-Georges (1874).

A la même époque, Eimer découvrit le filament axial de la queue des spermatozoïdes, enveloppé d'une couche corticale. Il attira l'attention sur un espace étroit qui existerait entre la tête et le segment intermédiaire, auquel il a donné le nom de *cou*. Cet espace peut être invisible; mais toujours il en existe un semblable, fort net, entre le segment intermédiaire et le segment principal. Le cou n'est donc autre chose que le filament axial libre de toutes parts; Eimer croyait que ce filament pénétrait dans la tête. Cet auteur a aussi attiré l'attention sur une striation transversale des spermatozoïdes du Lapin, du

Cobaye, de la Souris, du Chien, de l'Hermine, du Chat et de l'Homme.

Il a fait une autre observation de haut intérêt. Dans les deux tiers inférieurs de la tête du spermatozoïde du *Synotus barbastellus,* et dans la moitié supérieure de ceux du *Plecotus auritus,* il a vu, sur la surface plate, une division en bandes successives, plus claires et plus sombres. — Le fait a, du reste, été décrit chez d'autres Mammifères par Vallentin, Hartnack, Grohe et d'autres.

Von La Valette Saint-Georges, chez les Anoures, retrouva le filament axial et une membrane ondulante, à bord libre en filament. Il étudia aussi les Insectes *(Phratora vitellinae).*

Jensen, imitant Schweigger-Seidel, a traité les spermatozoïdes par la glycérine étendue, et vit, ainsi que Leydig et A. Von Brunn, le segment intermédiaire présenter une fine striation transversale. Il étudia le Rat, les Anoures et les Poissons et arriva à démontrer que cette striation était le résultat de l'existence d'un filament spécial, enroulé autour du filament axial, qu'il parvint même à détacher. L'observation directe peut déjà amener à cette conclusion par le fait que la striation du segment intermédiaire, vue par la face supérieure, alterne avec celle de la face inférieure.

Dans la Raie, il vit le segment principal formé de deux filaments dont l'un s'enroulait autour de l'autre; chez le Rat, le segment intermédiaire lui parut aussi se diviser en fins filaments, observation confirmée par Niessing, qui crut que la striation était l'apanage des éléments en voie de maturation et que cette disposition disparaissait, plus ou moins, chez les éléments mûrs.

Gibbes et Krause décrivirent à la queue du spermatozoïde humain une fine membrane ondulante.

En 1881, Retzius démontra que la queue des zoospermes présentait une partie inconnue jusqu'alors, et qu'elle se divisait en un *segment principal,* formant la majeure partie de cet appendice, et en un *segment terminal,* mince et court.

J'ai décrit une terminaison analogue aux fouets vibratiles de certains Flagellés.

Pour Brunn, ce segment terminal n'est autre chose que le bout libre du filament axial qui parcourt toute la queue et qui déborde le manteau pour saillir seul, en arrière.

Depuis 1886, Ballowitz a fait sur les spermatozoïdes une série de recherches du plus haut intérêt, dans lesquelles il a pu confirmer les résultats de ses prédécesseurs, les préciser et y ajouter des faits nouveaux.

On sait que les oiseaux présentent deux sortes de spermatozoïdes. La tête de ceux des chanteurs est en tire-bouchon. Le segment intermédiaire est très long. Il a vu le segment principal se décomposer en fines fibrilles. Le filament axial est constitué de deux fibres parallèles, formées elles-mêmes par un faisceau de fibrilles élastiques de la plus grande finesse. Les autres oiseaux, par exemple le Coq, ont une tête simple, une queue très courte, rarement droite, ordinairement irrégulière, avec des incurvations multiples et des ploiements à angles brusques. Il y a un petit segment intermédiaire et pas de segment terminal.

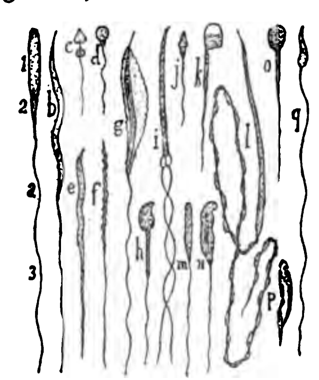


Fig. 32. — *Spermatozoïdes de Vertébrés.*

1. Tête. — 2. Partie moyenne. — 3. Queue. — *a*. Spermatozoïde de Lamproie. — *b*. de Torpille. — *c*. d'*Amphioxus*. — *d*. de *Cobitis*. — *e*. de Pinson. — *f*. de *Scyllium*. — *g*. de Hyla. — *h*. de Souris. — *i*. de *Bufo*. — *j*. d'Homme. — *k*. de Hérisson. — *l*. d'Axolotl. — *m*. de Coq. — *n*. du même, traité par l'acide acétique. — *o*. du Bélier. — *p*. du Bombinator. — *q*. de la Couleuvre.

Dans le segment terminal de beaucoup de Mammifères (1890), Ballowitz vit une division en quatre fibres qui, elles-mêmes ne lui parurent pas simples. Contrairement à l'opinion d'Eimer, il avance que le filament axial ne pénètre pas dans la tête; au-dessous de celle-ci, il se termine en un et quelquefois deux boutons réfringents.

En résumé, les spermatozoïdes ont généralement une forme générale filiforme, caractérisée par un bout renflé, ovalaire, contenant le noyau, la *tête* et une *queue*

locomotrice, protoplasmique, douée de mouvements ondulatoires très vifs, et divisée en plusieurs régions.

Les spermatozoïdes peuvent présenter la constitution cellulaire chez l'*Ascaris megalocephala,* où l'on trouve quatre formes de spermatozoïdes : une sphérique, une en cloche, une autre piriforme, une dernière conique; c'est la première forme qui est primitive, et les autres (formes mûres) sont seules capables de féconder. Dans ces dernières formes, le spermatozoïde est entouré d'une enveloppe, excepté à l'une de ses extrémités, dont le protoplasma rappelle, par sa striation en deux sens, la constitution du tissu musculaire, et qui, par opposition au pôle neutre ou ***hémisphère caudale,*** porte le nom d'***hémisphère céphalique*** ou ***pôle d'imprégnation;*** il contient un noyau brillant, allongé en bâtonnet, qui seul jouerait un rôle important dans la fécondation.

La tête des spermatozoïdes, en général, est mal connue. On la dit formée d'un noyau enveloppé d'une mince couche de protoplasma, contenant, en avant du noyau, le *spermocentre,* ou centrosome de la spermatide, élément dont Henking nie, du reste, l'existence.

J'ai étudié cet élément chez divers types, entre autres, chez le *Cavia,* et je donnerai ici une esquisse rapide de sa structure. La description détaillée formera le sujet d'un Mémoire spécial que je publierai avec M. le Dr Cannieu, mon élève et ami, avec la collaboration duquel ces recherches ont été faites.

Les spermatozoïdes du Cobaye présentent une longue queue et une fort grosse tête. La queue est constituée par ses parties typiques, segment intermédiaire, segment principal, segment terminal. Il est facile, relativement, d'y observer ces altermances claires et sombres qui la strient transversalement. Dans sa région axiale, se trouve une cavité tubulaire, divisée en alvéoles par de fines cloisons transversales. La couche protoplasmique qui entoure ce canal axial est le filament axial, qui se voit quelquefois constitué par quatre fibres qui peuvent peut-être elles-mêmes se décomposer en fibrilles et qui parais-

sent donc être de véritables faisceaux. Leur ensemble forme une couche entourant le conduit axial; sur sa coupe optique, cette couche présente ces alternances de parties claires et sombres déjà signalées. Il est donc probable que les fibrilles élémentaires qui les constituent ne sont pas homogènes et que leurs parties similaires se correspondent régulièrement dans les faisceaux qu'elles forment. Le filament axial est contractile. Il est recouvert par une couche périphérique, d'épaisseur à peu près équivalente, qui présente des caractères différents. Cette sorte de *manteau* montre des alternances claires et sombres, qui lui communiquent un aspect strié et qui, dans les théories courantes, seraient l'expression optique de l'existence d'un filament spiral à tours serrés et entre lesquels serait interposée une substance intermédiaire moins dense et moins colorable. L'étude de la maturation de cet élément montre bien que cet aspect est le résultat de l'existence d'une couche superficielle d'alvéoles, disposées en une série unique, qui tourne en spirale autour du filament axial, de telle sorte que leurs parois latérales se touchent et forment un ruban continu et spiral. La substance intermédiaire n'est autre chose que la série des cavités alvéolaires. Les éléments mûrs ne montrent que cet aspect et encore est-il difficilement visible; mais les spermatozoïdes moins avancés le présentent bien plus nettement. Il y a même, très souvent, chez ceux-ci, en un point du segment intermédiaire, un amas alvéolaire non employé, qui forme un renflement à structure absolument nette, et qui disparaît peu à peu par résorption. Si l'on peut arriver à décomposer cette couche en un filament spiral, cela s'explique fort bien, tant par sa constitution que par les procédés employés pour le faire voir. Ces procédés consistent en pourriture, macération, action de l'eau ou de la glycérine étendue, dilacération, etc., suivies de colorations intenses. Les traitements histologiques agissent probablement en dissolvant les parties les moins résistantes, c'est-à-dire les parties vésiculaires des alvéoles, en respectant généralement plus les parties les plus

résistantes, telles que les parois latérales, du reste mieux protégées par leur situation que les régions superficielles, d'où la production de fragments spiralaires d'origine double. L'existence de semblables bandes longitudinales inter-alvéolaires est, du reste, assez fréquente; les téguments contractiles d'une foule de Protozoaires en montrent des exemples remarquables. Il en a été question dans le premier chapitre. Il est à remarquer que ces parois résistantes correspondent aux zones sombres du filament axial, de telle sorte que, sur une coupe optique, il peut arriver qu'on pense ne voir qu'une seule couche aréolaire, s'étendant à toute l'épaisseur, alors que les deux couches existent sans aucun doute possible.

Dans le segment principal, des dispositions analogues sont à signaler, quoiqu'elles soient naturellement moins visibles; c'est surtout dans sa partie antérieure qu'on peut faire ces observations. Mais, dans cette région, les progrès de la différenciation et l'adaptation plus complète au rôle locomoteur ont masqué la structure et fait disparaître plus ou moins complètement les dernières traces de son aspect vésiculaire primitif pour le transformer en substance aplatie et essentiellement contractile. Cette adaptation correspond à des changements chimiques, qui sont déjà accusés par la force de résistance de cette région, et si dans le spermatozoïde en voie d'évolution on peut arriver à détacher le filament spiral, il n'en est plus de même dans l'élément mûr, où l'on obtient tout au plus une division de l'enveloppe en fragments transversaux. La surface extérieure du spermatozoïde est limitée par une zone hyaline d'une extrême minceur, telle que j'en ai signalé une chez certains Protozoaires (*Bulletin scientifique de la France et de la Belgique,* 1889). Cette fine assise périphérique paraît présenter quelquefois certains épaississements, pouvant même arriver à simuler une sorte d'arête spirale. J'ai dit plus haut que, d'après Eimer, il y aurait, entre la tête et le segment intermédiaire, une mince zone traversée seulement par le segment axial et qui relierait celui-ci à la tête, disposition parti-

culière à laquelle il a donné le nom de *cou;* de plus, entre ce même segment et le segment principal, il existerait une disposition analogue. Cette observation a certainement pour point de départ des phénomènes de destruction analogues à ceux qui constituent l'origine du filament spiral décrit par les auteurs. Entre la tête et le segment intermédiaire se trouve une petite région occupée par des aréoles vésiculaires et plus renflée que leurs voisines; la destruction de ces éléments donne lieu à ces zones transversales factices qui ont fait croire à l'existence d'un cou.

La tête présente une forme et une constitution fort mal connues jusqu'ici. On pense généralement qu'elle est formée d'un noyau enveloppé d'une mince couche de protoplasma. Récemment, on a encore intercalé dans ce schéma la présence d'un spermocentre qui serait placé en avant du noyau.

Chez le *Cavia,* la tête présente un renflement central et postérieur lenticulaire, bordé sur les côtés et en avant par une bande marginale aplatie et incurvée en manière de coiffe. Cette dernière partie est relativement considérable et présente une structure aréolaire déjà entrevue par les auteurs qui y ont décrit des bandes alternativement claires et sombres. Dans la portion renflée se trouve le noyau, qui, vu de face, est un corps arrondi et, vu de profil, présente l'aspect d'un bâtonnet, ce qui est dû à un aplatissement considérable. A l'intérieur de ce noyau se trouve un nucléole gros et d'aspect compact. Il n'y a donc pas de spermocentre en avant du noyau dans cette espèce. Le protoplasma se divise facilement en deux, selon une ligne qui suit exactement l'équateur de la région renflée. La partie antérieure emporte avec elle le bord courbe; la partie postérieure, qui donne insertion à la queue, présente alors, vue de face, une forme comparable à celle d'un calice qui contiendrait une hostie, ou d'un coquetier avec son œuf.

Je n'insisterai pas ici sur toutes les vues publiées sur l'origine des diverses parties des spermatozoïdes, par exemple, que le « Nebenkern » formerait le segment intermédiaire, etc.

L'ensemble de ce travail prouve, en effet, suffisamment que ces interprétations ont besoin d'être revisées. Je me contenterai d'indiquer quelques-unes des vues principales. D'après Bolles, Lee et F. Hermann, le centrosome naîtrait du noyau, chez les cellules sexuelles mâles, et Hertwig a affirmé le même fait pour l'*Ascaris megalocephala*. Benda décrit, dans la tête des spermatozoïdes des Mammifères, un noyau et, en avant de lui, une masse archiplasmique, formant le *bouton céphalique*. Dans les gonophores du *Cordilophora lacustris*, Schultze a observé, chez les spermatozoïdes incomplètement mûrs, outre le noyau, un petit corpuscule arrondi, très réfringent, à l'extrémité antérieure. Chez les Reptiles, Prenant a observé que le noyau accessoire coiffait la tête du spermatozoïde sous forme d'un petit chapeau pointu. Platner admet que le noyau accessoire est formé de deux parties, dérivées toutes deux du fuseau nucléaire. L'une d'elles naîtrait de la portion polaire du fuseau, c'est-à-dire du centrosome, tandis que l'autre proviendrait de la partie équatoriale et serait une formation spéciale aux cellules séminales, qui entrerait dans la constitution élémentaire du spermatozoïde ; il a appelé cette partie le *mitosoma* et il pense qu'elle devient l'enveloppe du filament axial, tandis que le centrosome proprement dit irait se placer au pôle antérieur pour former le bouton céphalique. Pour Henking, c'est le centrosome qui forme l'enveloppe du filament caudal ; le mitosoma se diviserait en deux parties : l'une antérieure, qui devient le bouton céphalique ; l'autre postérieure, qui disparaît par résorption. Le mitosoma, qui me paraît correspondre à l'archiplasma, est une formation spéciale à la cellule mâle, formation secondaire, produite dans un but particulier, qui, avec certaines parties différenciées du protoplasma, transforme le spermatozoïde en un organisme flagellifère. L'œuf étant immobile n'a pas besoin de mitosoma. — Bien d'autres vues plus ou moins analogues ont encore été publiées, surtout dans ces derniers temps.

Les spermatozoïdes sont parfois sujets au dimorphisme.

Chez le Triton, le Vermet, l'une des formes seule est apte à la fécondation; elle est filamenteuse. L'autre, vermiforme, possède, au lieu de queue, un fort bouquet de cils.

L'histoire du développement des spermatozoïdes a eu une évolution des plus laborieuses. Ces éléments prennent naissance, comme l'œuf, aux dépens d'une couche cellulaire d'origine péritonéale, l'*épithélium germinatif*. Chez les êtres inférieurs, la paroi de presque tous les points de la cavité périviscérale est susceptible d'en produire. Mais, chez les organismes élevés, chez les Vertébrés, par exemple, cette puissance se localise toujours en un organe spécial, le testicule.

Chez l'embryon, les très jeunes ébauches des organes sexuels ne paraissent pas différer du reste du corps et il est peu possible de leur assigner un caractère distinctif. Il peut cependant arriver que, dès les premiers stades du développement, dès la segmentation, on puisse les distinguer, sous la forme d'un petit nombre de cellules qu'on appelle *initiales sexuelles*, et certains auteurs croient possible de retrouver partout ces initiales, quoiqu'en fait elles ne paraissent pas différenciées des autres éléments et qu'elles ne se développent que plus tard, après la segmentation, comme tout autre organe.

D'après les anciens auteurs, le contenu du testicule ne consisterait qu'en une seule sorte de cellules, les *spermatides*, produites par les divisions successives des cellules fondamentales, les *spermatogonies*. Ces spermatogonies, éléments épithéliaux primitifs des canalicules séminaux, ne formeraient, dans le jeune âge, qu'une seule couche cellulaire. Mais, dès le début de la spermatogenèse, un certain nombre d'entre elles se multiplieraient, les produits de ces divisions envahiraient la lumière des conduits, et ceux de la dernière génération, souvent la troisième, seraient les spermatides ou cellules-mères des spermatozoïdes.

De nombreux observateurs n'ont pas tardé à démontrer que ce processus est susceptible de variations diverses et de grandes complications. Ainsi, dans une foule de cas, les spermatogonies

constitueraient des amas cellulaires à éléments disposés d'une manière radiaire, les *spermatoblastes*, proéminant dans les canalicules; les spermatoblastes bourgeonneraient des lobes à leur extrémité libre, et chacun de ceux-ci serait une spermatide. De plus, aux dépens d'autres cellules épithéliales, se développeraient des cellules arrondies, les cellules testiculaires indifférentes, ne concourant pas à la genèse des spermatozoïdes, mais contribuant à former le fluide qui remplit les canalicules.

Pour d'autres auteurs, la prolifération des cellules fondamentales constituerait des amas arrondis, ressemblant à des cellules multinucléées, entourés d'une membrane, et c'est dans ces amàs que se produiraient les spermatozoïdes.

Balbiani n'admet ni masses enveloppées ni spermatoblastes; d'après lui, les cellules testiculaires se multiplieraient, chacune formant une colonnette à structure radiaire, dont les cellules se transformeraient progressivement en spermatozoïdes; chaque colonne constituerait un faisceau d'éléments mâles.

Bien d'autres manières de voir ont encore été publiées. Ainsi, certains observateurs remarquant qu'on trouve dans les canaux séminifères deux sortes de cellules, les unes formant des ensembles rameux à structure radiaire, les autres libres et arrondies, ont admis que ces dernières seraient des *spermatides*, résultat de générations successives de cellules germinatives, et qu'elles formeraient les spermatozoïdes tandis que les premières leur serviraient de cellules de soutien. D'autres, au contraire, avancent que les cellules radiaires (spermatoblastes) forment les spermatozoïdes, les éléments ronds n'étant que des leucocytes immigrés et ne prenant aucune part à cette production; les cellules ramifiées proviendraient d'éléments disposés en réseau (réseau germinatif) et toujours reconnaissables, même à l'état jeune, sur les parois des canaux séminifères.

Von La Valette Saint-Georges pose une loi générale de la spermatogenèse; pour lui, les testicules contiennent deux sortes de cellules, les spermatogonies, qui formeraient les

spermatozoïdes et les cellules folliculaires. Les premières, accolées à la paroi des espaces testiculaires, bourgeonnent ou se divisent en *spermatocystes* qui continuent à se fragmenter pour produire des cellules ultimes, les *spermatides*, riches en chromatine, dépourvues de réseau nucléaire et donnant les spermatozoïdes. Cet enchaînement régulier est quelquefois rompu et les spermatozoïdes restent unis en groupes cellulaires entourés (spermatocystes) ou non (spermatogemmes) d'une enveloppe; la membrane provient des cellules périphériques de la masse, qui s'aplatissent, s'accolent et se soudent. Dès le début, les *cellules folliculaires*, ainsi nommées par de Graaf à cause de leur analogie avec celles du follicule ovulaire, sont distinctes des spermatogonies; elles ne jouent pas de rôle actif, forment une enveloppe cellulaire aux spermatocystes ou aux spermatogemmes, et correspondent aux cellules rondes citées plus haut.

Balbiani regarde les spermatogonies comme une sorte d'élément femelle, les cellules follicules comme un élément mâle. Pour lui, les cellules définitives résulteraient d'une sorte de copulation, tandis que, pour Kölliker, les cellules-mères des spermatozoïdes pourraient dériver directement de l'épithélium germinatif, des cellules épithéliales du corps de Wolff, mais surtout du mésoderme des premiers tissus testiculaires. D'après Mihalcovics, les rudiments mésodermiques de l'organe mâle seraient envahis dès le début du développement, par des cellules épithéliales germinatives, anastomosées en réseau, qui seraient l'origine des canalicules sexuels; plus tard se produirait une nouvelle immigration de grosses cellules sexuelles envahissant les canalicules préalablement constituées et formant les cellules séminales primitives (spermogonies, ovules mâles).

Ce développement ressemblerait donc à celui des œufs, puisque, d'après Kölliker, des cordons cellulaires venus du corps de Wolff pénètrent dans le mésoderme naissant de l'ovaire et forment les follicules de Graaf où immigrent plus

tard les ovules primitifs, nés de l'épithélium germinatif. On a attribué tour à tour aux trois feuillets embryonnaires la puissance de produire les cellules-mères des germes; cette propriété paraît généralement dévolue à l'épithélium cœlomique, c'est-à-dire au mésoderme.

D'après le résumé succinct et des plus incomplets qui précède, il est facile de voir combien la marche de la science

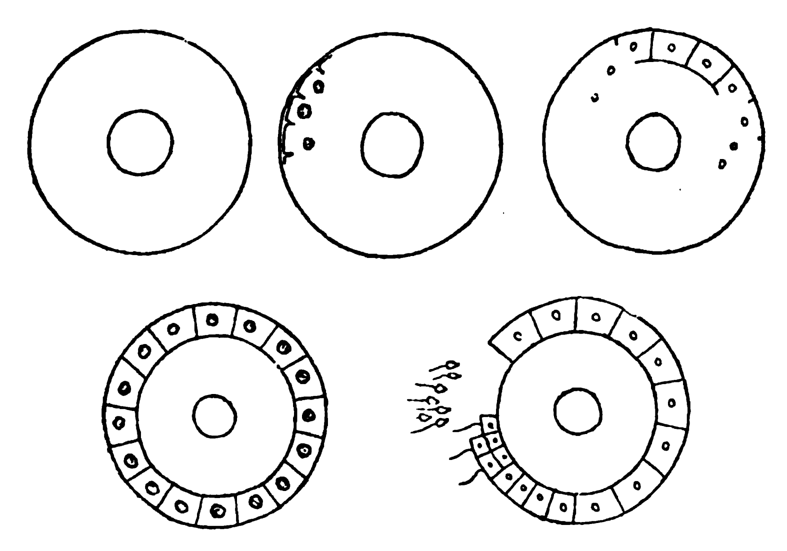


Fig. 33. — Stades théoriques de la formation des spermatozoïdes.

a été hésitante dans cette difficile question. Dans l'état actuel de nos connaissances, on résume souvent l'histoire du développement des éléments mâles en un certain nombre de traits principaux.

Après la différenciation des cellules germinatives primordiales, les *cellules spermatiques primordiales* ou encore *ovules mâles*, par comparaison avec les ovules primordiaux, se divisent un certain nombre de fois par voie mitotique; les derniers éléments ainsi formés sont les *spermatogonies*. Ce phénomène rappelle le bourgeonnement lorsqu'un élément central se divise en cellules périphériques plus petites. D'autres fois, un élément central grossit et sert de support à

l'ensemble, sans être appelé à devenir jamais la souche de spermatozoïdes; c'est le *cytophore*. D'après Julin, qui a observé ces divisions chez le *Styelopsis*, la substance du centrosome qui a provoqué la formation de la spermatogonie, contrairement à ce qui se voit pour l'ovogonie, rentre dans le noyau pour se fusionner avec sa charpente, et peu à peu, il se forme un nucléole. Pendant cette période de multiplication, entre deux divisions, il y a une phase de repos avec un léger accroissement en volume. De l'ensemble de ces phénomènes résultent des amas cellulaires (spermatogemmes, spermatocystes), dont les éléments s'accroissent et se reposent pour prendre un volume et une constitution propres et devenir des *spermatocytes de premier ordre* ou *protospermaties*.

Les deux phases décrites ci-dessus, celle de multiplication et celle d'accroissement et de repos, sont plus ou moins longues; elles ne dépendent pas directement de l'activité fonctionnelle. La phase suivante est courte et essentiellement fonctionnelle; elle aboutit à la formation des spermatozoïdes.

Les spermatocytes de premier ordre se divisent brusquement en deux fois successives; il se forme ainsi quatre éléments égaux : les *deutospermatocytes, deutospermaties* ou simplement *spermatocytes* ou *spermaties,* ou plus généralement *spermatides,* qui deviendront les spermatozoïdes. Ces divisions se présentent avec des caractères tout particuliers; après la première division, il n'y a pas de stade de repos entre la répétition du phénomène, et les éléments nouveaux se partagent simplement les chromosomes existants, de telle sorte qu'ils ne possèdent que la moitié des chromosomes caractéristiques de l'espèce. Ce phénomène de réduction de moitié dans le nombre des chromosomes des éléments mûrs est ce qu'on appelle la *réduction karyogamique*. Julin a observé chez le Styelopsis un fait qui ne se voit pas ailleurs. Les chromosomes primaires ne se dédoublent pas à la fin de l'accroissement de la spermatogonie, ce qui lui paraît attribuable au peu de développement de la charpente achromatique du noyau. A la fin de la période

d'accroissement, le nucléole disparaît, et on voit naître un élément paranucléinien, un centrosome qui se divise deux fois successives et entraîne la division du spermatocyte en quatre spermatides, contenant chacune un chromosome indivis, alors que le chiffre normal des chromosomes de cette espèce est de quatre. Pendant cette double division de maturation, il n'existe pas de fuseau achromatique, et déjà dans le spermatocyte, la charpente achromatique est fort peu développée, fait auquel peut être due la non-segmentation longitudinale des chromosomes primaires. La spermatide renferme encore un centrosome à côté du noyau, reste de celui qui a dirigé la division qui lui a donné naissance; mais cet état ne persiste pas toujours et le centrosome se résorbe, ou mieux disparaît, dans une foule d'espèces, tandis que dans d'autres il persiste, et il a été décrit dans le spermatozoïde lui-même (spermocentre).

On donne différentes interprétations du mode de transformation des spermatides en spermatozoïdes. Quelques-unes ont déjà été mentionnées plus haut. Pour les uns, les spermatozoïdes sont des éléments exclusivement nucléaires; pour d'autres, la tête seule provient du noyau et la queue du protoplasma de la spermatide; pour d'autres encore, le noyau cellulaire ne prendrait aucune part à ce phénomène. Mais tous les auteurs s'accordent, à peu d'exceptions près, pour reconnaître que le nucléole disparaît. Dans cette transformation en un élément mobile, la spermatide engendrerait un centrosome propre, le spermocentre, qui n'est donc pas l'homologue de l'ovocentre qui sera le centrosome de l'œuf fécondé. Les premiers auteurs auraient vu le noyau des spermatides allongé, avec une tête opaque et une queue plus claire; cette queue, d'abord enroulée dans le protoplasma, s'étendrait, puis sortirait de la cellule, pendant que disparaîtrait l'enveloppe protoplasmique. Pour les seconds, le protoplasma cellulaire s'allongerait en même temps que la queue et formerait son enveloppe. Enfin les derniers, confondant peut-être le noyau cellulaire avec le noyau accessoire, ont vu des spermatozoïdes

coexister dans les cellules-mères avec des noyaux non modifiés. Il se formerait, d'après eux, dans le protoplasma cellulaire, de petits corps brillants, chromophiles, d'origine extra-nucléaire, autour desquels se condenserait la matière plasmique qui formerait les têtes, tandis que le plasma formerait les queues des spermatozoïdes.

En général, on admet aujourd'hui que la spermatide s'allonge, qu'une portion de son protoplasma entoure la tête, tandis que l'autre s'effile pour constituer la queue. Le noyau diminue beaucoup de volume; sa portion chromatique se condense en une petite masse réfringente qui sera le noyau du spermatozoïde, et le centrosome se place au-devant de lui pour former le spermocentre.

La manière dont cette métamorphose se produit chez le *Styelopsis*, présente quelques traits intéressants. La spermatide est un très petit élément libre, sphérique, à noyau relativement volumineux, qui contient le quart de la chromatine du spermatocyte de premier ordre, et qui est pourvu, en outre, d'un centrosome, au moins à son origine. Dès les premières phases de la transformation de la spermatide en spermatozoïde, le centrosome disparaît. Puis le chromosome de la spermatide se désagrège en une foule de microsomes disséminés sans ordre apparent dans le noyau. La spermatide s'allonge, devient fusiforme, plus effilée à une extrémité qui sera la queue; le noyau prend la forme d'un croissant de structure compacte, qui s'accentue progressivement pendant que l'élément s'effile de plus en plus. Pendant ce temps, il s'y constitue, contre la membrane nucléaire, un petit corpuscule réfringent qui sortira du noyau et ira se loger à l'extrémité antérieure de la tête, accolé contre celui-ci, et formera le *centrosome spermatique* ou spermocentre, seul organe de la division de l'œuf fécondé.

La maturation du spermatozoïde consiste donc, essentiellement, en ce qu'il devient mobile et qu'il forme un spermocentre.

L'œuf présente une constitution qui peut être ramenée à

celle d'une cellule. Son protoplasma est le *vitellus*, son noyau, la *vésicule germinative*, son nucléole, la *tache germinative* et son enveloppe la membrane vitelline. C'est le plus grand élément du corps. Le cadre de ce travail ne nous permet pas d'esquisser, même superficiellement, les innombrables variations que peut présenter l'œuf, depuis l'état simple, où la constitution cellulaire est complètement apparente, jusqu'à l'état si complexe qui se voit, par exemple, chez les Oiseaux. Chez les Salmonides se voit une disposition intermédiaire entre ces deux états ultimes. Au pôle animal on observe une accumulation de vitellus de formation assez comparable à la cicatricule de l'œuf des Oiseaux, et ne correspondant pas exactement à la cicatricule; au pôle opposé, ainsi que dans la masse de l'œuf, le vitellus de nutrition l'emporte par son abondance.

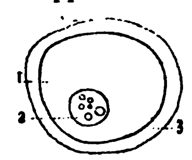


Fig. 34. — *Coupe théorique d'un œuf holoblastique.*
1. Vitellus. — 2. Vésicule germinative. — 3. Membrane vitelline.

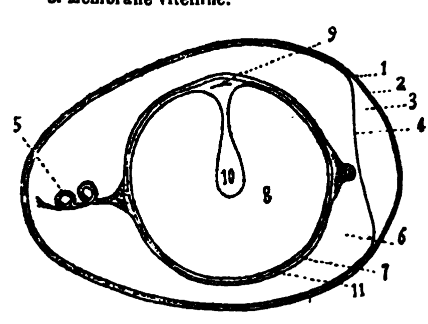


Fig. 35. — *Coupe théorique de l'œuf méroblastique des Oiseaux.*
1. Coquille. — 2. Feuillet externe de la membrane coquillère. — 3. Chambre à air. — 4. Feuillet interne de la membrane coquillère. — 5. Chaloz. — 6. Albumine. — 7. Membrane chalozifère. — 8. Vitellus jaune (deutolécithe). — 9. Cicatricule. — 10. Latebra. — 11. Membrane vitelline.

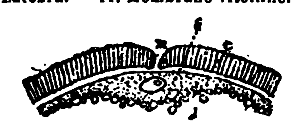


Fig. 36. — *Œuf à micropyle.*
a. Vitellus. — *c.* Coque. — *d.* Vitellus nutritif. — *m.* Micropyle.

Le développement de l'œuf présente des analogies remarquables avec celui des spermatozoïdes, et l'immense majorité des naturalistes n'hésite pas à y reconnaître des stades absolument identiques, à tel point qu'on accepte l'homologie des éléments mâles et femelles jusque dans les moindres détails de leur constitution et de leurs phénomènes évolutifs, et que l'on se

trouve autorisé à admettre que tout fait observé dans les uns doit avoir son correspondant dans l'autre. C'est donc principalement sur l'identité d'évolution des éléments mâles et femelles qu'est basée la conception de leur homologie absolue, malgré leurs différences de dimensions et de structure.

Les cellules germinatives primordiales, les *ovules primordiaux*, comparés aux cellules spermatiques primordiales ou ovules mâles, une fois différenciées, se divisent un certain nombre de fois pour former les *ovogonies* ou *ovoblastes*, homologues des spermatogonies ou spermatoblastes. Il se forme ainsi des groupes d'éléments, les *ovogemmes*, dans lesquels une cellule grossit et devient l'*ovocyte*, comparable au cytophore, tandis que les autres éléments l'enveloppent, pour se transformer en *follicule*, dont les fonctions sont nourricières et protectrices. Chez les animaux inférieurs, le processus est plus simple. Ainsi, chez les Polyclades, il se forme des groupes d'œufs

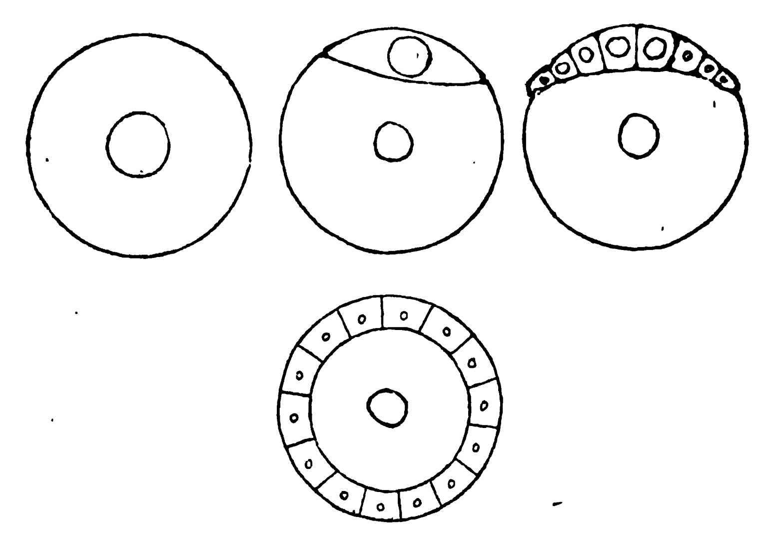


Fig. 37. — Stades théoriques de la formation de l'œuf.

souvent réunis dans une seule enveloppe, sans cette distinction primitive en follicule et en œuf proprement dit; mais un seul œuf arrive à se développer, tandis que les autres servent à sa

nourriture, phénomène qui peut même se présenter chez certains Gastéropodes (Néritines). Chez les Vers plats, les vitellogènes sont morphologiquement des ovaires, dont les éléments ne se transforment pas en œufs, mais en cellules nutritives.

L'évolution de l'œuf et celle du spermatozoïde poussent encore plus loin leurs caractères semblables, et, jusqu'au bout, jusqu'à la maturité, les mêmes faits se répètent. De même que le spermatocyte de premier ordre se divise en quatre éléments nouveaux, les spermatides, de même on observe dans l'œuf ou *ovocyte de premier ordre* en voie de maturation un phénomène de double division qu'on a rapproché de ce processus, et qui consiste dans la formation des *globules polaires,* de telle sorte que la spermatide correspondrait à l'œuf mûr ou ovule, ayant produit ces globules. Les spermatides se métamorphosent en spermatozoïdes, transformation qui n'existe pas dans l'œuf.

Dans la jeune ovogonie, on ne tarde pas à perdre de vue le centrosome, qui se résorberait, d'après Julin, dans le noyau, ou plutôt dans le protoplasma. D'autres fois, il ne disparaît que plus tard, et forme alors un corps particulier, dont il sera question dans un autre chapitre. Dans la spermatogonie du *Styelopsis,* le centrosome rentre à l'intérieur du noyau, avant l'apparition du nucléole. L'ovogonie s'accroît rapidement; son centrosome s'accroît plus que dans celle-ci qui, elle-même, a un développement bien moindre et, au deuxième temps de cet accroissement, intervient une réduction de la vésicule germinative, qui aboutit à la constitution de l'ovocyte de premier ordre. Le diamètre de cette vésicule se réduit peu à peu, son enveloppe se détruit plus ou moins par un processus particulier, et elle prend une forme irrégulière, par le ratatinement de celle-ci, qui finit par disparaître. Il finit par ne plus persister que la zone centrale du noyau, avec ses chromosomes, la charpente achromatique paraissant absorbée par le protoplasma. Le nucléole s'altère, pâlit, se colore difficilement, se vacuolise, sa paroi propre se résorbe; parfois, il se fragmente et il se résorbe dans le protoplasma de la cellule. L'œuf mûr

est un volumineux élément dépourvu de centrosome, pourvu d'un noyau ovulaire qui, à cause de la formation des globules polaires, où il se passe un phénomène analogue à celui qui se présente dans la formation des spermatides, contient le quart de la quantité de chromatine contenue dans l'ovocyte de premier ordre.

A la fin de la maturation des éléments sexuels, mâles ou femelles, on observe donc deux brusques divisions qui ont pour effet de les transformer en éléments qui n'ont plus la constitution normale, et de les rendre dissemblables aux cellules ordinaires. Pour cette raison, Van Beneden a proposé de les désigner sous la dénomination de *gonocytes,* de telle sorte qu'il existe des *gonocytes mâles* ou des *gonocytes femelles;* il appelle spermatogemme l'ensemble des quatre spermatides nées d'un même spermatocyte de premier ordre et oogemme l'œuf et ses globules polaires.

L'interprétation, énoncée plus haut, d'après laquelle les stades du développement des éléments reproducteurs sont plus ou moins identiques dans les deux sexes, peut paraître pouvoir être modifiée dans certains cas, notamment lorsqu'on considère le développement des spermatozoïdes à la surface d'un cytophore. On pourrait, en effet, arriver à des conclusions rappelant la comparaison que font souvent les anatomistes entre le développement des organes mâles et femelles eux-mêmes. On sait que, dans les deux sexes, il se forme d'abord une ébauche des organes reproducteurs qui est identique, et ce sont les transformations ultérieures de cette ébauche qui amènent à leur suite la *différenciation des sexes*. Dans l'un des deux sexes, c'est une partie des organes contenus dans l'ébauche indifférente qui continue à se développer; dans l'autre, c'est une autre portion, tandis que, dans les deux cas, les parties sans avenir persistent à l'état d'organes rudimentaires, de vestiges de l'état primitif. Ce fait peut amener à supposer l'existence d'un état d'hermaphrodisme antérieur, peu à peu effacé par l'évolution. De même, on pourrait

être tenté d'admettre que les éléments sexuels primitifs sont hermaphrodites et qu'ils se débarrassent dans leur évolution des parties appartenant au sexe opposé au leur. Les parties mâles se rendent à la périphérie, tandis que les portions femelles restent centrales. Chez la femelle, ce sont ces dernières seules qui se développent, et les cellules périphériques forment le follicule; chez le mâle, le contraire a lieu. Cette hypothèse est spécieuse. Mais, dans l'état actuel de la science, vu principalement le manque de généralité suffisante de la formation des spermatozoïdes à la surface d'un cytophore, elle n'est peut-être pas suffisamment basée sur les faits pour pouvoir être acceptée sans réserves.

V

Noyau vitellin et noyau accessoire.

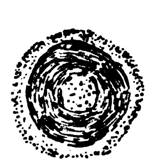
En étudiant l'œuf ovarien de la *Tegenaria domestica,* Von Wittich, en 1845, y découvrit un élément figuré particulier que Balbiani (*Journal de l'Anat.*, fig. 38, 39, 40, 46, 64) a retrouvé chez une foule d'espèces, et auquel on attribue les différentes dénominations de ***noyau vitellin, vésicule embryogène, vésicule de Balbiani*** (Dotterkern).

Cet élément est caractérisé par une variabilité remarquable; sa constitution paraît être fort diverse; sa durée, souvent des plus réduites, est telle, dans d'autres cas, qu'on peut la retrouver jusque chez de jeunes araignées écloses; enfin, sa présence ou son absence paraissent n'être soumises à aucune règle bien fixe, des espèces voisines pouvant ou non le présenter.

Les interprétations les plus diverses ont aussi été émises sur sa nature. Les premiers observateurs, tels que Von Wittich, Carus, Von Siebold, et d'autres, le considérèrent comme un véritable élément histologique intra-ovulaire, cellule ou noyau, et lui attribuèrent un important rôle dans la formation du vitellus; ils admettaient que c'est autour de lui que se constituent les éléments du germe, d'où la dénomination de vésicule embryogène. Schütz, Schimkevitch, etc., lui dénient au contraire toute importance et ils en font un simple amas, sans signification physiologique bien nette. Enfin, le grand nombre des naturalistes, parmi lesquels on peut citer Leuckart, Korschelt et Heider, Bertkau, Ludwig, Kishinouye, etc., réservent leur opinion jusqu'à plus ample informé.

A un certain état de développement, le noyau vitellin se

compose d'une partie centrale, constituée par une vésicule délicate, et d'une portion périphérique, formée de lamelles minces et concentriques, emboîtées les unes dans les autres.



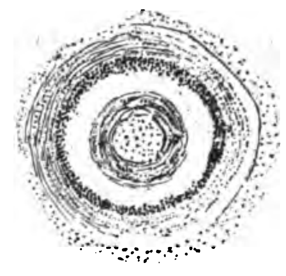


Fig. 38, 39 et 40. — Noyaux vitellins de Tegenaire.

La vésicule centrale contient souvent un gros globule pâle, muni de granulations, de telle sorte que l'ensemble a l'apparence d'un noyau à nucléole central ou situé près de la paroi. C'est là, du reste, l'interprétation à laquelle se sont arrêtés Von Siebold, Carus et Balbiani, et c'est là aussi la raison pour laquelle a été adoptée la dénomination de noyau vitellin. L'enveloppe à structure concentrique qui accompagne cette vésicule présente les caractères les plus variables. Les lamelles peuvent être nettes et serrées, ou confuses et lâches; elles peuvent manquer, et la couche est alors homogène ou granuleuse, ou, alternativement, homogène puis lamellaire [1]; les dimensions de cette couche peuvent être considérables ou réduites et sa forme



Fig. 41. — Follicule de Graaf de jeune Chatte.

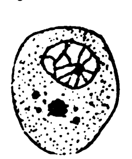


Fig. 42. — Ovule de jeune Cobaye.

[1] Cette alternance montre bien que la couche protoplasmique métamorphosée n'est pas transformée sous l'influence exclusive, ainsi qu'il sera dit plus loin, du centrosome, mais que c'est plutôt là un état d'organisation du protoplasma lui-même. Quand les cloisons rayonnantes des alvéoles se disposent en files, on observe des asters; quand ce sont les cloisons transversales, on observe des lignes concentriques.

régulière ou irrégulière et excentrique. L'aspect de lames concentriques manque chez la plupart des autres Aranéides et le protoplasma de ces formations est homogène avec une couche granuleuse à son pourtour. Dans ces cas, il est constitué par une substance moins dense; il disparaît aussi plus vite, et, dans les stades avancés de l'œuf, on ne le voit plus. Chez certaines espèces où l'on pensait qu'il faisait défaut, Sabattier a pu le déceler *(Epeira, Pholcus)*. Il en est cependant où on ne l'a jamais vu. Pour Balbiani, ce n'est pas là une partie constitutive du noyau vitellin, mais bien une enveloppe protoplasmique appartenant au vitellus et résultant de la condensation successive de couches de celui-ci autour de la vésicule, phénomène qui tire son origine d'une action attractive de cette dernière, qui est analogue à l'action du centrosome de la cellule ordinaire. Même, chez le Géophile, on constate le même aspect irradié qui caractérise l'action du centrosome. Si chez les Araignées ce rayonnement manque, ce n'est pas là un fait isolé, et une foule d'éléments anatomiques et même des plantes nous en fournissent un exemple.

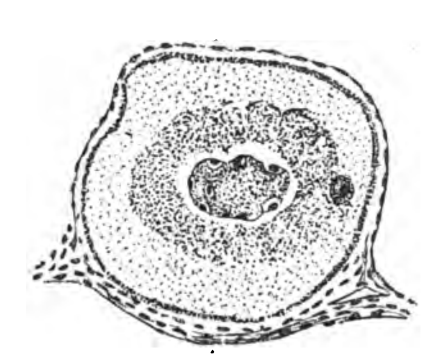


Fig. 43. — Follicule ovarien de Truite.

Le corps vitellin de Balbiani a été retrouvé chez les êtres les

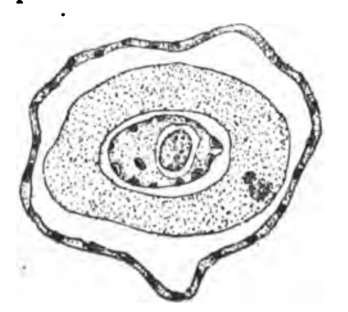




Fig. 44 et 45. — Ovule jeune de *Syngnathus acus*.

plus divers; on le voit d'une façon à peu près constante dans une espèce donnée, quoiqu'il puisse ne pas exister dans toutes les espèces voisines. Sa structure montre partout une variabilité rappelant ce qui se voit chez les Araignées. Récemment, Henneguy l'a vu chez le Chat, le Cobaye, la Truite, etc. (fig. 44). Cependant, en général, il est constitué d'un corps central, entouré d'une couche protoplasmique, et il ressemble donc à une cellule. Chez le *Rana temporaria,* il est très hypertrophié et présente une constitution rappelant celle du noyau du *Loxophyllum.*

En général, il n'apparaît que quand l'ovule primaire a cessé de se multiplier, au début de la période d'accroissement. Chez les Vertébrés, il disparaît de bonne heure, lorsque l'œuf est encore peu développé; mais, chez les êtres inférieurs, il persiste plus longtemps et peut se rencontrer dans l'œuf, ou même dans l'embryon, ou encore dans le petit éclos. Quant à sa durée, les auteurs sont fort partagés. Carus, Schütz, Sabattier, Schimkevitch ont pensé qu'il disparaît toujours à la maturité de l'œuf, tandis que Von Wittich a affirmé l'avoir vu dans l'œuf pondu, et Kiskinouye et Locy dans l'œuf en voie de développement embryonnaire; enfin, c'est Balbiani qui l'a vu jusque chez la petite Araignée, plusieurs jours après l'éclosion.


Fig. 46. — Noyau vitellin à structure interne double.

Le corps vitellin n'est pas toujours unique, et, dans bien des cas, on rencontre des formations doubles. Schütz a vu le premier exemple de ce genre chez les Aranéides, avec tous les états intermédiaires de division entre cet état double et une simplicité complète. Cette division rappelle celle du centrosome. Depuis, Balbiani a revu les mêmes faits chez une foule d'animaux, tels que la Poule, le Moineau, la Grenouille, les Araignées, etc.

L'origine du corps vitellin est comprise de diverses façons par les observateurs qui s'en sont occupés. Je me contenterai de donner ici les derniers résultats.

Pour Henneguy, c'est là probablement une partie de la tache germinative, du nucléole, ou celui-ci tout entier, qui sort de la vésicule germinative et va se loger dans le vitellus, mais sans qu'il ait observé effectivement cette sortie. Ainsi, chez le *Syngnathus acutus*, le noyau des ovules présente un grand nombre de « taches germinatives », tapissant la membrane, plus une petite masse finement granuleuse au centre. Dans le protoplasma se voit un corpuscule arrondi, réfringent, comme les taches germinatives, et qui serait probablement une de ces taches germinatives sorties du noyau (fig. 41, 42, 43, 44 et 45).

Julin émet des doutes sur la nature paranucléinienne de ces « taches germinatives ». Pour lui aussi, le noyau vitellin est d'origine intra-nucléaire et même d'origine nucléolaire; mais le véritable nucléole, caractérisé par les réactions de la paranucléine, n'est pas l'homologue de ces taches, qui sont des amas de chromatine. Le nucléole se dissoudrait dans le noyau, au préalable. Puis, aux dépens au moins d'une partie de sa substance, il se formerait dans le protoplasma un élément paranucléinien, qui serait le corps vitellin.

Balbiani a varié dans ses opinions sur l'origine du noyau vitellin. Il avait cru d'abord que le noyau vitellin pourrait bien être une cellule folliculaire qui aurait pénétré au sein de l'œuf en refoulant le vitellus, et, comme signification théorique de ce fait, il avait été tenté de considérer ce phénomène comme une sorte de fécondation préalable, dans certains cas suffisante pour permettre le développement de l'œuf. Ainsi se trouvait expliquée la parthénogenèse qui se serait produite chaque fois que l'excitation due à la vésicule embryogène aurait été assez forte pour ne pas nécessiter l'attente de la fécondation sexuelle. Plus récemment, perfectionnant sa théorie, il a cru reconnaître que la vésicule embryogène était bien une cellule du follicule, qui, issue avec d'autres du bourgeonnement de la vésicule germinative, n'était pas sortie du vitellus, pour former le follicule, mais seule était restée dans l'œuf pendant que les autres s'étaient portés à la périphérie.

Par des recherches récentes, il a fait avancer nos connaissances sur l'origine du noyau vitellin d'un pas décisif.

Une coupe d'ovaire de jeune Tégenaire, alors que les ovules commencent à peine à se différencier des cellules épithéliales de la couche germinative, montre une petite partie du noyau se séparant sous forme d'un minime petit bourgeon sphérique qui est d'abord placé à côté du noyau et apparaît, comme lui, sous forme de vésicule claire, à contenu granuleux. Le phénomène paraît avoir les apparences d'une bipartition inégale du noyau. Puis ce corpuscule s'éloigne, s'entoure de substance vitelline pâle et transparente, qui se condense bientôt en une zone dense et réfringente où apparaissent bientôt des stries concentriques fines, d'abord près de la vésicule, puis s'étendant vers la périphérie. Cette zone se perd d'abord insensiblement dans le vitellus à son pourtour, par des couches de moins en moins visibles. Ce dépôt de vitellus ne se fait généralement pas, tout d'abord au moins, d'une façon régulièrement circulaire autour de la vésicule centrale; il se produit plus abondamment d'un côté, celui qui regarde la vésicule germinative. L'espace qui sépare celle-ci de la première est donc de plus en plus envahi par ce vitellus transformé, qui finit par arriver au



FIG. 47. — Ovaire de jeune Araignée.

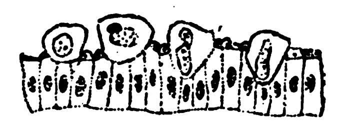


FIG. 48. — Paroi ovarienne de jeune Araignée prise dans la région à cellules épithéliales courtes.



FIG. 49, 50, 51 et 52. — Jeunes follicules ovariens d'Araignée au début de leur formation.

contact avec elle. Ensuite, il s'en sépare pour aller se loger plus loin dans le protoplasma, et, à ce moment, ce corps présente au moins le volume de la vésicule germinative. Au sein de son enveloppe striée, la vésicule centrale s'est agrandie jusqu'à atteindre le tiers du diamètre total. Le corpuscule situé à l'intérieur de cette vésicule est devenu bien visible; il apparaît

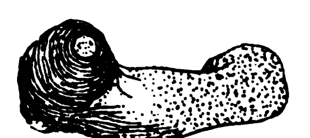




FIG. 53. — Noyau vitellin irrégulier.

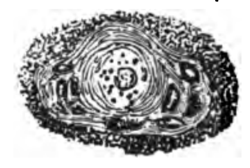




FIG. 54 et 55. — Noyau vitellin dont les couches concentriques représentent des bulles gazeuses.



FIG. 56. — Noyau vitellin un peu écrasé.

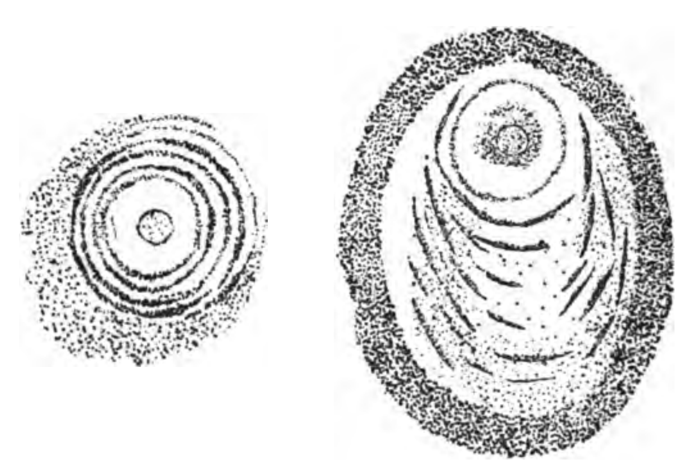


FIG. 57 et 58. — Noyau vitellin de *Lycosa campestris.*

comme une sorte de nucléole. Le protoplasma concentrique se teint vivement par la safranine, et les « taches germinatives » du noyau seules se colorent autant; la vésicule centrale se colore d'une manière moins intense, et le protoplasma encore

moins. Le corps vitellin est donc une formation d'origine nucléaire.

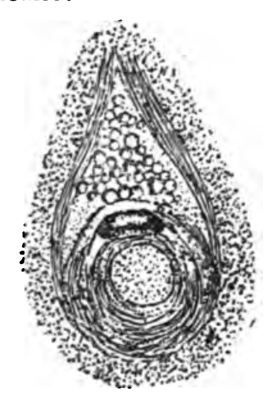


FIG. 59. — Noyau vitellin de *Lycosa saccata*.

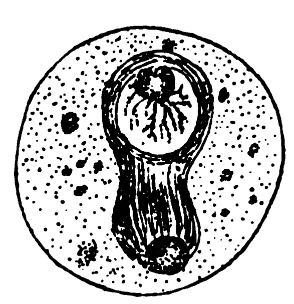


FIG. 60. — Ovule jeune de *Geophilus carpophagus*.

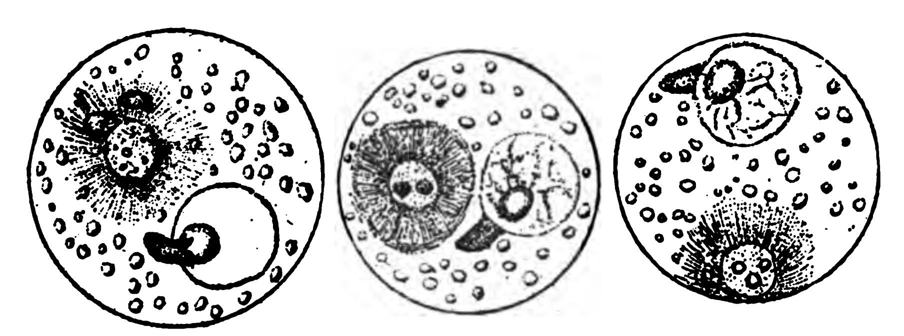


FIG. 61, 62 et 63. — Ovules jeunes de *Geophilus longicornis*.



FIG. 64. — Ovule de *Geophilus carpophagus*.

Dans les éléments spermatiques des testicules, là où ils ont été minutieusement observés, on trouve à peu près toujours un corps particulier, d'abord observé par Von La Valette

Saint-Georges, logé dans le protoplasma, le *noyau accessoire* (Nebenkern). Comme le noyau vitellin, cet élément présente les plus grandes variations, suivant les saisons, l'âge, les différents stades de l'évolution, ou suivant les individus observés, soit de la même espèce, soit d'espèces différentes. Ce peut être un corpuscule homogène ou strié, une vésicule granuleuse, ou une masse irrégulière. Chez l'Escargot, Platner, Prenant et Hermann l'ont vu sous l'aspect d'une sorte de masse de filaments courbes ou flexueux, aspect revu par Bolles Lee chez les Némertiens et le *Sagitta,* par Prenant chez la Scolopendre, par F. Hermann chez le *Proteus,* et ce dernier donne à ces filaments le nom de *lignes archoplasmiques.* La Valette Saint-Georges et Henking ont décrit, chez la Blatte et le *Pyrrhocoris,* un noyau accessoire affectant une apparence d'anneau ou un aspect lamellaire concentrique, rappelant la structure concentrique de l'Araignée. Henneguy suppose que c'est là déjà la queue du spermatozoïde enroulé. Pour Henking, ces anneaux ou ces lamelles résulteraient de la fusion des granulations du noyau accessoire en couches concentriques qui, ensuite, se transformeraient en une substance homogène ou finement granuleuse. Balbiani pense que l'aspect fibreux ainsi que ces diverses structures concentriques sont probablement en rapport avec la régression de ces corps; chez le Géophile, il a souvent vu autour du noyau accessoire une zone protoplasmique à aspect radiaire, entourée elle-même, dans certains cas, de cercles granuleux concentriques. Chez l'*Ascaris megalocephala,* Van Beneden et Julin ont vu, dans la zone protoplasmique située autour du noyau accessoire qui est appliqué contre le noyau, les granulations disposées de manière à figurer, à la fois, des rayons et des demi-cercles concentriques (1).

(1) Ces deux aspects s'expliquent par la disposition opposée, dans les deux cas, des alvéoles protoplasmiques. Dans les protoplasmas radiaires, les parois rayonnantes se correspondent en ligne droite, tandis que, dans les structures concentriques, ce sont les parois transversales qui présentent cette disposition.

De ce qui précède, il résulte que le noyau accessoire et le noyau vitellin ont une grande analogie de structure. Or, l'origine nucléaire de celui-ci est maintenant établie. Il est donc important de déterminer celle du premier.

Quelques auteurs regardent le noyau accessoire comme une production protoplasmique; tels sont, par exemple, Von La Valette Saint-Georges (première opinion), Balbiani (1869), Metschnikoff, Nussbaum, Keferstein, Pictet. Pour d'autres, par exemple, Grobben, Bolles Lee, Platner, Prenant, Henking, F. Hermann, il proviendrait du noyau, mais sans qu'il y ait univocité sur son mode précis d'origine, car les uns pensent qu'il dérive du noyau au repos, tandis que le reste admet qu'il provient du noyau en voie de division. Chez le *Sagitta*, Bolles Lee a figuré, avant le début de la spermatogenèse, à l'intérieur du noyau d'une spermatide, deux petits globules semblables à des nucléoles et un corpuscule tout semblable dans le protoplasma cellulaire; dans d'autres cas, ce corpuscule est encore à l'intérieur du noyau, ou en voie d'en sortir, ou déjà dehors, et ces figures rappellent ce qui se voit chez les Araignées. Hermann publie des figures sur la Salamandre rappelant le même aspect; dans toutes les cellules d'un même spermatocyste, préalablement à leur multiplication par division hétérotypique du noyau, le noyau accessoire était déjà dans le protoplasma sous la forme d'un globule incolore, et la membrane nucléaire envoyait vers ce corps un prolongement. De là, il paraît logique de conclure que le noyau accessoire était d'abord renfermé dans le noyau, sous forme d'élément non colorable, puis qu'il en est expulsé, ce qui est indiqué par le prolongement de la membrane nucléaire qui est amincie en face du point où il est placé, et l'origine nucléaire du noyau accessoire paraît bien établie.

Malgré cela, l'accord est loin d'être fait sur cette difficile question, et une foule d'auteurs font naître le noyau accessoire d'éléments qui se constituent pendant la division mitotique. Ainsi, pour Platner et Henking, le noyau accessoire dériverait

du fuseau achromatique du noyau par transformation directe; pour Von La Valette Saint-Georges et Prenant, ce fuseau s'incorporerait préalablement au protoplasma cellulaire, sous forme de cytomicrosomes. D'après des vues plus récentes, Platner admet que cet élément est formé de deux parties, dérivées toutes deux du fuseau nucléaire, mais d'une manière spéciale. L'une d'elles naîtrait de la portion polaire du fuseau, c'est-à-dire du centrosome, tandis que l'autre proviendrait de la partie équatoriale et serait une formation spéciale aux cellules séminales, qui entrerait dans la constitution élémentaire du spermatozoïde; c'est cette partie qu'il a appelée *mitosoma*. De même, Henking, d'après ses études sur le *Pyrrhocoris*, fait aussi dériver des filaments nucléaires du noyau, lors de la deuxième division des spermatocytes, le noyau accessoire et le mitosoma; mais son interprétation diffère. Il établit une distinction entre les filaments achromatiques du fuseau et les filaments unissants qui renferment de la chromatine. Ces derniers seuls, ou, du moins, en majeure partie, sont employés pour la formation de ces parties. Les faisceaux périphériques des filaments unissants, avec quelques filaments du fuseau, constituent le noyau accessoire; le faisceau central donne naissance au mitosoma. Celui-ci entre dans la constitution de la tête du spermatozoïde et se place en avant du noyau. Le noyau accessoire devient partie intégrante du filament caudal; mais il ne serait pas l'équivalent du centrosome, comme le veut Platner. Malgré toutes les notes dissonantes, Platner en est arrivé à admettre que le noyau accessoire est l'homologue des sphères attractives avec leurs centrosomes, de l'archoplasma de Boveri, des périplastes-filles de Vejdovsky. F. Hermann a vu, en effet, dans les spermatocytes de la Salamandre, que le noyau accessoire se comporte comme une sphère attractive pendant la division cellulaire. A l'état de repos, c'est une masse discoïde, irrégulière, constituée par du protoplasma foncé, appliquée contre un des côtés du noyau. Au début de la division, apparaissent dans cette masse deux

centrosomes, sans qu'il puisse affirmer qu'ils soient issus de la division du centrosome primitif, d'où rayonnent des filaments qui les unissent entre eux et avec les chromosomes du noyau, ainsi que Van Beneden l'a déjà vu dans les sphères de segmentation de l'*Ascaris megalocephala*. Il paraît donc bien avéré que, pour les Vertébrés inférieurs, ainsi que Platner l'avance, du reste, pour les Invertébrés, le noyau accessoire a la valeur d'une sphère attractive. Pour les Vertébrés supérieurs, Reptiles, Oiseaux et Mammifères, les résultats ont été identiques. Benda a vu dans la tête du spermatozoïde le noyau, et l'archiplasma dans le bouton céphalique. Prenant, chez les reptiles, a observé que le noyau accessoire coiffait la tête du spermatozoïde, sous forme d'un petit chapeau pointu.

En résumé, le noyau accessoire paraît représenter les sphères attractives, avec leurs centrosomes, des cellules ordinaires, et tout semble démontrer que le noyau vitellin est lui-même l'homologue de ces éléments.

D'après tout ce qui précède, le noyau et le noyau accessoire sont des éléments fondamentaux qui ont leur équivalent dans toutes les cellules. Lorsque le noyau accessoire paraît manquer, le noyau cellulaire renferme un corpuscule particulier, le nucléole, qui, après s'être divisé, se rend dans le protoplasma cellulaire, et devient le centrosome, organite directeur de la division. Cet élément, qui présente la réaction de ces corps, peut persister plus ou moins longtemps dans le protoplasma ou le noyau et paraître ainsi sortir de la règle générale, de façon à susciter les différentes interprétations mentionnées. Ainsi, le noyau vitellin des Aranéides ne serait autre chose que cet organite ne rentrant plus dans le noyau, persistant dans le protoplasma et y subissant une évolution régressive. Ce qui distingue les corpuscules directeurs des éléments sexuels de ceux des cellules ordinaires, c'est que leur volume est plus considérable, et que, tandis que celles-ci se comportent généralement d'une façon beaucoup plus normale, les premiers s'écartent plus souvent de la voie ordinaire. De même que les

noyaux sexuels sont plus grands que les noyaux ordinaires et que le noyau femelle est le plus grand, les centrosomes sexuels sont plus grands que les centrosomes ordinaires, et le femelle est le plus considérable. D'ailleurs, l'ovule est généralement beaucoup plus grand que les autres cellules et, de plus, chargé de granulations nutritives.

Au point de vue théorique, cette interprétation n'est, du reste, pas nouvelle. Nussbaum, dès 1882, avait déjà énoncé cette homologie; mais il a eu le tort d'assimiler, sous la même dénomination, des formations diverses, notamment toutes les enclaves contenues dans les cellules les plus diverses, et même des productions parasitaires. L'homologie du noyau vitellin avec le noyau accessoire et le centrosome paraît peu douteuse. Ces corps ont la même structure; ils se divisent les uns comme les autres. En effet, Platner, dans les spermatocytes des Lépidoptères décrit un noyau accessoire formé d'un corps réfringent, entouré d'une zone claire, cerclée elle-même d'une rangée de granulations foncées. C'est exactement l'aspect que Balbiani décrit au noyau vitellin des Araignées et du Géophile, ainsi que Platner à celui de l'Aulastome et des Gastéropodes pulmonés. Dans une foule de cas, au moment de son apparition le noyau vitellin se présente sous la forme d'une petite masse sphérique, ou, lorsqu'il est appliqué contre le noyau, il a la forme déjà signalée d'un croissant. Prenant, chez la Scolopendre, les Gastéropodes pulmonés et les Reptiles, Von La Valette Saint-Georges, chez la Blatte et la Forficule, Korotneff, chez l'Alcyonelle, Balbiani chez le Ver à soie et la Lépisme saccharine, et d'autres, ont vu cet élément contenant une vésicule claire appliqué en croissant contre le noyau et offrant une ressemblance frappante avec le noyau vitellin des jeunes Araignées. Il est vrai qu'à une période plus avancée de son développement, le noyau vitellin ressemble de moins en moins à un noyau accessoire. D'abord les dimensions réciproques deviennent de plus en plus dissemblables. Le centrosome, surtout, devient différent. Dans les éléments

mâles, il a toujours l'aspect d'un corps réfringent, ne changeant pas de dimensions; le noyau vitellin s'accroît en même temps que l'œuf. Cela amène souvent une différence considérable dans les dimensions du centrosome, qui est un petit globule homogène, et la vésicule interne du noyau vitellin, qui peut avoir un volume plus ou moins considérable. Mais il est aussi des nucléoles qui sont énormes, et des centrosomes fort grands; tel est le cas de ceux que Van der Stricht a observés dans les cellules cartilagineuses du limaçon du jeune Chat, et dans des cellules analogues de la larve de Salamandre.

Le centrosome, le noyau accessoire et le corps vitellin sont des équivalents morphologiques, qui ont une évolution et des destinées assez variées. Ce sont des produits de la division du nucléole vrai. Celui-ci persiste aussi généralement dans le noyau de cellules au repos, et même dans des éléments très différenciés, où, par conséquent, il n'a plus de rôle actif. On peut citer comme exemple les cellules nerveuses ganglionnaires qui ont des nucléoles énormes; les néoformations à accroissement rapide (Kosinsky) ont aussi des nucléoles hypertrophiés *(plasmosomes)*.

Après la transformation de la spermatogonie en spermatocyte de premier ordre, le noyau accessoire persiste, et c'est lui qui constitue le centrosome qui préside à la double division de maturation du spermatocyte; après cela, pour Julin, il se résorbe.

Le corps vitellin n'est autre chose, d'après Julin, que l'un des deux centrosomes de la cellule germinative mère de l'ovogonie, celui qui a provoqué la formation de l'ovogonie. Lorsque l'ovogonie est devenue ovocyte de premier ordre, il disparaît ordinairement, probablement par résorption dans le protoplasma ou dans le noyau et ne contribue donc pas, chez les Ascidies, à la formation des globules polaires qui se produisent sans l'intervention des centrosomes. Chez d'autres espèces, il est probable qu'il rentre purement et simplement dans le noyau pour former le nucléole. C'est là une différence

notable avec la division cellulaire ordinaire, pouvant jeter quelque lumière sur ce processus. Quand ce centrosome persiste et se résorbe plus lentement, c'est un corps vitellin; mais, tout en persistant, il montre des signes évidents de dégénérescence.

Balbiani montre, chez les Araignées, comment le corps vitellin perd ses propriétés physiologiques; c'est pour lui une *dégénérescence hypertrophique*. L'œuf, au terme de sa période de multiplication, ne fait plus que s'accroître et accumuler des matières de réserve pour l'embryon; tous ses éléments en profitent, car ils sont inactifs et bien nourris, d'où le centrosome devient énorme. Dans les cellules mâles, les conditions sont fort différentes. On y constate une grande activité fonctionnelle, de nombreuses divisions, d'où une grande pauvreté en protoplasma et de petits centrosomes.

Le développement hypertrophique du corps vitellin n'est pas un fait isolé, et les exemples de noyaux, corps dont il dérive, qui présentent des tendances vers une augmentation de volume, ne sont pas rares. On peut citer les énormes noyaux des glandes cutanées de la queue du Triton, ceux des cellules glandulaires des Insectes, les noyaux bourgeonnants des cellules de la rate, des cellules géantes du foie embryonnaire, les grandes vésicules germinatives des jeunes ovules des Poissons, Amphibies, Reptiles, Oiseaux. Un autre fait expliquant la facilité du développement hypertrophique du noyau vitellin, c'est une altération probable de sa nutrition, comme tend à le démontrer la présence de bulles gazeuses qu'on voit quelquefois dans les lamelles concentriques, ainsi que, parfois, des globules graisseux.

Le noyau vitellin est donc un centrosome dégénéré, devenu inerte et séjournant plus ou moins longuement dans le protoplasma.

A l'état de centrosome ordinaire de l'ovogonie, il peut aussi persister plus ou moins longtemps et peut même se retrouver dans l'œuf mûr comme un élément à activité physiologique

épuisée; mais, dans la règle, il a disparu avant la formation des globules polaires. Cette disparition se produit généralement dès que son rôle physiologique est terminé, après la séparation des chromosomes secondaires; elle se produit par atrophie, par résorption dans le protoplasma.

Les faits de persistance dans le protoplasma de corpuscules analogues à ceux dont il a été question dans ce chapitre commencent à n'être plus rares dans les archives scientifiques et les découvertes de ce genre se multiplient tous les jours. Solger a fait des observations sur les cellules pigmentées des couches superficielles du derme cutané du *Gasterosteus pungitius* et de l'*Esox lucius;* dans ces cellules, pourvues d'un ou plusieurs noyaux qui se diviseraient par voie amitotique, il y a une petite tache claire, autour de laquelle s'observent des files radiaires de granulations pigmentaires, mais dépourvue de corpuscule central; pour cet auteur, c'est là une sphère attractive. Flemming, dans ses études sur certains leucocytes de la Salamandre, a constaté la présence d'un centrosome dans des éléments non en voie de multiplication. Dans des éléments en voie de fragmentation, il a trouvé une sphère attractive, pourvue d'un centrosome en relation avec le point de formation des étranglements du noyau. Lors de cette division, le centrosome resterait peut-être indivis. Dans les cellules épithéliales du poumon, dans l'endothélium et les cellules conjonctives du péritoine des jeunes larves de Salamandre, il y a deux corpuscules centraux, intimement unis et siégeant près du noyau au repos. Parfois, ces deux globules sont un peu écartés l'un de l'autre et réunis par un fuseau achromatique rudimentaire.

Dans les cellules migratrices que l'on rencontre dans la paroi intestinale de la Salamandre, Heidenhain a trouvé une sphère attractive avec son centrosome. Il a vu quelquefois des radiations protoplasmiques autour du centrosome dans des éléments leucocytaires multinucléés et dans quelques leucocytes à un seul noyau, qu'il suppose dériver d'éléments à plusieurs noyaux.

Dans des cellules géantes et dans de petites cellules de la moelle rouge du Lapin, il y a aussi une sphère attractive pourvue d'un centrosome; il en est de même de cellules endothéliales desquammées des alvéoles pulmonaires de l'Homme et de leucocytes à un ou plusieurs noyaux. Bürger a observé des sphères attractives avec centrosomes dans les cellules spéciales qui circulent librement dans le cœlome de certaines Némertes, et qui ne paraissent pas se diviser par voie mitotique. Meves, dans les spermatogonies à noyaux arrondis de la Salamandre, a trouvé, à côté du noyau, un corpuscule clair, qui se transformerait en granules que l'on voit répandues autour des noyaux polymorphes des spermatogonies d'automne et d'hiver. Au printemps, ces granulations se réuniraient, au moins partiellement, pour former une nouvelle sphère claire (attractive?) en même temps que le noyau lobé s'arrondirait. A la même époque, à côté de cellules à noyaux polymorphes, on trouverait des spermatogonies qui se diviseraient sans karyokinèse, sous l'influence d'une sphère attractive transformée en une sorte d'anneau. D'après ces faits et d'autres, certains naturalistes admettent que le centrosome est un organe permanent. Il est probable qu'en réalité il est quelquefois permanent, que d'autres fois on peut l'observer plus ou moins longtemps dans le corps protoplasmique, mais qu'en général il rentre dans le noyau sous forme d'élément paranucléinien. Ce qui fait que son existence dans le protoplasma ou même dans le noyau, quoique moins souvent, puisse être facilement méconnue, c'est que son affinité pour les réactifs est des plus variables. Non colorable à certains moments, principalement aux stades de début, il finit souvent par l'être beaucoup; ces faits expliquent la difficulté que l'on éprouve, dans certains cas, à déceler sa présence.

A côté des vues qui précèdent, il y a lieu de citer l'opinion de certains auteurs, tels que O. Hertwig, Brauer, pour lesquels le centrosome se trouve bien dans le noyau au repos; il y entre après la division, il en sort de nouveau pour la prépa-

ration de celle-ci, et il ne resterait dehors que dans des cas particuliers pour constituer alors, à côté du noyau principal, un noyau accessoire. Mais, et ceci Brauer le spécifie bien, c'est là un corps qui se trouve dans le noyau outre le nucléole (*Ascaris megalocephala*, var. *univalens*), dont il serait donc distinct.

En somme, le point faible des vues théoriques sur l'homologie du centrosome, noyau accessoire, noyau vitellin et nucléole, est que l'observation n'a pas encore démontré péremptoirement que ces différents éléments ont une origine identique.

Si les progrès de la science aboutissaient à cette constatation rigoureuse, il y aurait lieu de rechercher pour quelles raisons ces corps se comportent si différemment et pourquoi il se forme un noyau vitellin dans les jeunes ovules. Peut-être faudrait-il donner à ce dernier phénomène une signification atavique?

Durant le développement de certains êtres, on voit apparaître à côté de la vésicule germinative un globule qui ne devient visible que lorsque la tache germinative a disparu dans le noyau, et qui peut persister plus ou moins longtemps dans une des sphères de segmentation de l'embryon ou disparaître rapidement. Ce globule semblerait être la tache germinative expulsée de la vésicule germinative réduite, à la fin de la période d'accroissement et logée à côté de celle-ci dans le corps protoplasmique. Cet élément, qui ne prend pas part à la division qui produira les globules polaires, est le *métanucléole* de Hœcker, que cet auteur a vu chez l'*Æquorea Forskalia.* Trinchese l'a vu chez certains Mollusques. De même Metschnikoff l'a décrit dans l'œuf mûr du *Mitrocoma Annæ;* il a vu, à côté du noyau ovulaire, un élément qu'il a considéré comme un noyau spermatique incapable d'accomplir la fécondation. On l'a revu chez l'*Anthomedus Tiara,* le *Sagitta,* la Moule, les Daphnides, etc. C'est probablement là aussi l'homologue d'un élément décrit par Chun sous le nom de *Kleinkern* dans l'ovogonie du *Stephanophyes superba.*

De ces faits, Henneguy a conclu que le noyau de l'œuf, depuis le commencement de la période d'accroissement jusqu'à la fécondation, peut expulser des éléments figurés — et spécialement les nucléoles — qui persistent plus ou moins longtemps dans le vitellus, et qui réduisent le noyau à sa partie chromatique.

Le métanucléole est le nucléole de l'ovogonie ; si l'on admet avec Julin que celui-ci se reconstitue de toutes pièces dans le noyau, il n'a donc rien à voir avec le noyau vitellin ; celui-ci est le centrosome qui a provoqué la formation de l'ovogonie. Ce nucléole est sorti de la vésicule germinative plus hâtivement que dans la règle.

VI

Globules polaires.

Le dernier phénomène, accompagnant la maturation de l'œuf, est la production, à sa surface, aux dépens de sa substance et par une sorte de bourgeonnement, de corpuscules particuliers, découverts dès 1837, et généralement appelés *globules polaires*.

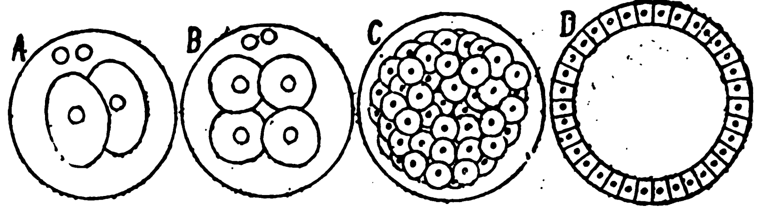


Fig. 65. — Premiers stades du développement de l'œuf avec ses globules polaires.

Ces corpuscules apparaissent au pôle formateur, c'est-à-dire au point où se développera plus tard l'embryon, point opposé à celui par lequel l'œuf adhérait à l'organisme souche.

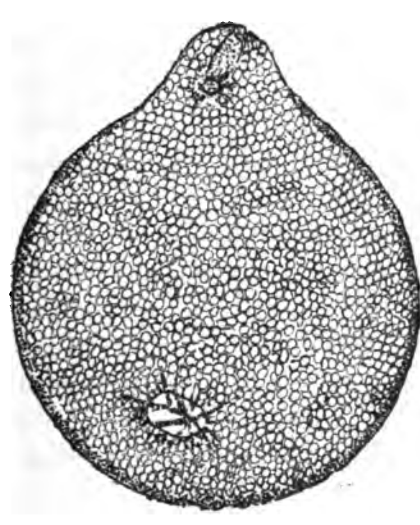


Fig. 66. — Archiamphiaster au pôle supérieur.

Ces globules doivent leur origine à un processus analogue à celui de la division indirecte des cellules, et sont dus essentiellement à la division de la vésicule germinative en deux parties égales. Le corps protoplasmique de l'œuf se divise aussi, mais en deux portions fort inégales : l'une grosse, qui formera l'embryon, l'autre beaucoup plus petite, le globule polaire. L'ensemble du phénomène paraît iden-

tique à une division cellulaire mitotique ordinaire, avec cette différence que les produits en sont inégaux. La figure étoilée qui produit le premier globule polaire est l'*archiamphiaster*.

D'après Julin, chez le *Styelopsis*, les globules polaires se produisent sans l'intervention d'un centrosome. De même, Boveri a établi que, chez l'*Ascaris megalocephala*, certaines Ascidies, le *Sagitta*, le *Ciona*, de même que Vejdovsky sur le *Rhynchelmis*, le fuseau directeur qui donne naissance aux globules polaires est dépourvu de centrosomes et ne présente pas les irradiations polaires qui sont souvent la seule manifestation tangible de la présence de ces éléments. Il y a donc déchéance du centrosome femelle dans l'œuf mûr.

Cette absence de centrosomes aux pôles du fuseau de maturation se produit lorsque le nucléole de l'ovogonie se résorbe complètement à la fin de la période d'accroissement. Quoique l'élimination des globules polaires ait lieu, malgré cela, le phénomène présente cependant quelques particularités. En l'absence de centrosomes, une très petite quantité de protoplasma est expulsée et l'aspect du phénomène se rapproche le plus du bourgeonnement. Cet aspect s'observe chez certains Insectes : d'après Henking, chez l'*Ascaris*, l'*Ascidia mentula*, le *Sagitta;* d'après Boveri, chez le *Styelopsis;* d'après Julin, où les globules polaires ne sont que des bourgeons insignifiants.

Si, au contraire, le nucléole de l'ovogonie persiste pendant la maturation, on constate toujours des centrosomes aux deux bouts du fuseau de maturation, et, dans ce cas, les globules polaires entraînent une notable partie du protoplasma.

Boveri a émis des vues fort originales sur le centrosome qui accompagne la formation des globules polaires. Pour lui, le centrosome femelle est un élément destiné à devenir caduc dans l'œuf mûr et à être remplacé par celui du spermatozoïde; le centrosome propre de l'œuf mûr est affaibli et souvent entièrement atrophié. Cette caducité se traduit par son impuissance à déterminer plus longtemps la division du jeune œuf, et, en conséquence, celui-ci s'accroît (période d'accroissement). Dans

une foule de cas de formation de globules polaires, le centrosome du fuseau directeur proviendrait du spermatozoïde qui a pénétré dans l'œuf, lors de la fécondation, et qui est, relativement, bien plus gros que le centrosome des cellules ordinaires. Comme espèces rentrant dans cette catégorie, on peut citer l'*Ascaris megalocephala*, le *Rhynchelmis*, des Ascidies, des Ciones, le *Sagitta*, le *Pieris*, l'*Agelasseia*, le *Pyrrhocoris*, et, en général, toutes les formes qui possèdent un noyau vitellin ordinaire (1).

Pour Henking, qui n'admet pas la présence d'un centrosome dans le spermatozoïde, le centrosome du fuseau directeur est constitué par une substance à laquelle il donne le nom d'*arrhénoïde*, et qui dériverait de la partie du spermatozoïde située immédiatement derrière la tête, région qui, suivant lui, aurait pour origine le noyau accessoire et la portion postérieure du mitosoma.

Il est juste de remarquer que ces vues ne reposent pas sur des observations directes positives.

Chez les Salmonides, le fuseau du premier globule polaire se constitue pendant que l'œuf est encore dans l'abdomen de la femelle et, par conséquent, en dehors de l'intervention de toute espèce d'élément mâle.

Comme exemple de formation de globules polaires, on peut citer l'*Ascaris megalocephala*, d'après Hertwig. Les jeunes ovules en voie de développement contiennent quatre chromosomes, comme toutes les cellules du corps de cet organisme. A la fin de la période d'accroissement et de repos, il se constitue un peloton dans la vésicule germinative, puis quatre chromosomes qui se dédoublent, et le fuseau se rend vers la périphérie de l'œuf, où quatre chromosomes sont expulsés avec leur part de fuseau. Puis, sans repasser par les

(1) Il est remarquable que les nombreux auteurs, tels que H. Ludwig, Balfour, J. Barrois, Locy, Morin, Schimkewitsch, Kishinouye, etc., qui ont étudié les Araignées et les Myriapodes, dont le noyau vitellin présente un développement particulier, n'ont pas signalé de globules polaires.

phases inverses et retourner au repos, le noyau restant constitue un nouveau fuseau, dans lequel les quatre chromosomes se dédoublent deux par deux, et ceux qui sont du côté de la périphérie sont expulsés. Par le fait de cette division anormale, l'œuf mûr ne présente plus que deux chromosomes, et le *pronucleus* est un noyau incomplet. Le premier globule polaire possède quatre chromosomes; le deuxième et l'œuf réunis en ont quatre.

Le premier globule se divise lui-même quoique pas toujours, par une division anormale, et chaque moitié ne conserve que deux chromosomes; il se forme ainsi, généralement, deux *globules secondaires*.

Ici, comme dans la formation des spermatides, il y a donc deux divisions différentes des divisions ordinaires, s'effectuant sans phase intermédiaire de repos et constituant quatre éléments contenant chacun un quart ou, peut-être mieux, la moitié de la chromatine de l'élément souche. De là on conclut généralement à l'homologie de ces deux sortes de corps. Il n'y aurait là que des différences de dimensions, et les trois globules polaires seraient des gonocytes avortés. Dans la division du spermatocyte en spermatides, les centrosomes interviennent toujours et le protoplasma du premier se divise au même titre que le noyau; aussi la spermatide renferme-t-elle toujours à côté de son noyau un centrosome qui sera le futur spermocentre. Un semblable élément ne se voit que dans les ovules dont les globules polaires se produisent sous l'influence d'un centrosome; dans les autres cas, on ne voit pas cet élément à côté du noyau ovulaire.

Les inégalités observées entre l'œuf et le spermatozoïde s'expliquent parfaitement par des raisons physiologiques. Le rôle des spermatozoïdes est de rechercher l'œuf; aussi, leur nombre, leur mobilité et leurs faibles dimensions, sont-ils d'excellentes conditions pour leur permettre de se répandre; ce sont les éléments les plus petits du corps; ils ont le minimum de volume possible, et leur pauvreté en protoplasma leur rend tout

développement ultérieur impossible. Il a nettement les caractères du mâle; sa vie est faite d'*extériorité*, comme dit Koehler; il est voyageur, chercheur, en quelque sorte centrifuge.

L'œuf, au contraire, a pour tâche de réunir les matériaux nécessaires à l'organisme futur, et son vitellus renferme tout ce dont le futur être a besoin. Un œuf bien pourvu de substances nutritives aura plus d'utilité pour la propagation de l'être qu'une foule d'éléments analogues mal armés pour la concurrence vitale. D'un autre côté, il est peu possible aux êtres vivants de produire beaucoup d'œufs également bien conditionnés. Les ovules se différencient donc en deux catégories : ceux qui se développeront et qui sont les éléments les plus volumineux du corps, pouvant atteindre des dimensions quelquefois colossales, les œufs, et ceux qui s'adaptent pour protéger et même nourrir les premiers. L'œuf a des caractères analogues à ceux de la femelle, dont la caractéristique est dans une vie moins active, plus centripète, une vie d'*intériorité;* l'œuf est immobile, grand et protégé par des enveloppes. Tout développement ultérieur de l'œuf est rendu impossible par l'impuissance de son centrosome, qui est affaibli ou qui a même disparu par atrophie. De là, la nécessité de son renforcement par le remplacement au moyen du centrosome du mâle. Cet acte constitue le phénomène de la fécondation, qui sera étudié dans le chapitre suivant.

Le nombre des globules polaires est assez constant. Les œufs qui pour se développer doivent être fécondés, produisent deux globules polaires, quel que soit le sexe des produits. Cette règle a été établie sur les observations connues, au nombre d'environ une centaine, toutes concordantes. Cependant, il y aurait quelquefois trois globules polaires.

Il n'en n'est plus de même lorsqu'on considère les phénomènes de la parthénogenèse, c'est-à-dire la reproduction par des femelles vierges, phénomène qui s'observe surtout chez certains Arthropodes, tels que les Crustacés et les Insectes (1).

(1) Il y a lieu de distinguer deux sortes de parthénogenèse : la *parthénogenèse vraie,* qui est rare, et la *fausse parthénogenèse,* qui s'observe fréquemment. Cette

Les œufs parthénogénétiques ne produisent qu'un seul globule polaire, et ils ne donneront naissance qu'à des femelles. Il peut même arriver, dans certains cas, par exemple chez une Étoile de mer, que le deuxième fuseau de division se constitue; mais le phénomène ne va pas loin, et le noyau se reconstitue. La réduction karyogamique ne se voit donc pas ici, et la moitié du noyau non expulsée paraît remplacer le spermatozoïde.

D'après cela, certains naturalistes ne paraissent pas éloignés d'admettre là une sorte d'autofécondation, de fécondation passive, et cette fécondation de l'œuf par lui-même leur apparaît surtout frappante dans le cas cité d'une reconstitution secondaire du noyau.

Cette reproduction parthénogénétique a pour effet de déterminer la production de beaucoup plus d'unités que la reproduction précédée de l'accouplement sexuel; c'est là un phénomène analogue à ce qui se voit pour la division des Infusoires entre deux conjugaisons.

Il est des œufs parthénogénétiques qui doivent donner naissance à des mâles, par exemple, ceux des Abeilles, de la *Musca vomitoria,* du *Lisparis dispar*, et qui présentent deux globules polaires plus ou moins complètement développés. Ici, on ne constate donc aucune espèce de fécondation passive; la parthénogenèse est vraie. Ce ne sont, du reste, pas là des œufs parthénogénétiques par essence, et ils peuvent être fécondés. Ainsi, chez l'Abeille, si les œufs parthénogénétiques forment des mâles, les œufs fécondés produisent des femelles. Ces œufs peuvent donc être fécondés, suivant le hasard des circonstances, et ils ne sont qu'*accidentellement* parthénogénétiques. On observe un passage à cet état, chez certains organismes, tels que la Grenouille, le Ver à soie, etc., dont

dernière, qui s'observe notamment chez les Rotateurs, le *Leptodora hyalina,* le *Polyphemus oculus,* le *Cypris reptans,* les Daphnies, les Aphidiens, le Phylloxera, etc., chez lesquels il y a alternance entre la reproduction sexuée et la reproduction parthénogénétique; en été, on n'observe que des femelles qui pondent des myriades d'œufs à coque mince. Au contraire les œufs d'hiver, qui doivent être fécondés, sont peu abondants et possèdent des coques épaisses.

les œufs, sans fécondation préalable, présentent un commencement de développement, mais qui ne va pas loin.

Quand les œufs produisent des hermaphrodites, la formation des globules polaires est encore mal connue.

Enfin, chez les œufs progénétiques (1), improprement appelés germes ou spores, qui se voient chez le Chironome, le Miastor, les Sporocystes, les Rédies, les Orthonectidés, etc., toute trace de l'expulsion des globules polaires peut disparaître.

Il y a quelques années, le public scientifique se trouvait en présence d'une étonnante découverte. Weismann et Ishikawa, étudiant la reproduction du *Moina paradoxa*, découvraient que l'œuf d'hiver de cet être laissait voir longtemps après la

(1) La progenèse est la formation de produits sexuels plus ou moins précoce, antérieure au développement complet de l'être procréateur, telle que celle qu'on observe chez l'Axolotl et le Triton. La progenèse peut être limitée à un sexe, à la femelle, par exemple (Puceron, Stylops). Quand ce fait se présente chez le mâle, celui-ci produit des spermatozoïdes avant son entier développement (mâle parasite de la Bonellie, mâle nain des Cirripèdes, mâles pygmées des Rotifères, mâle de l'Anguille). Dans certains cas, l'animal présente successivement les deux sexes avec progenèse pour l'un des deux. Quand le sexe mâle apparaît le premier, on a la progenèse protandrique; quand c'est le sexe femelle, la progenèse protogynique. Certains Crustacés cymothaodiens rentrent dans le premier cas; ils présentent d'abord des organes mâles et deviennent femelles en vieillissant. Chez les Gallinacées, la femelle pond à l'état jeune et prend plus tard des caractères masculins. On connaît des cas de progenèse protogynique poussés extrêmement loin. La reproduction se fait sans le concours de l'élément mâle, et l'on arrive ainsi par dégradation à une génération agame; c'est la pédagenèse des larves de Miastor, de Chironome, de certains Pucerons. La prétendue génération alternante des Trématodes (sporocystes) est peut-être un cas de progenèse femelle très concentré. D'autres générations alternantes sont dans le même cas. La progenèse arrête d'abord la croissance, puis momentanément ou définitivement le développement des organes, et, si on compare un être progénétique à l'autre sexe ou aux formes voisines non progénétiques, on lui trouve l'aspect d'une larve sexuée. Il y a donc antagonisme entre la genèse des éléments sexuels et le développement individuel. La progenèse se rencontre le plus souvent chez les parasites, car ils sont nourris par leur hôte et n'ont guère besoin des organes, utiles surtout aux formes libres; aussi la nutrition au lieu de servir à développer les organes, se concentre-t-elle sur les produit sexuels et leur permet-elle de se développer immédiatement au détriment de l'être souche. Cette constatation est susceptible d'une généralisation encore plus grande, et, dans certains cas de parasitisme, le parasite joue, vis-à-vis de son hôte, le rôle de ces germes hâtifs; il détourne la nutrition et empêche le développement normal, phénomène qui constitue la *Castration parasitaire* de Giard.

fécondation, même après le début de la segmentation, un spermatozoïde, à un moment où la membrane vitelline est déjà bien constituée et ne peut laisser le passage libre à aucun de ces éléments. Au bout d'un certain temps, ce spermatozoïde s'unissait à une des quatre sphères de segmentation et se fusionnait avec elle, d'où une sorte de fécondation d'autant plus remarquable qu'une partie de l'embryon seulement, une des quatre sphères de segmentation, se trouvait ainsi fécondée. Il y avait ainsi, en quelque sorte, une double fécondation.

Chez une espèce voisine, le *Moina rectirostris*, le phénomène était encore plus tardif et ne se produisait qu'après la division de ces quatre cellules en huit. Enfin, le même fait a également été observé chez deux Daphnies et un *Polyphemus*.

Ce phénomène, en contradiction avec tous les faits connus jusqu'alors, laissait le champ libre à toutes les suppositions. Une première fécondation a lieu, ici, comme d'ordinaire; la copulation observée ensuite n'est qu'un phénomène surajouté, une union de deux éléments plus grands et de forme différente de celle du spermatozoïde, dont l'un avait été préalablement rejeté.

Balbiani, depuis longtemps, a vu des faits d'un autre genre, mais qui ne laissent pas que de présenter avec ceux-ci une certaine analogie, au moins apparente. L'œuf de Chironome, à son pôle inférieur, bourgeonne un petit corpuscule nucléé, puis un deuxième; ces deux corpuscules se divisent ensuite chacun deux fois. Il se constitue ainsi un groupe de huit cellules, auxquelles Balbiani attribue l'origine de l'appareil reproducteur du Chironome. Un fait digne de remarque, c'est qu'au moment de cette formation on ne voit encore aucune trace de blastoderme ni d'embryon. Il est intéressant d'observer qu'ici, comme chez les Daphnies, ces éléments se trouvent au pôle de l'œuf où se formeront plus tard les organes génitaux, au pôle inférieur végétatif, et que les cellules de l'œuf qui s'unissent avec ces corps fournissent les cellules génératrices. Il y a cependant, entre ces éléments, une diffé-

rence qui apparaît immédiatement, portant sur leur nombre et sur l'époque de leur apparition. Les uns apparaissent très tôt, les autres plus tard.

Donc, dans l'œuf en voie de maturation, on observe la naissance, au pôle formateur, de globules particuliers, et quelquefois aussi, au pôle opposé, la production d'autres corpuscules, là où apparaîtront plus tard les organes reproducteurs. Il est, du reste, douteux que ces deux ordres de corps aient absolument rien de commun. La formation des premiers éléments est accompagnée de phénomènes karyokinétiques; mais, s'ils peuvent se diviser par voie mitotique, cette multiplication est toujours limitée. Ainsi, chez le *Polyphemus*, on trouve, à la fois, des globules primaires provenant directement de l'œuf, des globules secondaires formés par la division des premiers globules, et d'autres formés par le dédoublement des globules secondaires. Quant à la division des corpuscules du pôle inférieur, auxquels on a souvent attribué jusqu'à ces derniers temps la valeur de globules polaires (Insectes, Crustacés), elle est surtout abondante chez les Insectes, quand paraissent manquer les globules polaires vrais, fait qui pouvait amener à admettre des relations de suppléance.

Si le mode de formation des globules polaires est bien connu, il n'en est plus de même de leur signification, sur laquelle on a émis les hypothèses les plus diverses.

Les premiers observateurs, frappés par ce fait que le premier plan de division de l'œuf semblait passer par le point où ils se détachent, leur attribuaient une grande influence sur l'orientation future de l'embryon et les décrivirent sous la dénomination de *globules polaires*.

D'autres y voyaient une sorte d'excrétion de l'œuf, comparable à ce qu'on observe chez les Chenilles qui vident leur intestin avant de se transformer en chrysalides, et leur appliquaient le nom de *corpuscules de rebut*.

Mais l'idée qui, avec des modifications diverses, fut la plus adoptée, est celle d'après laquelle l'œuf serait hermaphrodite

jusqu'à la maturité, et le rejet des globules polaires serait l'expulsion d'une sorte d'élément mâle, rendu plus tard à l'œuf par le spermatozoïde. D'ailleurs, un fait analogue et parallèle se verrait chez le mâle, où, pendant le développement des éléments séminaux, la cellule génératrice abandonnerait l'élément femelle. Ces vues ont été principalement soutenues par MM. Sabattier, Sedwick Minot, Balfour, Van Beneden, etc., qui ont consacré de nombreux travaux à la défense de cette théorie de l'*hermaphrodisme cellulaire*. Ainsi, dans la spermatogenèse des Vers, les spermatozoïdes se forment dans la région périphérique d'un élément, puis se détachent. La partie centrale, le cytophore, persiste d'abord seul, puis disparaît. Inversement, l'œuf forme des globules polaires qui se détachent de sa périphérie et finissent par disparaître. De ces faits, on a déduit que toutes les cellules sont hermaphrodites ; les éléments sexuels se débarrassent de leur portion mâle ou femelle et acquièrent ainsi une sorte de polarité mâle ou femelle. Ces phénomènes sont précédés par un partage préalable des éléments sexuels, permettant aux mâles de se placer à la périphérie, et aux femelles de rester au centre. Chez le mâle, c'est la partie centrale qui périclite; chez la femelle, c'est la partie phériphérique.

On peut objecter à ces vues que la formation de spermatozoïdes à la surface d'un cytophore ne constitue qu'un cas particulier, sans aucune généralité, et que les œufs parthénogénétiques eux-mêmes expulsent des globules polaires.

Weismann a emprunté à Nägeli la notion de l'*idioplasma* (1)

---

(1) Nägeli admet que la matière vivante est formée de deux substances protoplasmiques, l'une, sans grande influence, répandue en abondance dans le corps des êtres, le *stereoplasma,* forme une sorte de gangue dans laquelle se trouve plongée et répartie uniformément une deuxième substance plus importante, mais beaucoup moins abondante, qui dirige l'évolution organique, l'*idioplasma*. Si les œufs des animaux, qui ont entre eux tant de ressemblance, produisent des êtres différents entre eux, cela tient précisément aux propriétés spéciales de cette substance.

Il admet que l'idioplasma est constitué de cristallicules organiques moléculaires, les *micelles*. Ces derniers ne se touchent pas : ils sont séparés les uns des

et cherche à lui donner une forme tangible en admettant qu'elle n'est autre chose que la substance nucléaire, ou une portion de celle-ci. Il admet l'existence de deux sortes d'idioplasmas dans l'ovule, le *plasma propre* ou *ovigène* qui préside

---

autres par une atmosphère d'eau, et sont disposés en rangées parallèles dans le stereoplasma, d'une façon variable avec les types considérés. Tant que les rangées de micelles n'éprouveront aucune modification, l'être ne variera pas; mais si leur disposition réciproque, leur nombre ou leur structure viennent à changer, ces modifications retentiront sur le stereoplasma qui subira des changements correspondants. Ces variations de l'idioplasma ne se produisent pas au hasard et irrégulièrement; elles suivent des lois fixes et vont toujours du plus simple au plus complexe.

Pour Nägeli, les variations des êtres sont donc dues à des causes internes. L'action du milieu n'a pas le rôle fondamental que lui assigne Darwin. Les mutations des espèces ne sont pas livrées au hasard, ni aux fluctuations du milieu extérieur; elles sont régies par les lois d'une complication ascendante, presque mathématique, avec une grande régularité. Une forme complexe a été précédée d'une forme plus simple, et produira un type encore plus compliqué.

La lutte pour l'existence n'est plus le facteur le plus puissant de la création des espèces; elle ne joue que le rôle secondaire d'un processus destructeur qui bouleverse les séries et les coupe en tronçons, mais sans jamais rien édifier.

Il partage les variations des êtres en deux catégories, les *variations passagères* et les *variations durables*.

Les premières se produisent sous l'influence de causes externes directes, telles que les conditions climatériques, les changements de régime, etc. Par exemple, certaines plantes alpestres qui vivent à de hautes altitudes depuis les temps historiques les plus reculés ont acquis certains caractères tout particuliers. Transplantées et cultivées en plaine, elles ne tardent pas à reprendre leurs caractères primitifs. Cette fugacité est le propre des caractères acquis sous l'influence directe *et unique* des agents extérieurs. On pourrait comparer ces variations aux déformations que l'on fait subir à un corps sans dépasser les limites de son élasticité.

Les variations durables sont la conséquence d'une modification de l'agencement des micelles. Elles sont elles-mêmes de deux sortes : les unes produites avec le concours des agents extérieurs, les autres par la seule action des causes internes. Ce sont ces dernières qui provoquent les variations importantes, l'organisation fondamentale et la division du travail physiologique.

Les variations durables qui se produisent sous l'influence des causes externes ne changent en rien l'organisation fondamentale des êtres. Elles leur donnent leur cachet propre, leurs caractères extérieurs, leurs couleurs; les faits de mimétisme par exemple, peuvent être rangés dans cette catégorie.

S'il n'y avait jamais eu d'excitation venant de l'extérieur, l'organisation se se serait élevée, mais cette complication organique seule existerait et les êtres ne nous offriraient pas cette diversité de formes que l'on peut constater.

Dans ce processus, la lutte pour l'existence n'a qu'un rôle perturbateur; elle rend les séries discontinues, favorise les espèces les mieux partagées, supprime les autres et a pour effet immédiat de limiter le trop grand nombre de formes organiques qui pourraient encombrer la surface du globe.

à l'évolution de l'œuf, jusqu'à sa maturité, et qui le fait vivre, et le *plasma germinatif* ou *ancestral* qui guide l'évolution de l'œuf en embryon. La formation des globules polaires serait un phénomène ayant pour but essentiel d'expulser des substances et des forces que l'ovule ne doit pas conserver, et dans chacun des deux une sorte d'idioplasma différente serait rejetée. Dans le premier globule polaire, le plasma propre, devenu inutile, puisque l'évolution de l'œuf est achevée, serait rejeté; par le deuxième globule se trouverait expulsée une partie du plasma germinatif. La fécondation serait destinée à rendre à l'œuf l'énergie et la matière perdues par la formation de ce deuxième globule. D'après ces vues, Weismann a pensé que les œufs parthénogénétiques n'étant pas fécondés ne devaient pas rejeter le deuxième globule polaire pour que leur développement ultérieur soit possible, et l'observation a confirmé cette prévision. Malgré cette concordance, il est bien évident que toute cette théorie est dépourvue de base réellement scientifique.

La multiplicité des théories exprimées montre bien de quelle profonde obscurité est entourée la véritable signification de ces phénomènes, et il est curieux de constater que les hypothèses peut-être les moins soutenables sont celles qui ont eu le plus de vogue. Ainsi la théorie de Weismann, qui a eu tant de retentissement, échappe par elle-même à tout contrôle. Est-elle seulement plausible? Est-il probable, par exemple, si l'on admet avec cet auteur que l'idioplasma ovigène devenu inutile est expulsé, qu'il le soit avec tant de constance dans le règne animal et constitue le point de départ d'un processus si remarquable? Les parties devenues inutiles sont-elles généralement ainsi rejetées?

Les théories précédentes sont principalement physiologiques; elles ne rendent pas compte de la valeur morphologique de ces formations. Giard a édifié, le premier, une hypothèse réellement morphologique. Pour lui, la formation des globules polaires est comparable aux divisions qui se voient au sein du kyste

des Protozoaires, kystes comparables aux œufs des Métazoaires, et par le moyen desquels se constituent une foule d'êtres nouveaux, aptes à reproduire l'espèce. Mais, dans l'œuf, grâce à la concurrence vitale qui s'établirait entre les produits de ce phénomène reproducteur, tous les germes, à l'exception d'un seul, avorteraient. Les globules polaires rappelleraient ainsi ontogéniquement l'état phylogénique de Protozoaire et constitueraient donç le stade *Protozoaire* dans l'embryogénie des Métazoaires. Ce seraient des embryons détachés qui, non nourris d'abord, non fécondés ensuite, resteraient stériles; ils n'auraient donc plus aucun rôle physiologique, et leur signification serait simplement atavique.

Chose curieuse pour une interprétation aussi séduisante, cette hypothèse n'a attiré que peu de partisans à son auteur.

J'ai autrefois défendu une opinion fort analogue (*Revue scient.* du 1er janvier 1887), en l'étayant de quelques arguments nouveaux. J'avançais alors que les globules polaires pouvaient probablement être considérés comme des germes avortés, mais ceci d'une manière générale, en dehors de toute idée restreinte de Protozoaires et de Métazoaires.

Jhering a repris cette idée sous une autre forme, très ingénieuse, en s'appuyant sur des faits d'un haut intérêt morphologique, tels que sa découverte de neuf embryons de même sexe dans un œuf de *Praopus hybridus.* — Le *Lumbricus trapezoides* présente des faits analogues.

En faveur de l'hypothèse de Giard, on peut invoquer la formation des globules polaires par voie mitosique, c'est-à-dire par un processus analogue à celui qui s'observe dans la segmentation de l'œuf en parties équivalentes. Le volume inégal des globules polaires et de l'œuf ne saurait détruire la valeur de cette comparaison (1), et il se peut parfaitement qu'à

(1) Il existe, en effet, des segmentations inégales, poussées encore plus loin dans les segmentations partielles. La segmentation typique est égale. La première modification consiste dans l'apparition, à certains stades, de produits inégaux. Ensuite, elle peut devenir inégale dès le début *(Fabricia)*, par un phénomène de

l'origine ces cellules rudimentaires aient été les équivalents de l'œuf.

Pour Giard, le véritable œuf est l'ovogonie, et celui-ci, après la formation d'un globule polaire, n'est donc plus un œuf, mais une cellule nouvelle, la sœur du premier globule polaire, la macrosphère fille de l'œuf, et il l'appelle *gynocelle*. De même, après qu'une seconde mitose a donné naissance au deuxième globule polaire, l'élément restant est la petite-fille de l'œuf ou *gynogamète* (*gonocyte femelle* de Van Beneden, *genoblaste femelle* de Minot). C'est là l'élément qui doit se conjuguer avec l'androgamète, l'élément sexuellement différencié.

Il fonde l'atrophie des globules polaires sur une lutte entre les éléments reproducteurs (1), sans insister sur la manière dont on peut expliquer comment ce phénomème, qui a dû, naturellement se produire après la formation des embryons théoriques, a pu retentir sur leur genèse. Si l'on peut comprendre, en effet, aisément, comment il peut se faire que la

---

coenogénie, jusqu'à ce que, seules, les petites cellules se segmentent d'abord, et seulement plus tard la grande masse de l'œuf. — *Coenogénie* et *palingénie* sont deux termes de Häckel. Ils correspondent à ce que Giard avait appelé *embryogénie condensée* ou *embryogénie dilatée*. Par exemple, le *Penœus*, la Phallusie et la Grenouille sont des types palingénétiques ou à embryogénie dilatée. L'Écrevisse, la Molgule (*Anurella*, Lac. Dut.), le *Pipa* sont des types coenogénétiques ou à embryogénie condensée. Certains types ont, à la fois, des espèces coenogénétiques et palingénétiques. Ainsi, l'*Asterias sanguinolenta* est coenogénétique, tandis que l'*Asterias rubens* est palingénétique. Enfin, on peut citer deux exemples d'espèces coenogénétique ou palingénétique, suivant leur habitat. Giard a vu que le *Palæmonites varians* est coenogénétique dans les lacs des environs de Naples, et palingénétique dans les lagunes saumâtres du Pas-de-Calais. Deux femelles de même taille et de même poids portent, l'une, la napolitaine, une trentaine d'œufs, l'autre, la septentrionale, trois cent quatorze œufs. Mais ces derniers ont un diamètre moindre d'un tiers et leur évolution est dilatée. Portschinsky a observé que le *Musca carnivora* des environs de Saint-Pétersbourg pond environ vingt-huit œufs de petite taille et à développement palingénétique, tandis qu'en Crimée cette mouche pond un seul œuf très volumineux et coenogénétique. Dans les deux cas, les adultes sont parfaitement identiques. Ainsi les œufs les plus petits présentent les plus longues évolutions, et les climats froids y prédisposent plus.

(1) Il peut être utile de faire remarquer ici qu'il n'y a presque jamais *lutte*, dans le sens conventionnel du mot, soit entre des éléments, soit entre des êtres. C'est là une expression dérivée des théories de Darwin et évoquant certainement une conception contestable.

segmentation de l'œuf soit inégale, grâce à l'acquisition de caractères évolutifs particuliers que les organismes peuvent montrer dès le début de leur développement, il n'en saurait être tout à fait de même pour les globules polaires. Il peut paraître remarquable que l'atrophie d'un corps libre ait pu retentir sur l'être souche, au point de lui communiquer la propriété de former des œufs qui se divisent inégalement. D'un autre côté, le stade ontogénique de la formation de ces globules une fois passé, la segmentation de l'œuf produit de nouveaux éléments pour lesquels la concurrence vitale ne paraît plus si redoutable, qui même perdent une grande partie de leur individualité pour constituer un tout nouveau et unique qui n'est autre que l'organisme produit par l'œuf. L'archiamphiaster a une position excentrique, comme dans la segmentation inégale ou partielle. Dans ces derniers cas, l'explication du fait se trouve dans la position du vitellus de formation; la portion essentiellement vivante du protoplasma est seule à se diviser. Le fuseau de division des globules polaires est toujours excentrique, même en l'absence de tout deutolécithe, et quoique la segmentation subséquente puisse être régulière. L'hypothèse de Giard, pas plus que celle de Jhering, n'explique aucunement la constance si générale du nombre de deux globules polaires. Il semblerait, au contraire, que d'après elle, plus le type considéré se rapprocherait de la base du règne animal, plus le nombre de ces corpuscules devrait augmenter, et que l'on ne devrait guère rencontrer, avec une constance frappante, une formation de quatre éléments, aussi bien chez le mâle que chez la femelle.

En oubliant, pour un moment, que les Protozoaires sont des êtres et non des éléments reproducteurs et en admettant que leur kyste, qui produit des rejetons multiples, puisse être absolument comparé à l'œuf des Métazoaires, il est aisé de comprendre la raison de la réduction du nombre des embryons plus parfaits de ces derniers. La complexité exclut naturellement la multiplicité; il peut s'être produit là un phénomène

analogue à ce qui se voit pour les spermatozoïdes et les œufs, dont les uns, fort petits, sont nombreux, tandis que les autres, gros et chargés de matière de réserve, sont en nombre bien inférieur.

Il convient toutefois de faire remarquer que l'expulsion des globules polaires est un phénomène de maturation et non de développement. Ces éléments sont rejetés avant la fécondation, tandis que la conjugaison des Protozoaires, comparable à celle-ci, précède l'enkystement. Par conséquent, les globules polaires paraîtraient plutôt devoir être rapprochés, non plus des productions kystiques, mais des générations agames qui précèdent la reproduction par gamètes, par exemple, de certains Flagellés, coloniaux, ou certains états palmelloïdes, ou certaines divisions libres, si toutefois il est admissible qu'une propriété ancestrale comme la division, qui paraît se perdre partout avec une grande facilité, ait persisté avec tant de constance dans l'évolution des animaux, et ceci avec ce caractère particulier que le nombre des divisions est réduit uniformément à deux, alors que tant d'autres phénomènes importants ne laissent aucune trace dans l'ontogénie de la plupart d'entre eux. — Du reste, les considérations qui précèdent ne s'opposent peut-être pas à ce qu'on puisse considérer le kyste des Protozoaires comme un œuf à embryons multiples, quoique sans rapport avec les globules polaires.

Les travaux récents sur la conjugaison des Infusoires ont eu pour effet d'engendrer d'autres théories morphologiques des globules polaires. Hertwig, Strassburger, Whitman les ont comparés aux cellules du canal des Muscinées, des Cryptogames vasculaires et des Conifères. Whitman fait remarquer que, chez les Infusoires, la conjugaison est suivie d'une reproduction par scissiparité, dont les produits ultimes se reproduisent par voie sexuelle. Mais tandis que, chez eux, tous les individus produits sont capables de se reproduire par voie sexuelle, chez les plantes, cela n'est vrai que pour un petit nombre (cellules du canal), et chez les Métazoaires, la génération sexuelle est

suivie d'une série de générations agames, dont la dernière est représentée par les globules polaires; après la production de ceux-ci, on a l'œuf mûr. Pour la compréhension de ces nouvelles idées, une étude rapide de la conjugaison des Infusoires peut être utile.

Chez une foule de Protozoaires, la reproduction par division ou par bourgeonnement est probablement précédée par une *conjugaison*, c'est-à-dire par une union ou une fusion temporaire, ou par une *copulation*, c'est-à-dire par une fusion complète et durable de deux individus.

Chez les Infusoires, il existe des cas de fusion complète de deux êtres, par exemple chez les Vorticelles, où il y a une véritable copulation. Dans cette zygose, une des deux gamètes est morphologiquement différente de l'autre, et elle disparaît complètement. Mais le plus souvent il n'y a qu'une union temporaire, une conjugaison.

Les influences sous lesquelles la conjugaison se produit ne sont pas encore mises en pleine lumière. Les principales causes invoquées sont extérieures; on peut citer, par exemple, l'éclairage du microscope, la dessiccation, la pénurie de la nourriture, etc. Ainsi, d'après les vues courantes, lorsque ces organismes sont mal nourris, leur division devient plus active, d'où découle naturellement une réduction de leur taille, étant donné qu'il leur est peu possible de s'accroître suffisamment entre deux divisions consécutives. Ces divisions (quelquefois il n'y en a qu'une seule), non suivies d'accroissement, produisent de petites gamètes dont les organes sont relativement mal formés et sont le préambule de la conjugaison. Pour empêcher ce phénomène, il suffit de bien nourrir les Infusoires. Mais ici encore l'énergie vitale baisserait après un grand nombre de divisions, et ce phénomène serait le début d'une dégénérescence sénile, avec atrophie du noyau, qui les voue à la mort. Ainsi, sans l'intervention de la reproduction périodique sexuelle, qui constituerait donc un *rajeunissement*, il y aurait décrépitude. Par exemple, le

Stylonichia pustulata, isolé et cultivé, commencerait à dégénérer au bout de quatre mois, à la 230e génération, et l'on a constaté leur mort au cinquième mois, à la 316e génération, terme précédé d'une réduction de la taille et d'autres signes de dégradation pouvant aller jusqu'à l'atrophie complète de leurs organes. Ainsi, l'appareil buccal disparaît, les noyaux se modifient, le corps se ratatine, la forme s'altère et aboutit à des contours plus ou moins monstrueux. D'autres espèces montrent des faits analogues, et la résistance constatée a été fort variable. Il est à remarquer que les Infusoires ne se conjuguent pas avec des individus d'une même culture, phénomène qui a été rapproché des faits que l'hermaphrodite ne se féconde généralement pas lui-même, et que les unions consanguines produisent des rejetons médiocres. Le rythme sexuel ainsi provoqué reçoit une séduisante confirmation dans la comparaison de la division des cellules de Métazoaires avec les divisions des Protozoaires, qui n'en différeraient que parce que les produits en deviennent libres. Les cellules somatiques des Métazoaires se multiplient aussi dans certaines limites; mais, n'étant pas rajeunissables par conjugaison, elles sont vouées à une mort irrévocable.

De ce qui précède il paraît résulter que la conjugaison des Infusoires constituerait une sorte de phénomène sénile, et non pas un symptôme de maturation de l'être en pleine force. Cette reproduction sexuelle qui se produit lors du ralentissement de la nutrition et sous l'influence de diverses autres causes, rappelle instinctivement la fleuraison particulière de l'arbre qui souffre et amène l'impression d'un accouplement anormal. Rolph a conclu des faits qui précèdent que la fécondation est une sorte de digestion mutuelle. Il n'y a toutefois ici ni digestion ni assimilation dans le sens ordinaire du mot. De plus, les produits nutritifs, pour être assimilables, ont besoin d'une élaboration spéciale, et l'ensemble du phénomène est lent et exige un certain temps, tandis que l'action de la fécondation est immédiate.

Les vues ci-dessus énoncées sont adoptées par certains auteurs avec une conviction profonde. Cependant, certaines observations précises ne laissent pas que de produire un certain doute. Pour la description détaillée de ces expériences, je laisserai la parole à Balbiani, qui les a commencées; mais elles peuvent être résumées en peu de mots. Il y a une quinzaine d'années, Balbiani a isolé une Paramœcie et l'a placée dans un milieu stérilisé, mais pourvu d'abondants matériaux nutritifs. Par ses divisions successives, cet individu a donné naissance, jusqu'aujourd'hui, à un nombre incalculable de descendants. J'ai continué ces cultures à Bordeaux depuis plusieurs années; M. le professeur Jolyet, de la Faculté de médecine de Bordeaux, les a étendues à de grands bacs, de manière à produire la masse d'Infusoires nécessaire à ses expériences physiologiques. La multiplication continue toujours avec la même activité dans ces cultures pures, qui ne contiennent absolument que des Paramœcies descendant d'un individu unique primitif, et celles-ci ne montrent aucun caractère de sénilité ni aucune tendance à la conjugaison. Devant ces faits, que devient l'opinion d'après laquelle le cycle de conjugaison revient avec régularité? Les résultats auxquels il est fait allusion, notamment ceux de M. Maupas, sont peut-être un peu attribuables aux conditions un peu spéciales dans lesquelles ont été faites ces expériences. Il y a probablement lieu d'attendre la répétition de ces expériences avant de fonder sur elles des théories. En somme, les raisons pour lesquelles l'Infusoire soumis à une alimentation abondante ne se conjugue pas, tandis que l'individu mal nourri le fait, sont obscures, et il est difficile de comprendre pourquoi l'un ou l'autre régime puisse modifier son état organique interne au point de provoquer des phénomènes si différents. Quoi qu'il en soit, avant de se conjuguer, ainsi que l'a vu Balbiani, les Paramœcies présentent une grande vivacité de mouvements; elles paraissent excitées, se rassemblent en groupes, jouent en quelque sorte deux à deux, se tâtent avec leurs cils, nagent en s'accolant, se séparent de nouveau pour

recommencer, et ainsi de suite. Finalement, elles restent accolées d'une manière durable, par paires; mais cette réunion ne se produit pas toujours entre les individus qui étaient d'abord ensemble, de telle sorte que l'on est presque fondé à admettre un certain choix. Ces syzygies ne se produisent pas chez des individus isolés et à des moments indifférents; elles paraissent porter sur la majorité des individus d'une même infusion, et l'on admet leur retour périodique, en quelque sorte rythmique.

Ce rythme sexuel est dû, pour Julin, à ce que le noyau se divise dans les divisions ordinaires, et qu'il lui paraît impossible d'admettre que sa substance puisse s'accroître et fonctionner indéfiniment. Aussi son activité physiologique doit-elle s'épuiser peu à peu et lui-même dégénérer. C'est alors qu'interviendrait la conjugaison qui régénère un nouveau noyau, capable de présider à un nouveau cycle de divisions. Remarquons, toutefois, que lorsqu'on fournit une nourriture abondante à des Infusoires même déjà entrés en syzygie, la conjugaison cesse.

Dans la karyogamie, deux individus ayant subi l'évolution préalable s'accolent par la bouche et par une certaine étendue de leur surface. Le noyau, de même que dans la division ordinaire, se condense en une masse globuleuse, que certains observateurs pensent être constituée par un cordon enroulé en peloton. A cet état, il reste rarement entier. C'est ce qui arrive chez le *Paramœcium bursaria,* où le noyau de chaque individu continue à vivre et où il s'accroît même plus tard.

Chez le *Chilodon cucullulus,* le *Colpidium colpoda* et le *C. glaucoma,* le noyau reste aussi entier; mais vers la fin de la conjugaison, ou quelquefois plus tard seulement *(Chilodon),* cet élément meurt. Ainsi, chez les *Colpidium,* il devient de plus en plus petit et plus dense, et se transforme en une sphère sombre, homogène et brillante. C'est là un aspect qui se retrouve dans les corps protoplasmiques au repos ou en voie de dégénérescence, et qui a été observé, par exemple, dans les noyaux mourants des tissus malades, aspect bien différent de

celui de la vésicule germinative, qui, pleine de vie, est grande et claire. Ce noyau peut aussi acquérir des contours irréguliers et son contenu se diviser en morceaux de grandeur variable. En un mot, c'est là un phénomène de dégénérescence et de désagrégation.

Mais chez la plupart des Ciliés, le noyau se fragmente en morceaux dès l'abord. Dans les noyaux articulés, les articles se séparent et s'arrondissent, et souvent se divisent eux-mêmes encore. Quand les fragments sont peu nombreux, leur nombre est généralement constant; mais si la fragmentation continue, ce nombre devient variable. C'est là un obstacle à l'assimilation de ce processus avec la division du peloton en chromosomes. Cette fragmentation nucléaire est un processus sénile, observé aussi chez les plantes et les éléments malades. Les fragments du noyau disparaissent plus ou moins vite, probablement, dans la règle, par résorption. Certains auteurs pensent que quelquefois ils sont expulsés par l'anus.

J'ai observé, chez la Paramœcie verte, un processus qui n'est peut-être pas sans relation avec le phénomène précédent. Certains individus, moins grands et moins verts que les autres

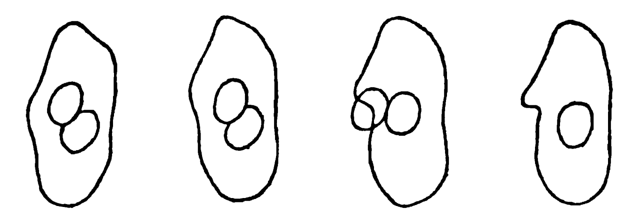


Fig. 67. — Paramœcie verte expulsant un corps d'aspect nucléaire.

dont les granules verts présentaient des contours grisâtres ou noirâtres, montraient, dans la région nucléaire, un corps réfringent divisé en deux. Ces corps se rapprochaient de la paroi du corps, et j'ai pu nettement constater l'expulsion de l'un d'eux.

Peu de temps après le commencement de la conjugaison, le ou les nucléoles s'accroissent et se multiplient par division.

Les produits de ces divisions s'atrophient et se résorbent à un certain nombre près. Le plus fréquemment, il en persiste deux.

Ainsi, chez l'*Euplotes patella,* le nucléole se divise trois fois de suite et forme ainsi huit corpuscules, dont six se résorbent; chez le *Paramœcium bursaria,* il y a aussi trois divisions, et il persiste finalement deux nucléoles; chez le *Paramœcium aurelia,* qui possède deux nucléoles, on observe trois bipartitions, de façon qu'il existe huit corpuscules dont sept s'atrophient et le corps restant se divise en deux; chez le *Paramœcium caudatum,* il y a aussi une triple bipartition, suivie de la formation de huit corpuscules, mais trois seulement avortent. Chez le *Colpidium colpoda,* qui n'a qu'un seul nucléole, les phénomènes présentent une marche plus simple. Pendant que le noyau montre des indices d'une régression lente, le nucléole constitue deux, puis quatre éléments de chromatine, dont trois s'atrophient bientôt, et un seul persiste; il ne s'y trouve donc plus alors que le quart de la chromatine primitive (Julin). Le nucléole se divise en deux corps nouveaux

La manière dont le nucléole se divise présente un certain intérêt; chez le *Stylonichia mytilus,* les nucléoles grossissent, deviennent granuleuses, puis montrent, à leur surface, une membrane enveloppante. Bientôt leur substance paraît fibrillaire, et constituée par des filaments allant d'un pôle à l'autre. C'est suivant l'axe ainsi déterminé qu'ils s'allongent. Les deux pôles, puis l'équateur, deviennent granuleux. Suivant le plan équatorial, les fibres montrent des renflements qui constituent, par leur réunion, une plaque équatoriale opaque, constituée par des corpuscules de chromatine. Ces corpuscules se dédoublent, comme dans la division cellulaire ordinaire.

Les nucléoles qui, chez les animaux conjugués, persistent après ces phénomènes sont les *noyaux de conjugaison.* Les deux conjoints échangent un de leurs nucléoles, probablement le plus souvent sous forme de fuseaux striés, l'un restant dans

l'organisme souche, et l'autre passant dans le voisin. Ce dernier, comparable à une sorte d'élément mâle, est le *noyau migrateur,* tandis que le premier est le *noyau stationnaire.* Le noyau migrateur de l'un des conjoints s'unit au noyau stationnaire de l'autre, pour former un noyau nouveau, dérivant de deux individus différents qui se séparent, le *noyau conjugué.*

Chez le *Colpidium,* les noyaux de conjugaison qui entrent dans la constitution du noyau conjugué ne fusionnent pas leurs parties constitutives. Ils se divisent, l'un et l'autre, en deux noyaux-filles, dont chacun est formé, par moitié, par chacun des deux noyaux de conjugaison.

En général, après l'échange des noyaux migrateurs, le noyau conjugué se divise en deux parties qui se subdivisent elles-mêmes. On trouve donc, généralement, vers la fin de la conjugaison, quatre fuseaux nucléolaires dans chaque individu, dont deux resteront des nucléoles, tandis que les deux autres s'accroîtront et se transformeront en corps clairs pour former des noyaux. Les individus conjugués se séparent et se divisent à leur tour, et chacun d'eux emporte un noyau et un nucléole. Cette marche générale est soumise, suivant les espèces, à une foule de variations. Ainsi, il y a quelquefois huit fuseaux par une nouvelle division des quatre premiers. Les deux individus de nouvelle formation seront la souche d'une nouvelle série de générations agames.

Chez le *Paramœcium caudatum,* les individus séparés possèdent chacun quatre corpuscules qui grossissent et forment des noyaux, tandis qu'un cinquième corpuscule constitue un nucléole. Ce dernier se divise bientôt, et sa bipartition est suivie de celle de l'Infusoire lui-même. Les deux nouveaux organismes prennent chacun deux noyaux et un nucléole. Puis, après une nouvelle division, chaque individu ne présente plus qu'un noyau avec un nucléole.

Le *Chilodon cucullulus,* vers la fin de la conjugaison, ne montre, à côté du noyau, que deux nucléoles médiocrement

gros. Après la séparation, l'un des deux s'accroît en un corps clair, sphérique, qui acquiert bientôt la structure d'un noyau, tandis que l'autre se condense, se rapetisse et se loge près de ce nouveau noyau, tandis que l'ancien noyau est expulsé.

Souvent, un des quatre corps se détruit, et il se forme alors deux noyaux et un nucléole. Dans ce cas, le dernier se divise lors de la bipartition de l'être.

Chez le *Paramœcium bursaria,* Balbiani a vu les deux corps agrandis se fusionner avec l'ancien noyau et l'un des deux nucléoles disparaître. Grüber admet la première partie de cette observation; mais il croit que le nucléole définitif est formé par la fusion des deux corps. D'autres démentent ces deux vues, surtout la dernière.

Jickeli, se basant sur les faits précédents, a publié une manière de voir qui ne paraît guère avoir avec la formation des globules polaires qu'une analogie lointaine. Il compare le rejet de ces globules à l'expulsion du noyau des Infusoires, devenu inutile après la karyogamie. Dans le cas même où ce rejet serait nettement établi, l'analogie recherchée serait loin de l'être. Les globules polaires doivent leur origine à une véritable division cellulaire; ils ne sont pas des éléments distincts purement et simplement expulsés. D'un côté, il y a une sorte d'évacuation physiologique; de l'autre, un véritable processus morphologique.

Tout en maintenant ses premières vues, Giard tente plus récemment de donner une interprétation de ce qui s'observe dans la conjugaison des Infusoires, de manière à établir entre tous ces faits des liens d'analogie plus ou moins étroits. Il admet que la concurrence vitale qu'il a imaginée entre les divers individus d'un même kyste existe aussi entre les noyaux d'un corps multinucléé. Donnant à sa théorie une portée plus générale, il compare ce qui se passe à l'évolution de l'œuf, par exemple, chez les Vers plats, où les vitellogènes ne sont autre chose que des ovaires dont les cellules ne deviennent pas des œufs, mais des éléments nutritifs. Chez les Polyclades, il n'y a

pas de vitellogène; mais plusieurs œufs sont souvent réunis dans une même enveloppe, et un seul d'entre eux se développe. Ce fait se voit même chez certains Gastéropodes (Néritines). De même, il pense qu'une lutte analogue entre les éléments nucléaires des organismes à plusieurs noyaux aboutit à des résultats identiques. Les éléments nucléaires qui s'atrophient sont, pour lui, les homologues des noyaux qui fonctionnent. Il généralise plus et explique certaines formations nucléaires qui se voient dans certains éléments d'une manière analogue. Ainsi les corpuscules nucléaires en régression des Infusoires sont les homologues des noyaux des *cellules-restes* dans la spermatogenèse du *Cossus ligniperda* (Gibson) ou des noyaux accessoires des spermatocytes des Chétognathes (Bolles Lee). Les noyaux accessoires des spermatides des Chétognathes représenteraient les globules polaires de l'élément mâle.

Mais, d'un autre côté, si le nebenkern, le centrosome, etc., correspondent au macronucléus, sa production ne saurait guère être assimilée à la division du micronucléus. Du reste, les globules polaires peuvent être expulsés sans centrosome; l'essence du phénomène ne se trouve donc pas en lui, mais peut-être dans le noyau qui, dans certaines théories, correspond au nucléole des Infusoires.

En résumé, sans l'énoncer formellement, cet auteur paraît disposé à admettre que les globules polaires peuvent être représentés par de simples éléments nucléaires internes en voie de régression, en même temps qu'il compare ces mêmes éléments aux cellules qui ne deviendront pas des œufs qui se voient dans les organes. Dans cette théorie, il y a donc assimilation de formations diverses et peu comparables, et abandon implicite de la théorie de l'œuf-kyste.

Du reste, des idées plus ou moins analogues ne sont pas rares, et avant Giard aussi bien qu'après, des vues de ce genre, fort variées, ont été publiées. Les uns ont cherché à homologuer avec les globules polaires les noyaux qui s'atrophient dans les Infusoires, tandis que d'autres les assimilent au noyau migrateur.

Dans l'une des interprétations, il y aurait lieu de montrer en quoi l'expulsion d'un corpuscule nucléaire est l'équivalent d'une division inégale, comme l'est celle qui constitue le globule polaire. Du reste, l'élément expulsé, loin d'avoir achevé son cycle et de s'atrophier, a un rôle et des destinées d'une importance fondamentale. Les globules polaires ne sont pas des corps expulsés du kyste hypothétique; ce sont des résultats de divisions qui se produisent à l'intérieur de celui-ci.

Pour que la division des noyaux des infusoires ait pu être comparée à la production des globules polaires, il a été nécessaire d'admettre que cette genèse était essentiellement nucléaire et que les nucléoles sont les homologues de la vésicule germinative, c'est-à-dire du noyau cellulaire. Dans ces conditions, il existait des ***noyaux polaires*** que l'on identifiait avec les globules polaires des Métazoaires, homologation qui nécessite encore l'admission de l'hypothèse que, chez les Infusoires, où ce phénomène paraît devoir être le plus intense, le nucléole qui se produit dans des conditions d'une égalité, au moins apparente, avec l'élément persistant, paraît n'avoir plus la puissance d'entraîner une division partielle du corps, alors que dans les Métazoaires il détermine toujours une division partielle et double avec une constance et des caractères spéciaux d'une uniformité frappante, de manière à être une division cellulaire et non une multiplication de nucléoles. Du reste, comparer les noyaux sans avenir des Infusoires aux globules polaires des Métazoaires, cela constitue une simple comparaison et non une explication de leur signification.

Rappelons que, pour Vejdovsky, la production des globules polaires est essentiellement l'expulsion du périplaste *(Entwickelungsgeschichtliche Untersuchungen)*. (Voir figures 19 à 29.)

En fait, on constate que l'œuf produit des corpuscules dont l'origine est obscure, de même que le nucléole des Infusoires se divise un certain nombre de fois. Il existe donc des produits de division cellulaire et des produits de division nucléaire. Y aurait-il lieu de ranger dans ces derniers les éléments connus sous les noms de ***noyau vitellin, noyau accessoire,***

centrosome et même *nucléole?* Dans ce cas, l'on assimilerait des éléments actifs chez les formes élevées, à des éléments sans rôle dans les groupes inférieurs. Quoi qu'il en soit, ce sont là deux ordres de formations distinctes, dont les unes, d'origine nucléaire, se produisent toujours avant les secondes, d'origine cellulaire, et pourraient exister seules ou déterminer la formation des secondes, suivant leur degré d'énergie fonctionnelle. Un fait analogue s'observe pour les noyaux vitellins qui, à l'état de centrosome, déterminent la division cellulaire.

Les globules polaires sont le résultat d'une division inégale. Les éléments sexuels, en général, se divisent deux fois après leur séparation des amas cellulaires qui leur ont donné naissance. Pour le mâle, le grand nombre étant nécessaire, tous les éléments arrivent à se développer. Pour la femelle, c'est la masse protoplasmique destinée à engendrer les organes qui est le plus nécessaire, d'où il existe une division inégale avec atrophie des petits produits au bénéfice de l'œuf définitif. Telle est l'explication de la signification des globules polaires, qui, dans l'état actuel de la science, réunit le plus de suffrages (1). L'obscurité qui règne encore sur cette question justifie cette interprétation.

Il y a lieu, toutefois, de ne pas se méprendre sur la valeur possible d'une pareille vue. Comparer les globules polaires aux spermatides constitue un rapprochement et non une explication réellement morphologique.

Si les globules polaires ne sauraient être assimilés aux produits du kyste des Protozoaires, ils n'en peuvent pas moins être comparés à des germes avortés, ainsi que je le rappelle plus haut et que je l'ai publié dès 1886, et ceci d'autant plus que leur assimilation avec les spermatides, qui, eux, sont des

(1) Dans la théorie morphologique, c'est l'ovogonie qui correspondrait à la spermatide, et la production des globules polaires serait une sorte de commencement de développement d'individus dans l'œuf, développement spécial précédant le développement particulier de chaque individu et de l'individu persistant.

germes effectifs, donne une nouvelle probabilité en faveur de mon hypothèse. Dans ce cas, il est toutefois utile de montrer que les globules polaires ne sauraient être assimilables aux noyaux polaires si ceux-ci sont les homologues des corpuscules d'origine nucléaire, tels que le noyau accessoire, etc. En effet, les spermatides, équivalents morphologiques des globules polaires, possèdent ce dernier élément.

SUR

LA POLARISATION DES ÉLECTRODES

DANS L'INTÉRIEUR DE LA PILE

PAR M. MORISOT,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES DE PHYSIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

CHAPITRE Ier

1. Depuis longtemps on sait que l'intensité du courant d'une pile s'affaiblit plus ou moins rapidement. Cet effet a été généralement attribué à l'action des corps qui se forment par l'action même du courant, ces corps s'accumulant sur les lames qui servent d'électrodes, ou dans leur épaisseur, soit dans la pile elle-même, soit dans une cuve dont le liquide est traversé et électrolysé par le courant. C'est ce dernier cas qui a été surtout étudié, particulièrement par M. Bouty (1).

Je me suis au contraire exclusivement occupé de la polarisation des lames servant d'électrodes dans la pile elle-même.

Après avoir observé les phénomènes, et mesuré les valeurs décroissantes de l'intensité, j'ai cherché, soit pour des piles sans dépolarisant, soit pour des piles avec dépolarisant, des hypothèses et des relations permettant de représenter mathématiquement la marche observée pour les intensités. J'ai comparé les résultats calculés avec les valeurs observées. Je me suis ainsi trouvé conduit à rejeter certaines hypothèses et leurs conséquences, conservant seulement celles dont les conséquences concordaient suffisamment avec l'expérience.

Dans le présent travail je veux rendre compte des obser-

(1) *Journal de physique*, 2e série, t. I, p. 346. — *Cours de physique de MM. Jamin et Bouty*, p. 213 et suivantes de l'édition de 1883.

vations et des considérations relatives aux cas particuliers que j'ai étudiés; je me propose de rechercher plus tard dans quelle mesure les résultats obtenus peuvent être généralisés, et comment ils devront être modifiés dans des cas différents.

2. Les piles que j'ai étudiées avaient toujours comme pôle négatif une lame de zinc amalgamé large de 2 centimètres, longue d'environ 16 centimètres, et comme pôle positif une lame de graphite artificiel du commerce. Je me suis borné à l'étude de piles composées d'un seul élément, de force électromotrice variant de $0^{\text{volt}},5$ environ à 2 volts environ (au début).

3. *Méthodes d'observation et appareils.* — Pour altérer le moins possible le régime du courant pendant la durée des expériences, j'ai rejeté l'emploi d'appareils qu'il eût fallu substituer les uns aux autres pour la mesure distincte des intensités et des forces électromotrices ou des résistances. J'ai préféré ne mesurer jamais que des intensités, en choisissant un galvanomètre à la fois sensible et rapide.

Chaque observation comprenait deux lectures. La première correspondait à une résistance connue R, interposée dans le circuit pendant le régime normal et pendant cette première lecture. Dans les expériences relatives aux piles sans dépolarisant, j'ai adopté pour R la valeur de 5 ohms. Dans les expériences relatives aux piles avec dépolarisant, j'ai adopté $R = 3$ ohms. Cette première lecture donnait une indication correspondante à une intensité i_R, laquelle, en vertu de la loi d'Ohm, peut être représentée par

$$(1) \qquad i_R = \frac{E}{R + r},$$

E désignant la force électromotrice à l'instant de cette lecture, r la résistance intérieure de la pile au même instant, additionnée à la résistance très petite des parties invariables du courant.

La deuxième lecture se rapportait à une résistance auxiliaire R' qui a toujours été égale à $R + 2$. Elle donnait une

indication correspondante à une intensité $i_{R'}$ pour laquelle on a

$$(2) \qquad i_{R'} = \frac{E}{R' + r}.$$

Chaque lecture durant au plus 7 secondes, peut-être aurais-je pu considérer, pendant ce court intervalle, E et r comme constants, et traiter comme contemporaines les deux lectures. J'ai préféré recourir au procédé suivant :

Sur une même feuille de papier quadrillé, je traçais, pour chaque série d'observations, la courbe représentant les intensités i_R à l'aide des points correspondant aux intensités i_0, i_τ, $i_{2\tau}$, $i_{3\tau}$..., les temps étant comptés sur la ligne des abscisses et les intensités servant d'ordonnées. J'y traçais ensuite la courbe des $i_{R'}$ à l'aide des points correspondant aux temps $0^m + 7^s$, $\tau^m + 7^s$, $2\tau^m + 7^s$ ..., etc.

Cette dernière courbe me donnait très approximativement les valeurs $i_{R'}$ qu'on aurait lues si on avait pu les lire en même temps que les valeurs i_R, et qui auraient correspondu aux valeurs de E et de ρ à l'époque précise des lectures i_R. Je pouvais alors, à l'aide des valeurs i_R et $i_{R'}$ simultanées, déduire des équations (1) et (2) les valeurs suivantes :

$$(3) \qquad E = \frac{(R' - R)\, i_R\, i_{R'}}{i_R - i_{R'}},$$

$$(4) \qquad \rho = \frac{R'\, i_{R'} - R\, i_R}{i_R - i_{R'}}.$$

On sait que l'intensité est proportionnelle à la déviation δ ou à sa tangente tant que cette déviation est petite. Comme elle n'a jamais, dans nos expériences, dépassé 3°, on peut admettre

$$\begin{cases} i = \omega\delta, \\ i' = \omega\delta', \end{cases}$$

ω étant un facteur correctif. On peut donc écrire

$$(5) \qquad E = \frac{(R' - R)\delta\delta'\omega}{\delta - \delta'},$$

$$(6) \qquad \rho = \frac{R'\delta' - R\delta}{\delta - \delta'}.$$

Ainsi, dans l'expression de la résistance, on peut, sans correction, remplacer les intensités par les déviations lues (ou leurs tangentes); mais l'expression de la force électromotrice en volts, et celle des intensités en ampères, exigent l'emploi du facteur correctif ω. Nous verrons plus loin comment on peut facilement le déterminer. Du reste, dans la plupart des cas, n'ayant à comparer que des intensités i_n, l'emploi de ce facteur n'a pas été nécessaire.

4. *Mesure des intensités.* — J'ai choisi, pour ces mesures, le galvanomètre Deprez-d'Arsonval, remarquable par sa sensibilité et d'une apériodicité telle que le temps nécessaire à chaque lecture, en y comprenant l'établissement des conditions voulues et l'inscription de la valeur observée, ne dépassait pas 7 secondes.

On sait que ce galvanomètre se compose essentiellement d'un multiplicateur rectangulaire très léger, formant cadre allongé dans le sens vertical, et pouvant osciller autour d'un fil tendu verticalement. Ce fil sert à la fois : 1° d'axe de rotation; 2° de conducteur pour l'entrée et la sortie du courant; 3° de support à un petit miroir très léger, dont le rayon de courbure est d'un mètre.

Le cadre est placé entre les deux pôles d'un fort aimant en fer à cheval, fixe, dressés verticalement et créant un champ magnétique énergique et invariable. D'autre part, il peut osciller en entourant toujours un cylindre de fer doux fixe dont l'axe est précisément le prolongement du fil de suspension.

A un mètre en avant du miroir est disposée une règle blanche présentant, dans son plan vertical, une graduation en millimètres. Le zéro de cette graduation est placé au milieu de la règle, juste au-dessus d'un fil métallique tendu verticalement au milieu d'une fenêtre rectangulaire. Derrière cette fenêtre brille la flamme d'une lampe ou d'un bec de gaz à cheminée de verre; un diaphragme épais, percé d'une fenêtre correspondante à la première, garantit la règle contre l'échauffement

et les déformations qu'il produirait. On reconnaît, dans ces dispositions, la méthode dite *du miroir* de Poggendorff.

Quand aucun courant ne traverse le cadre, le faisceau lumineux qui émane de la flamme et traverse la fenêtre rectangulaire vient se réfléchir sur le miroir, et va peindre sur la raie du zéro de la règle l'image noire du fil-repère se détachant sur l'image brillante de la fenêtre.

Aussitôt que le courant est lancé dans le cadre multiplicateur, l'image noire se déplace d'un côté ou de l'autre, selon le sens du courant. Son déplacement mesure la tangente de l'angle 2δ; δ étant égal à la déviation du miroir, δ est toujours très petit; on peut donc admettre que $\operatorname{tang} \delta = \frac{1}{2} \operatorname{tang} 2\delta$. De telle façon, si le déplacement observé a été de $0^m,010$, $0^m,015$, $0^m,020$, etc., on aura pour $\operatorname{tg} \delta$, qui est proportionnel à l'intensité dans ce galvanomètre, une valeur égale à la moitié, c'est-à-dire $0^m,005$ ou $0^m,0075$ ou $0^m,010$, etc.

A l'aide d'une lentille de $0^m,25$ de distance focale, employée comme loupe, on peut, sans s'approcher trop, lire la division de la règle le plus près de laquelle s'arrête presque instantanément l'image noire; l'approximation est au moins d'un dixième de millimètre.

5. *Mise au zéro.* — Il est indispensable, préalablement à toute lecture, et avant de faire agir le courant, de s'assurer que l'image est bien au zéro. Une fois l'appareil bien installé et bien réglé, elle s'en trouve ordinairement écartée de 3 millimètres au plus; dans ce cas, il suffit, sans toucher au galvanomètre, de faire glisser légèrement la règle dans son plan vertical jusqu'à coïncidence de l'image noire et de la ligne du zéro.

Pour bien installer l'appareil, j'avais tout d'abord placé le galvanomètre sur une console en pierre scellée dans le mur du laboratoire, les trois pieds du galvanomètre reposant sur trois plaques de caoutchouc. Mais les trépidations du sol, provoquées surtout par le passage des voitures, faisaient osciller l'image et finissaient par produire des déplacements sensibles. J'ai

supprimé totalement cet inconvénient en plaçant le galvanomètre et les trois plaques de caoutchouc qui supportent ses pieds dans une boîte pleine de sciure de bois. La boîte elle-même repose sur un support à vis calantes qui permettent, sans rien déplacer, d'abaisser ou de relever l'image s'il y a lieu.

Avec ces précautions, j'ai souvent, après plusieurs mois d'interruption, retrouvé l'image sur le zéro ou tout près, et je n'ai plus vu l'image trembler dans aucun cas.

Le support de la règle est assujetti par une rainure le long du bord de la console, de manière à pouvoir glisser facilement de quelques millimètres parallèlement au plan de la règle, et normalement au faisceau lumineux pris dans sa position d'équilibre.

6. *Retour au zéro.* — Pour compter sur l'exactitude des deux lectures à peu près simultanées, il est indispensable de vérifier qu'après la dernière l'image-repère revient au zéro.

Tant que le déplacement ne dépasse pas les limites de la règle, et surtout tant que la durée du courant ne dépasse pas 15 ou 20 secondes, ce retour au zéro s'effectue exactement; mais si le déplacement a été trop grand et le courant maintenu un quart d'heure ou plus, le fil tendu du galvanomètre conserve, même après la suppression du courant, une torsion résiduelle qui ne disparaît que très tard. On sait alors que les dernières lectures faites doivent être diminuées, selon leur époque, d'une fraction de cette torsion résiduelle. Dans les observations exposées dans ce travail, je n'ai jamais eu à faire cette correction plus ou moins douteuse.

7. *Détermination du facteur* ω. — Pour fixer la valeur de ce facteur, j'ai employé un couple de Daniell composé toujours comme il suit. Dans le même vase poreux, bien nettoyé et lavé chaque fois, on verse une dissolution de sulfate de cuivre aussi pur que possible, dans laquelle on plonge une lame de cuivre contournée de manière à soutenir la réserve de cristaux. Autour de ce vase poreux on met, avec le manchon de zinc, une disso-

lution de sulfate de zinc de densité 1,16. Le volume de cette dissolution est au moins de 1,500 centimètres cubes, et le zinc ne descend pas jusqu'au fond. Ainsi, à mesure que la formation de nouveau sulfate de zinc rend plus denses certaines portions du liquide, celles-ci descendent et s'accumulent au fond sans toucher le zinc.

Malgré ces conditions de constance, le courant de cette pile n'est pas absolument invariable. Son intensité commence par augmenter très lentement pendant deux heures environ, probablement jusqu'à ce qu'il se soit établi un régime définitif entre les deux liquides qui communiquent par les pores du vase. Enfin se manifeste un maximum qui persiste au moins cinq ou six heures et souvent beaucoup plus. Pendant cette période, on fait plusieurs couples d'observations ($i_R\, i_{R'}$). On les trouve presque toujours identiques. On peut donc, en portant leurs moyennes dans les formules du § 3, en déduire ω. Pour cela, nous avons admis, comme on le fait généralement, que la force électromotrice maxima du couple Daniell vaut 1^{volt},09.

On a

$$\omega = 1,09 \times \frac{\delta - \delta'}{(R' - R)\delta\delta'}.$$

J'ai très souvent refait cette détermination et j'ai trouvé toujours

$$\log \omega = \bar{3},85682, \qquad \omega = 0,007191.$$

8. *Shuntage du galvanomètre.* — Le galvanomètre employé est tellement sensible que, même shunté au millième, c'est-à-dire traversé par la millième partie seulement du courant, il donne un déplacement de l'image qui dépasse de beaucoup les limites de la règle.

Pour ramener ce déplacement en deçà des limites qui permettent de le mesurer et de le considérer comme proportionnel aux intensités, j'ai ajouté au shunt normal une dérivation supplémentaire. Je l'ai obtenue à l'aide d'un mince fil de cuivre isolé par de la soie, de longueur convenablement choisie

par tâtonnement. — L'ensemble de ces trois conducteurs se partageant le courant pendant les mesures peut être appelé la *branche* ou le *réseau galvanométrique*.

9. Nous avons vu que le passage du courant, maintenu quelque temps, altère l'élasticité de l'axe tordu. Il y avait donc lieu de restreindre la durée de ce passage au temps nécessaire pour les deux lectures du même groupe (soit 15 secondes environ).

On pouvait craindre aussi que le régime du courant se trouvant modifié pendant les lectures, les intensités observées ne fussent plus ou moins inexactes. En effet, j'ai souvent constaté qu'une résistance plus grande étant interposée, l'intensité, d'abord diminuée, s'élève ensuite pendant cinq ou dix minutes, et réciproquement. Ces effets sont probablement dus à ce que la polarisation diminue quand l'intensité moyenne est plus faible, et inversement.

Pour éviter les incertitudes ou les erreurs provenant de cette cause, j'ai établi, entre les deux extrémités de la branche galvanométrique, un conducteur destiné à la remplacer dans l'intervalle des mesures, c'est-à-dire pendant le régime normal. Ce conducteur, de longueur déterminée par tâtonnement, est tel que, si la branche galvanométrique étant traversée seule par un courant bien constant, on lit un déplacement D, on lise un déplacement $\frac{D}{2}$ environ quand le même courant se partage entre la branche galvanométrique et ce conducteur normal. Celui-ci est alors très sensiblement de même résistance que la branche galvanométrique, et la substitution de l'un à l'autre ne troublera pas le régime du courant.

Pour opérer cette substitution, je n'ai pas eu confiance dans les commutateurs ou inverseurs ordinaires. En effet, j'avais souvent constaté des inégalités causées par la différence de pression ou les altérations des surfaces qu'il est presque impossible de conserver identiques à elles-mêmes. J'ai préféré presser dans des serre-fils à plusieurs trous les bouts des fils,

ayant eu soin de terminer ces fils par des parties rigides assez épaisses pour que les vis, sans les mordre ou les déformer, puissent les serrer énergiquement en assurant des contacts toujours également exacts. Le seul inconvénient est qu'il faut un peu plus de temps, à cause de la translation de chaque fil d'un trou à l'autre : encore avons-nous vu que l'opération est bien courte.

10. Les résistances interposées R et R′ étaient fournies par une boîte bien étalonnée de Carpentier.

Voici l'ordre des opérations à effectuer pour chaque couple de lectures :

1° Constater que le galvanomètre, avant le passage du courant, marque zéro ;

2° Remplacer le conducteur ordinaire par la branche galvanométrique et lire le déplacement de l'image ;

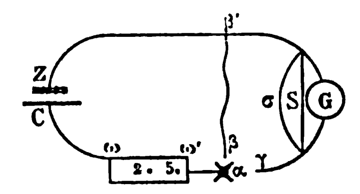
3° Retirer la clavette 2, ce qui augmente de 2 ohms la résistance primitive, et lire le nouveau déplacement ;

4° Replacer la clavette 2, ce qui rétablit la résistance de régime ;

5° Remplacer la branche galvanométrique par le conducteur ordinaire, et constater le retour au zéro.

Dans les calculs, les résistances des parties invariables sont comptées avec la résistance intérieure r de la pile, dont elles représentent une fraction très petite, moyennant qu'on ait pris pour ces portions du circuit des fils assez courts et assez gros.

Voici un schéma représentant l'ensemble du circuit :



$C\omega$, $\omega'\alpha$, $Z\beta'$, fils invariables.
$\beta\beta'$, conducteur ordinaire.
γ { G, galvanomètre. S, shunt. σ, dérivation supplémentaire. } β', branche galvanométrique.

L'état de régime s'obtient en réunissant β' et α, γ étant ensuite éloigné. — L'état correspondant aux mesures s'obtient en réunissant α et γ et en éloignant seulement alors β.

Ainsi le circuit n'est jamais interrompu. Seulement, pendant un temps très court, β et γ étant en même temps en communication avec α, le courant se partage entre $\beta\beta'$ et $\gamma\beta'$. Il en résulte pendant ce temps une diminution de résistance, mais elle est passagère et certainement sans effet sensible.

CHAPITRE II

Piles sans dépolarisant.

11. Les couples employés dans cette série d'expériences avaient comme pôle négatif une lame de zinc amalgamé avec soin. J'avais cru d'abord utile de plonger l'extrémité inférieure du zinc dans une coupelle de mercure, comme l'a fait M. Bergonié pour la pile de Leclanché. Mais cette disposition, avantageuse pour de longues durées, ne m'a pas semblé procurer d'avantage sensible dans mes expériences de durée relativement courte, et j'y ai renoncé.

Le liquide unique où plongeaient les deux lames a toujours été de l'acide sulfurique, pur autant que possible, étendu de neuf fois son volume d'eau distillée. (Densité de 1,12 environ.)

Pour que la composition du liquide en contact avec les lames variât le moins possible, j'employais un grand volume de liquide, un litre et demi environ. De cette façon, la très petite quantité de sulfate de zinc formée, rendant plus denses les parties voisines du zinc, celles-ci descendaient au fond, et cessaient de toucher le zinc; en effet, celui-ci, comme aussi le charbon, ne plongeait pas jusqu'au fond, s'arrêtant à 5 centimètres environ de ce fond. Du reste, des essais au densimètre,

faits sur des portions prises au milieu, m'ont toujours donné la même densité avant et après les expériences.

La lame de zinc, comme celle de charbon, avait 16 centimètres de long, dont 12 seulement plongés. Le zinc était soutenu au milieu par une pince portée par un support fixe; le charbon était soutenu par sa pince en cuivre posée sur le bord du vase, de manière que les deux faces du charbon baignaient bien librement.

L'intervalle des deux lames était d'environ 20 à 25 millimètres.

12. Dans de nombreuses expériences antérieures, j'ai constaté qu'il se formait, sur la partie du charbon voisine de la pince en cuivre le réunissant au conducteur positif, un dépôt de cuivre plus ou moins abondant. Ce cuivrage tendait à remplacer la surface charbon par une surface cuivre, et rapprochait l'élément étudié d'un couple de Volta : il diminuait certainement la force électromotrice. Je l'ai entièrement empêché en préservant le charbon de tout contact avec la pince en cuivre, à l'aide d'une lame de platine entourant les deux faces de la partie supérieure, et serrée directement par la pince, qu'elle déborde en bas et de côté. Cette monture de platine a toujours été ajoutée au charbon, dans toutes mes expériences.

J'ai employé des charbons de deux modèles, tous deux de même longueur (16 centimètres), de même épaisseur ($0^{cm},5$); mais les uns avaient la largeur de 4 centimètres (modèle du commerce), les autres, sciés par le milieu selon leur longueur, n'avaient plus qu'une largeur de 2 centimètres. Si nous appelons S (pour le petit modèle) la surface principale baignée, s chacune des surfaces latérales, et s' la surface inférieure, on voit que $2s$, restant le même pour les deux modèles, le rapport des surfaces baignées est $\frac{2S + 2s + 2s'}{S + 2s + s'}$, c'est-à-dire à peu près 2. J'indiquerai plus loin l'effet de ce doublement.

Enfin, pour savoir quelle pouvait être l'action d'un vase

poreux, j'ai interposé un de ces vases entre le zinc et le charbon, avec le même liquide en dedans et en dehors. Je n'ai pas constaté d'effet très sensible; peut-être en eût-il été autrement si mon vase poreux s'était trouvé d'un grain plus serré. Je me propose donc de reprendre cette question.

13. *Phénomènes généraux.* — Quelles que fussent les dispositions adoptées parmi celles que je viens de rappeler, j'ai toujours observé les phénomènes suivants :

Au début, quand l'intensité est maxima, on ne voit aucun dégagement de gaz sur le charbon; peu à peu, à mesure que l'intensité diminue, on voit des bulles se détacher du charbon; enfin l'intensité atteint une valeur minima qu'elle conserve: alors le dégagement de gaz paraît constant. Il semble donc que le charbon absorbe d'abord tout l'hydrogène libéré par le courant, et c'est cette absorption qui produit la polarisation, car elle remplace la surface charbon par une surface plus ou moins formée d'hydrogène attaquable, causant une force électromotrice inverse de la principale. Puis ce charbon finit graduellement par se saturer, et le gaz libéré se dégage alors tout entier sans s'arrêter sur le charbon.

La valeur minima de l'intensité, qui semble définitive, est atteinte au bout d'un temps assez court (35 à 45 minutes) pour les lames étroites, deux heures au moins pour les lames larges.

14. La lame de zinc, retirée et examinée peu de temps après que l'intensité définitive est atteinte, paraît à peine rongée; elle est restée presque aussi lisse qu'au début; et, si on la pèse, après l'avoir pesée préalablement avant l'expérience, on constate que le poids dissous est à peine supérieur à la dépense théorique. On a pu d'ailleurs remarquer pendant l'action qu'il se dégageait très peu de gaz autour du zinc.

Mais, dans plusieurs expériences, j'ai laissé la pile fonctionner beaucoup plus longtemps, deux ou trois jours par

exemple. Alors j'ai vu l'intensité, au lieu de rester stationnaire, recommencer à décroître, mais très lentement. La diminution totale après trois jours était seulement d'un quart (le déplacement étant réduit de 12 millimètres à 9 millimètres par exemple). Cette diminution devient de plus en plus sensible quand l'expérience se prolonge.

J'ai donc cru pouvoir négliger cette action pendant la période du décroissement rapide terminée par le minimum qui semblait définitif. Le décroissement rapide du début semble causé par la polarisation du charbon. Le décroissement très lent qui suit me paraît attribuable à l'altération du zinc amalgamé. En effet, le dégagement gazeux, d'abord si faible autour du zinc, devient, pendant le décroissement lent de l'intensité, de plus en plus intense, avec dégagement de chaleur. La lame de zinc, regardée après deux ou trois jours, se montre criblée de trous, souvent percée ou coupée. Il est probable que les bulles de gaz qui adhèrent quelque temps au zinc, avant de se dégager, agissent de deux façons : 1° elles augmentent la résistance, ce qui élève la température et active l'action de l'acide sur le zinc, en dehors de l'effet du courant; 2° en préservant passagèrement certains points de la surface, elles concentrent pour ainsi dire l'action chimique sur les autres : ces dernières se creusent et mettent en contact avec l'acide des couches intérieures moins bien amalgamées que les couches superficielles. Aussi la lame, pesée après ce temps, accuse une perte de beaucoup supérieure à la dépense théorique.

Dans les considérations qui suivent je n'ai interprété mathématiquement que les phénomènes constatés pendant le décroissement rapide du début.

15. *Établissement des relations fondamentales.* — On peut faire un grand nombre d'hypothèses pour interpréter ces phénomènes. Je ne crois pas utile de rappeler toutes celles que j'ai faites et contrôlées, dont les conséquences mathéma-

tiques ne m'ont pas semblé concorder suffisamment avec les résultats expérimentaux.

Voici celles que j'ai conservées comme les plus satisfaisantes.

On sait qu'un courant d'intensité égale à un ampère libère :

En une seconde : $0^{g},000\ 010\ 35$ d'hydrogène.

En une minute : $0^{g},000\ 621$ d°

En une heure : $0^{g},037\ 26$ d°

Nous appellerons a le poids d'hydrogène libéré par un courant d'un ampère pendant la durée qu'on aura choisie comme unité de temps.

Un courant constant d'intensité i ampères libérera ai grammes d'hydrogène pendant cette unité de temps. Considérons une durée dt assez courte pour qu'on puisse admettre l'intensité constante pendant cette durée : le poids d'hydrogène libéré pendant ce temps sera $ai\,dt$.

Cette quantité d'hydrogène peut être partagée en trois portions :

1° Celle qui s'ajoute à la masse d'hydrogène h déjà fixée par le charbon, et *active,* c'est-à-dire contribuant à diminuer l'intensité; nous l'appellerons dh.

2° Une seconde portion qui, tout en se condensant dans le charbon, n'a pas d'action sur l'intensité.

En effet, la force électromotrice dépend seulement de la nature des surfaces et non des parties profondes : la résistance ne dépend que des corps interposés dans le circuit et des couches superficielles des lames.

On peut considérer cet accroissement d'hydrogène inactif comme proportionnel à dh et à un facteur tel que, le charbon une fois saturé, quand h aura atteint la limite supérieure H, ce facteur deviendra nul et annulera la quantité en question. Nous représenterons cette seconde portion par

$$f(H - h)\,dh,$$

f désignant un facteur caractéristique de la lame de charbon. On sait, en effet, que ces lames ne peuvent être identiques.

3° La troisième portion est celle qui se dégage. On peut la considérer comme repoussée par l'hydrogène actif h, étant électrisée de même sens que lui. Admettons-la proportionnelle à h et aussi à la quantité totale $ai\,dt$ amenée par le courant, et enfin à un facteur caractéristique b. Sa valeur sera donc

$$b\,ai\,dt.$$

En réunissant ces trois portions, on a

$$ai\,dt = dh + f(\mathrm{H} - h)\,dh + b\,ai\,dt,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{dh}{dt} + f\mathrm{H}\left(1 - \frac{h}{\mathrm{H}}\right)\frac{dh}{dt} = ai(1 - bh).$$

Remarquons qu'à l'état de saturation, quand $h = \mathrm{H}$ et $dh = 0$, le premier membre est nul. Le second doit donc l'être aussi; or, i peut n'être pas nul alors; il faut donc $1 - b\mathrm{H} = 0$, d'où

$$b = \frac{1}{\mathrm{H}}.$$

Pour que cette relation ne renferme plus que h et sa dérivée $\frac{dh}{dt}$, il suffit d'exprimer i en fonction de h.

16. *Expression de i en fonction de h.* — La loi d'Ohm donne $i = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$. Or, E diminue à mesure que h augmente; admettant que cette diminution est proportionnelle à h, on aura

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 - \eta h,$$

E_0 désignant la force électromotrice initiale et η la diminution de force électromotrice que produirait la fixation d'un poids d'hydrogène actif égal à l'unité.

De même, la résistance qui augmente, mais de très peu, avec h, sera représentée par

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_0 + \sigma h,$$

R_0 désignant la résistance initiale et σ l'accroissement de résistance provoqué par la fixation du poids i d'hydrogène actif.

On aurait ainsi

$$i = \frac{E_0 - \eta h}{R_0 + \sigma h};$$

mais η et σ peuvent être utilement remplacés par des expressions plus nettement saisissables. A l'état de saturation, E prend une valeur définitive E' telle que

$$E' = E_0 - \eta H,$$

d'où on tire

$$\eta = \frac{E_0 - E'}{H}.$$

De même (R' étant la résistance à l'état de saturation), on a

$$\sigma = \frac{R' - R_0}{H}.$$

L'expression de i, après substitution à η et σ de leurs valeurs,

$$i = \frac{E_0 - (E_0 - E')\frac{h}{H}}{R_0 + (R' - R_0)\frac{h}{H}}.$$

Si nous posons, pour abréger,

$$\frac{E_0 - E'}{E_0} = \varepsilon,$$

$$\frac{R' - R_0}{R_0} = \rho,$$

et si nous remarquons que $\frac{E_0}{R_0}$ n'est autre chose que l'intensité initiale i_0, nous aurons

$$i = i_0 \frac{1 - \varepsilon\frac{h}{H}}{1 + \rho\frac{h}{H}}.$$

C'est cette valeur de i qu'on porte dans l'équation différentielle, laquelle devient, en divisant tout par H,

$$(1) \qquad \frac{\frac{dh}{dt}}{H} + fH\left(1-\frac{h}{H}\right)\frac{\frac{dh}{dt}}{H} = \frac{ai_0}{H}\,\frac{1-\varepsilon\frac{h}{H}}{1+\rho\frac{h}{H}}\left(1-\frac{h}{H}\right).$$

17. *Intégration.* — Profitons d'abord de ce que ρ est très petit pour remplacer le quotient $\dfrac{1-\varepsilon\frac{h}{H}}{1+\rho\frac{h}{H}}$ par la quantité plus simple $1-\zeta\frac{h}{H}$.

ζ est déterminé par la condition suivante : à l'état de saturation, quand $\frac{h}{H}=1$, on aura

$$1-\zeta=\frac{1-\varepsilon}{1+\rho},$$

d'où $\zeta=\dfrac{\varepsilon+\rho}{1+\rho}$ toujours < 1, puisque ε est < 1.

Plusieurs exemples, calculés numériquement, m'ont donné, entre les valeurs du quotient réel et celles de la quantité substituée, des écarts extrêmement faibles quand on fait varier $\frac{h}{H}$ de 0 à 1. Ainsi simplifiée, l'équation différentielle devient

$$\frac{dh}{dt} + fH\left(1-\frac{h}{H}\right)\frac{\frac{dh}{dt}}{H} = \frac{ai_0}{H}\left[1-(\zeta+1)\frac{h}{H}+\zeta\left(\frac{h}{H}\right)^2\right].$$

On supprime les constantes du second membre en posant $\frac{h}{H}=1-y$.

On a alors

$$-\frac{dy}{dt} - fHy\frac{dy}{dt} = \frac{ai_0}{H}\left[(1-\zeta)y+\zeta y^2\right],$$

laquelle, mise sous la forme

$$\frac{\frac{-\frac{dy}{dt}}{y^2}}{\left(\frac{1}{y}+\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)}-\frac{f\mathrm{H}(1-\zeta)}{\zeta}\frac{\frac{dy}{dt}}{\left(y+\frac{1-\zeta}{\zeta}\right)}=\frac{ai_0}{\mathrm{H}}(1-\zeta),$$

s'intègre facilement et donne

$$\mathrm{L}\left[\frac{1}{y}+\frac{\zeta}{1-\zeta}\right]-\frac{f\mathrm{H}(1-\zeta)}{\zeta}\mathrm{L}\left[y+\frac{1-\zeta}{\zeta}\right]=\mathrm{C}+mt,$$

m désignant la quantité $\frac{ai_0}{\mathrm{H}}(1-\zeta)$.

On transforme cette relation de la manière suivante :

$$\left[1-f\mathrm{H}\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)\right]\mathrm{L}\,[1-\zeta(1-y)]=\mathrm{C}'+mt+\mathrm{L}y.$$

La constante C′ est nulle, comme on peut le voir en faisant $t=0$, c'est-à-dire $\frac{h}{\mathrm{H}}=0$ ou $y=1$.

Enfin, remontant des L. nep. aux nombres, on a

$$(2)\qquad 1-\frac{h}{\mathrm{H}}=e^{-mt}\left(1-\zeta\frac{h}{\mathrm{H}}\right)^{1-f\mathrm{H}\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)}.$$

Telle est, sauf l'erreur provenant de la substitution de $1-\zeta\frac{h}{\mathrm{H}}$ au quotient $\frac{1-\varepsilon\frac{h}{\mathrm{H}}}{1+\rho\frac{h}{\mathrm{H}}}$, la relation finie liant $\frac{h}{\mathrm{H}}$ au temps.

18. Pour la discuter, nous poserons

$$(3)\qquad 1-f\mathrm{H}\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)=\lambda;$$

$\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)$ est toujours positif, $f\mathrm{H}$ également : le signe de λ dépendra donc de la grandeur de $f\mathrm{H}\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)$, inférieure, égale ou supérieure à 1.

1er Cas. — $\lambda > 0$. On a aussi alors $\lambda < 1$.

Remplaçons approximativement $\left(1 - \zeta \frac{h}{H}\right)^\lambda$ par son développement réduit aux deux premiers termes

$$1 - \lambda\zeta \frac{h}{H},$$

en nous fondant sur ce que λ, ζ, $\frac{h}{H}$ étant tous trois des fractions, les termes suivants seront très petits.

On a ainsi

$$(4) \qquad h = \frac{1 - e^{-mt}}{1 - \lambda\zeta e^{-mt}},$$

et par suite, en portant dans l'expression de i cette valeur approchée de h, on trouve

$$i = i_0 \frac{1 - \zeta\lambda e^{-mt} - \varepsilon + \varepsilon e^{-mt}}{1 - \zeta\lambda e^{-mt} + \rho - \rho e^{-mt}}. \qquad (\,)$$

En groupant les termes semblables, en divisant par $1 + \rho$, et remarquant que $i_0 \frac{(1 - \varepsilon)}{1 + \rho}$ n'est autre chose que la valeur définitive (soit j) de l'intensité, nous aurons

$$(5) \qquad i = \frac{j + M i_0 e^{-mt}}{1 - N e^{-mt}}$$

en posant

$$\begin{cases} M = \dfrac{\lambda\zeta + \varepsilon}{1 + \rho}, \\ N = \dfrac{\lambda\zeta + \rho}{\rho}, \end{cases}$$

tous deux positifs.

2e Cas. — $\lambda = 0$. Cette condition, en supprimant les quantités $\lambda\zeta$, laisse à M et N les mêmes signes.

3e Cas. — $\lambda < 0$. On a alors

$$M = \frac{-\lambda\zeta + \varepsilon}{1 + \rho},$$

$$N = \frac{-\lambda\zeta' + \rho}{1 + \rho}.$$

Ils pourront tous deux être négatifs : il suffirait pour cela que $\lambda\zeta$ fût plus grand en valeur absolue que ε (il serait *a fortiori* supérieur à ρ que nous savons très petit).

Mais alors on aurait

$$i = i_0 \frac{1 - Me^{-mt}}{1 - Ne^{-mt}}$$

avec $M > N$. Alors i augmenterait avec le temps, ce qui est évidemment contraire à l'expérience.

On devra donc toujours avoir $M > 0$, c'est-à-dire $\varepsilon - \lambda\zeta > 0$. Mais N pourra être négatif ou positif, $\lambda\zeta$ étant compris entre 0 et ε, c'est donc une fraction plus petite que ε.

Ainsi l'intensité, dans ce troisième cas, s'exprimera par la fonction suivante :

$$(6) \qquad i = \frac{j + Mi_0 e^{-mt}}{1 + Ne^{-mt}},$$

N étant $< M$ et pouvant être négatif.

19. *Calcul des paramètres géométriques* M, N, m. — J'appelle ces paramètres *géométriques*, parce que, une fois connus, ils permettront de construire la courbe des intensités calculées à l'aide de la formule.

Voici comment on les déduira de deux valeurs de i données par l'observation, en admettant j et i_0 connues aussi par l'observation.

Considérons trois époques équidistantes 0, τ, 2τ; elles donnent, avec la formule (6), les trois relations

$$(\alpha) \qquad i_0 - j = Mi_0 - Ni_0 \quad \text{pour } t = 0,$$

$$(\beta) \qquad (i_\tau - j)\, e^{m\tau} = Mi_0 - Ni_\tau \quad \text{pour } t = \tau,$$

$$(\gamma) \qquad (i_{2\tau} - j)\, e^{2m\tau} = Mi_0 - Ni_{2\tau} \quad \text{pour } t = 2\tau.$$

Par soustraction, on élimine Mi_0 et on obtient

$$(\delta) \qquad (i_0 - j) - (i_\tau - j)\, e^{+m\tau} = N(i_0 - i_\tau),$$

$$(\varepsilon) \qquad (i_0 - j) - (i_{2\tau} - j)\, e^{+2m\tau} = N(i_0 - i_{2\tau}).$$

Par division, on élimine N, ce qui donne

$$(\zeta)\qquad \frac{(i_0 - j) - (i_\tau - j)\,e^{m\tau}}{(i_0 - j) - (i_{2\tau} - j)\,e^{2m\tau}} = \frac{i_0 - i_\tau}{i_0 - i_{2\tau}},$$

ou

$$e^{2m\tau}(i_{2\tau} - j)(i_0 - i_\tau) + e^{m\tau}(i_\tau - j)(i_0 - i_{2\tau}) - (i_0 - j)(i_\tau - i_{2\tau}) = 0.$$

Cette dernière équation, qui est du second degré, admet deux racines; mais la forme (ζ) montre bien qu'une des racines est $e^{m\tau} = 1$. Elle n'est pas acceptable. L'autre, seule acceptable, est

$$e^{m\tau} = \frac{(i_0 - j)(i_\tau - i_{2\tau})}{(i_{2\tau} - j)(i_0 - i_\tau)}.$$

On aura ensuite, d'après (δ),

$$-\mathrm{N} = \frac{i_0 - j - (i_\tau - j)\,e^{m\tau}}{i_0 - i_\tau}.$$

Enfin, par (α) on aura

$$\mathrm{M} = \frac{i_0 - j - \mathrm{N}i_0}{i_0}.$$

20. *Calcul des paramètres physiques* ε, ρ, λ. — Mais ces paramètres géométriques M, N, m ne servent pas seulement à construire la courbe des intensités; ils peuvent encore donner les paramètres physiques.

On a en effet les relations notées plus haut :

$$j = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \rho},$$

$$\mathrm{M} = \frac{\pm\lambda\zeta + \varepsilon}{1 + \rho},$$

$$-\mathrm{N} = \frac{\pm\lambda\zeta + \rho}{1 + \rho}.$$

Ces trois relations se réduisent à deux, car leur combinaison donne $i_0 = \dfrac{j + \mathrm{M}i_0}{1 + \mathrm{N}}$, qui représente seulement l'état initial. Avec les deux dernières seules on aura seulement deux des

trois quantités ε, ρ, λ. On préférera en tirer ρ et λ. En effet, la courbe des forces électromotrices calculées avec les $i_n\, i_{n'}$ est toujours très régulière; il est donc plausible d'occuper les valeurs E_0 et E', qui donneront ε directement. Au contraire, la courbe des résistances calculées avec les $i_n\, i_{n'}$ est souvent irrégulière. Ces irrégularités s'expliquent par le dégagement pour ainsi dire intermittent du gaz, qui fait varier brusquement la résistance intérieure r. Il y aura donc lieu d'emprunter à M et N la valeur de ρ comme celle de $\lambda\zeta$.

On aura

$$\rho = \frac{e - (M + N)}{1 + M + N}$$

et

$$\lambda\zeta = M(1 + \rho) - e.$$

Or, on se rappelle que $\zeta = \frac{\varepsilon + \rho}{1 + \rho}$. Il sera donc facile de calculer λ et par suite fH. D'autre part, l'exposant $m = \frac{a i_0}{H}(1 - \zeta)$ aura été déduit de la valeur de $e^{m\tau} = u$ calculée plus haut.

$$m = \frac{Lu}{\tau L e}.$$

Il donnera H et par suite f.

21. J'ai essayé de mesurer expérimentalement H, en recueillant le gaz restitué par la lame de charbon placée dans le vide; mais, d'une part, j'ai vu le dégagement se prolonger très longtemps; d'autre part, j'ai pensé que le gaz ainsi dégagé n'était pas seulement l'hydrogène actif, mais, en plus, l'hydrogène inactif et surtout de l'air condensé préalablement par le charbon. J'ai donc renoncé à prolonger une opération fastidieuse, ne pouvant donner que des résultats incertains. Je me propose de revenir sur cette mesure expérimentale de la quantité d'hydrogène saturant la lame de charbon.

22. *Résultats numériques comparés aux résultats expé-*

rimentaux. — J'ai appliqué les formules précédentes à plusieurs exemples. Je ne crois pas nécessaire de citer les nombres obtenus. Je signalerai seulement qu'en dehors des valeurs de i prises comme déterminants de M, N et m, et qui étaient nécessairement concordantes, j'ai toujours trouvé, soit la concordance complète, soit des écarts assez petits pour qu'on pût les attribuer à de faibles erreurs de lecture ou surtout aux inexactitudes provenant de ce que nos formules ne sont après tout qu'approchées plus ou moins des relations véritables.

23. *Résultats de la comparaison des diverses expériences.* — J'ai constaté, par la simple comparaison des courbes, même sans calculer leurs paramètres, que, dans les cas où la surface du charbon était double, la force électromotrice ne change pas, la résistance change à peine, mais on voit grandir beaucoup le temps nécessaire pour réaliser la saturation. Ceci est conforme à nos formules. Si H est double, $\frac{a i_0}{H}(1-\zeta)$ se trouve réduit à la moitié, et par suite e^{-mt} réduit à sa racine carrée, ce qui réduit considérablement la vitesse du décroissement. La valeur finale de l'intensité j n'était pas toujours la même, mais variait peu, correspondant à un déplacement de l'image de 12 millimètres environ pour 80 millimètres environ au début.

24. J'ai remarqué encore, dans plusieurs cas, que deux expériences ayant été faites à vingt-quatre heures de distance, la seconde donnait toujours une force électromotrice initiale sensiblement moindre. Il est certain qu'en effet la lame employée le second jour était encore plus ou moins imprégnée d'hydrogène : elle était polarisée d'avance, au moins partiellement. Peut-être cette remarque donnerait-elle un moyen de mesurer la quantité H d'hydrogène qui sature le charbon ; je me propose de continuer des recherches dans ce sens.

J'ai du moins constaté, et cela un grand nombre de fois, qu'il faut plusieurs jours d'exposition à l'air pour que le

charbon employé, bien lavé et employé de nouveau comme pôle positif, donne la même force électromotrice initiale.

Aussi, pour débarrasser le charbon de l'hydrogène condensé, j'ai essayé d'employer l'acide azotique plus ou moins étendu. Au moment de l'immersion se manifeste un abondant dégagement gazeux : c'est probablement du bioxyde avec du protoxyde d'azote et de l'azote. Ce dégagement s'affaiblit et dure très longtemps, mais il n'est pas facile de saisir le moment précis où tout l'hydrogène est brûlé. Si peu que la lame reste imprégnée d'acide, malgré les lavages renouvelés, c'est à peu près comme si elle était dépolarisée par avance, comme le charbon dans une pile de Bunsen. En effet, employée dans cet état dans un couple ordinaire, elle donne une force électromotrice plus grande. Il y a donc erreur possible; j'ai renoncé à ce moyen.

J'ai encore essayé d'utiliser les actions secondaires en formant une pile à gaz avec le charbon saturé d'hydrogène et un autre charbon saturé d'oxygène pour avoir servi d'électrode positive dans un voltamètre. Le courant, intense d'abord, diminue et s'annule; mais alors on est seulement certain que celui des deux gaz qui n'était pas en excès est saturé. Il peut en rester dans une des deux lames. Il y a donc encore incertitude.

Je me suis donc contenté, pour ramener les charbons à l'état normal, de les bien laver, de les laisser longtemps dans l'eau, puis à l'air. Encore peut-on craindre que l'air dont ils se pénètrent en séchant ne joue, par son oxygène, le rôle de dépolarisant. En tout cas, cette action dure peu, car l'air se condense en bien moindre quantité et dans des circonstances moins favorables que l'hydrogène. Peut-être est-ce à cette petite quantité d'air dépolarisant qu'il faut attribuer les inégalités d'intensité initiale que j'ai constatées souvent pour un même charbon employé dans des circonstances aussi identiques que possible.

CHAPITRE III

Piles avec dépolarisant.

25. De toutes les piles de cette nature, celle qui m'a paru la plus intéressante à étudier, c'est la *pile de Poggendorff au bichromate de potasse avec vase poreux*. C'est en somme une pile de Bunsen dont l'acide azotique, désagréable et vite appauvri, est remplacé par une dissolution de bichromate additionnée d'acide sulfurique, et pouvant être entretenue à l'aide de cristaux placés dans un entonnoir plongeant près du charbon, dans le liquide dépolarisant.

Ce liquide, dans mes expériences, était toujours composé ainsi : *trois volumes* de dissolution de bichromate saturée, préparée d'avance, avec *un volume* d'acide sulfurique ; je n'ai pas toujours ajouté la réserve de cristaux.

Le liquide entourant le zinc était composé d'une façon analogue : trois volumes d'eau avec un volume d'acide sulfurique. J'ai choisi le même rapport $\frac{3}{1}$ pour éviter autant que possible les phénomènes d'osmose qui se produiraient, en dehors de l'action du courant, avec d'autant plus d'intensité que les liquides seraient plus différents. J'ai toujours renouvelé ce liquide entourant le zinc à l'aide d'un flacon de Mariotte et d'un trop-plein, pour éliminer le sulfate de zinc. J'employais toujours des lames de zinc de même modèle qu'au chapitre II, et je n'ai jamais, dans cette nouvelle série d'expériences, employé que des charbons larges de 4 centimètres (modèle du commerce). Dans plusieurs cas, j'ai aussi renouvelé d'une manière continue le liquide chromique, à l'aide d'un flacon de Mariotte à siphon effilé, et d'un trop-plein qui, plongeant au fond du liquide, se terminait en dehors par un bec effilé un peu plus bas que le niveau à maintenir.

Ce renouvellement m'a permis d'employer un couple de petites dimensions, contenant dans le vase poreux, avec le zinc, 140 centimètres cubes environ d'acide sulfurique au quart, et hors de ce vase, 250 centimètres cubes environ de liquide chromique. J'ai préféré placer ce liquide à l'extérieur pour mieux suivre, les parois du vase principal étant en verre, les modifications qu'il éprouve.

La petitesse des masses mises en expérience m'a semblé une condition favorable, dans le cas du renouvellement, pour qu'il fût plus vite effectué, et dans le cas de non-renouvellement, pour mieux saisir les conséquences de ce changement.

26. *Phénomènes généraux.* — Voici les phénomènes que j'ai, dans toutes les expériences de cette série, vus se reproduire.

Au début, le dégagement de gaz près du zinc est à peine sensible; puis il augmente, et après deux heures environ semble constant, bien régulier, ne rappelant jamais la violence qu'il manifeste pendant la période finale des piles non dépolarisées. De plus, la lame de zinc, pesée après plusieurs heures ou même quelques jours d'action, accuse une perte à peine supérieure d'un tiers (quelquefois d'une moitié) à la dépense théorique.

On la trouve uniformément et régulièrement attaquée, s'effilant pour ainsi dire de tous les côtés, au lieu d'être violemment et irrégulièrement rongée comme dans les piles sans dépolarisant. Ces circonstances confirment les considérations exposées à ce sujet dans le chapitre II.

27. Quant aux modifications éprouvées par le liquide chromique, elles sont très faciles à suivre. En effet, ce liquide est d'abord d'un beau rouge presque vermillon. Par l'action réductrice de l'hydrogène libéré, il se forme de l'alun de chrome, conformément à la réaction ainsi formulée :

$$KOCr^2O^6 + 4SO^3HO + 3H = Cr^2O^3,3SO^3,KOSO^3 + 7HO.$$

Cette réaction ne met en évidence que les états extrêmes : en effet, quand on abandonne à lui-même le liquide chromique employé pendant quelques heures et devenu brun, il dépose des cristaux volumineux bruns, très différents des cristaux rouges d'acide chromique ou des cristaux violets d'alun de chrome.

Quoi qu'il en soit, on peut ainsi résumer ce qui se passe. La dissolution d'alun de chrome est par elle-même d'un beau vert ; se mêlant au liquide rouge initial, elle produit une coloration passant au brun, puis au noir, puis au vert quand le liquide chromique est totalement transformé. Ainsi, dès le début, le changement de couleur révèle l'action progressive de l'hydrogène.

On voit le liquide brunir d'abord autour du charbon, à une distance d'un ou deux millimètres. Puis, la dissolution d'alun de chrome qui se forme étant un peu plus dense que le liquide rouge, elle descend le long du charbon, formant comme une gaine autour de lui. Notons déjà que cette gaine de liquide appauvri interposée entre le charbon et le liquide dépolarisant pur empêchera la dépolarisation d'être complète.

Ce liquide brun, à mesure qu'il descend, est lentement remplacé en haut par du liquide neuf. En bas il s'étale sous forme de couche horizontale. Si ce liquide brun et appauvri n'est pas, au fur et à mesure, emmené par le trop-plein, c'est-à-dire s'il y a pas renouvellement du liquide chromique, la couche foncée s'élève et noircit de plus en plus, et finit par occuper le volume entier, qu'on voit noircir puis verdir. — S'il y a renouvellement, cette couche, à peine formée, est poussée et emmenée dans le trop-plein, qui la rejette goutte à goutte au dehors. Encore faut-il que le renouvellement soit assez rapide, et même dans ce cas, la gaine signalée se forme toujours et diminue le pouvoir dépolarisant.

On pourrait être tenté d'empêcher ou d'atténuer la formation de cette gaine en agitant le liquide. Mais cette agitation devrait être très régulière ; de plus, comme elle distribuerait dans

tout le liquide chromique l'alun de chrome formé, l'appauvrissement de ce liquide n'en aurait pas moins lieu, mais avec un autre régime. Du reste, une portion du liquide, qui dès le début aurait imprégné le charbon, échapperait ensuite au mélange, et continuerait à faire sentir son action sur la surface. J'ai donc préféré laisser les phénomènes se produire spontanément, sans intervenir, une fois la pile mise en action. Je pouvais d'ailleurs les suivre beaucoup mieux dans les circonstances rappelées ci-dessus.

28. L'adhérence de la dissolution d'alun de chrome dans le charbon est prouvée par les faits suivants :

1° Quand on retire le charbon de la pile après quelques heures et surtout quelques jours d'action, si on le lave, même très largement, et si on l'abandonne à l'air où il semble se sécher, il se couvre bientôt de cristaux violets d'alun de chrome très nets, provenant du liquide fixé à l'intérieur, et qui peu à peu exsude à la surface et abandonne ces cristaux en s'évaporant en partie.

2° Quand, au lieu de quelques lavages suivis immédiatement de l'exposition à l'air, on plonge dans l'eau le charbon retiré de la pile, il verdit énergiquement cette eau. Si on la remplace à plusieurs reprises pendant un ou deux jours, chaque nouvelle provision verdit, mais de moins en moins fort.

Aussi, pour ramener les charbons employés à leur état normal, je les lavais d'abord à grande eau, puis je les laissais séjourner pendant un jour ou deux dans un grand vase plein d'eau; je les y laissais jusqu'à ce que la coloration verte n'apparût plus après plusieurs heures d'immersion. Ainsi l'alun de chrome, quoique adhérant énergiquement, persiste moins longtemps que l'hydrogène dans les couples sans dépolarisant; de plus, son action, qui semble uniquement celle d'un corps mécaniquement interposé, est à coup sûr beaucoup moins intense pour gêner la dépolarisation.

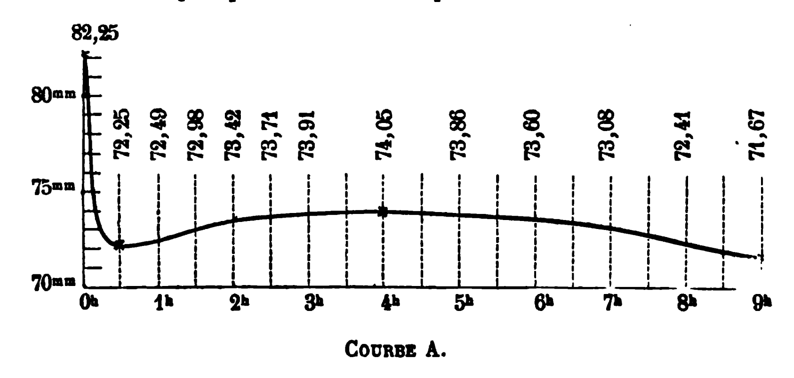
29. *Résistances*. — Les résistances, calculées par la méthode des lectures simultanées exposée plus haut, ont tou-

jours très peu varié dans les expériences de cette série. De plus, les écarts se trouvant souvent de signe contraire, on peut considérer la résistance intérieure comme constante et égale à la moyenne des valeurs calculées.

30. *Variations de l'intensité.* — Dans tous les cas, avec les piles à dépolarisant étudiées dans ce travail, j'ai vu l'intensité diminuer au début, mais en somme d'une fraction très faible, environ un dixième, et atteindre très vite un certain minimum ou un décroissement lent. C'est ici que se manifestent les effets du renouvellement.

1er Cas. — Le liquide dépolarisant n'est pas renouvelé, et il n'y a aucune réserve de cristaux. Dans toutes les expériences faites dans ces conditions, l'intensité, une fois arrivée au minimum précédemment indiqué, *se relève légèrement,* atteint un maximum inférieur à l'intensité initiale, puis décroît ensuite très lentement. Ainsi, même sans renouvellement d'aucune sorte, la petite quantité de liquide versée au début conserve longtemps un pouvoir dépolarisant notable.

La courbe A ci-jointe, tracée d'après une de nos expériences de ce genre (les autres étaient absolument semblables, aux nombres près, très peu différents), montre bien la marche de l'intensité. Sur la courbe sont marqués les déplacements δ; au-dessous, quelques intensités exprimées en ohms.

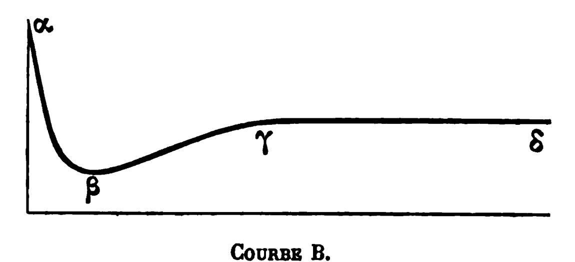


Courbe A.

$i_0 = 0^a,592$; $i_{0.30} = 0^a,519$; $i_4 = 0^a,533$; $i_9 = 0^a,515$.

31. *2me Cas.* — *Le liquide chromique n'est pas renouvele, mais une réserve de cristaux placée dans un entonnoir plongeant dans la partie supérieure de ce liquide entretient le bichromate.* L'intensité, dans toutes les expériences réalisant ce second cas, a suivi une marche analogue, mais avec des variations moins grandes : le minimum de début est moins éloigné de l'intensité initiale. — Le maximum est plus voisin du minimum, comme valeur; enfin le décroissement final est plus lent. C'est une transition au cas suivant.

32. *3me Cas.* — *Le liquide chromique est renouvelé d'une manière continue, plus ou moins rapidement.* La vitesse de renouvellement réglée par le niveau du bec du siphon qui verse le liquide du flacon de Mariotte était mesurée par le volume de liquide que le trop-plein emmenait pendant une heure. Quelle que fût cette vitesse, l'intensité a toujours suivi la marche représentée par la courbe B ci-jointe.



Courbe B.

Le décroissement final du cas précédent est remplacé par un état constant $\gamma\delta$ pendant lequel l'intensité conserve une valeur intermédiaire entre l'intensité initiale α et le minimum provisoire β.

Ainsi la disposition du 3e cas donne une constance véritable; celle du 2e cas, une constance approximative très suffisante dans beaucoup de cas pratiques. Nous avons pu le voir pour des sonneries électriques où d'ailleurs l'action de la pile est seulement intermittente et souvent suspendue.

L'accroissement de vitesse de renouvellement, à partir d'une

certaine valeur (80 centimètres cubes par heure dans nos expériences), n'a plus d'effet accusé. En deçà de cette limite, elle a pour effet d'amener un peu plus tôt l'intensité définitive en la rendant un peu plus grande.

33. *Interprétations mathématiques.* — Tous les phénomènes précédents s'expliquent facilement par des hypothèses, des considérations et des opérations plus simples que celles du chapitre II.

D'abord, pour établir la valeur de dh, on peut admettre que le dépolarisant, possédant au début son maximum de puissance, ne permet ni la condensation d'hydrogène inactif, ni le dégagement d'une partie de ce gaz.

Il y a donc lieu, au moins approximativement, de supprimer les termes $fH\left(1-\frac{h}{H}\right)\frac{dh}{dt}$ et bai. (Voir le § 15 du chapitre II.)

En revanche, il faut introduire un terme représentant *le poids d'hydrogène que brûle pendant l'unité de temps le dépolarisant.* Nous désignerons ce poids par φ et nous l'appellerons le *pouvoir dépolarisant* du liquide.

Comme il doit se retrancher du poids d'hydrogène libéré, on aura

$$\frac{dh}{dt}=ai-\varphi. \tag{1}$$

Une seconde simplification se présente; nous avons vu (§ 29) que la résistance, dans les expériences de cette série, pouvait être considérée comme constante. On aura donc (le terme σ disparaissant)

$$i=\frac{E_0-\eta h}{R_0},$$

ou

$$i=i_0-\frac{\eta}{R_0}h,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{R_0}{\eta}\frac{di}{dt},$$

ce qui donne à l'équation (1) la forme

$$-\frac{R_0}{\eta}\frac{di}{dt}=ai-\varphi.$$

34. Ici, il y a lieu d'examiner différents cas.

On ne peut, par hypothèse, admettre $\varphi = 0$; mais φ peut être constant ou variable.

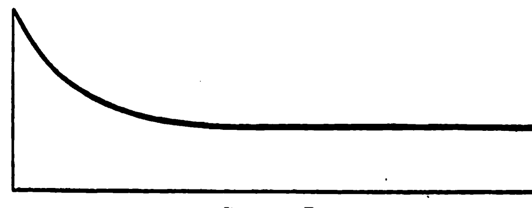
1er Cas. — φ constant. On voit d'abord que si le pouvoir dépolarisant était, dès le début, et se maintenait égal à ai_0, la pile serait, dès le début, constante. Ce serait l'idéal. Mais nous avons expliqué pourquoi, dans les exemples étudiés, ce cas n'avait pu se réaliser; mais on peut chercher des combinaisons s'en rapprochant beaucoup.

On voit aussi que si ai est faible, il suffira, pour amener $\frac{di}{dt}=0$, c'est-à-dire la constance, d'une valeur de φ relativement petite. Ainsi les piles de Daniell et de Leclanché, moins intenses, deviennent plus facilement et plus vite constantes que les piles plus fortes de Bunsen et de Poggendorff. L'avantage de la pile de Daniell consiste surtout en ce qu'il ne se décompose de sulfate de cuivre qu'en proportion même de l'intensité, et que cette perte est, à mesure, compensée par une dissolution de nouveau sel en quantité suffisante.

L'intégration de l'équation différentielle (avec φ constant) conduit à une relation de la forme

$$i = M + Ne^{-\alpha t}. \tag{2}$$

Représentée par une courbe analogue à celle-ci :



COURBE C.

elle ressemble, au moins par son aspect général, aux courbes qui représentent l'intensité dans les piles sans dépolarisant. L'intensité décroît d'abord (ici du moins) comme les termes

d'une progression géométrique, le temps croissant en progression arithmétique; puis, le terme e^{-mt} devenant négligeable, elle conserve une valeur $j = \frac{\varphi}{a}$.

35. *2e Cas.* — *φ variable.* Il faut alors ajouter une seconde équation différentielle représentant le mode de décroissement de φ.

Remarquons d'abord que, pendant le temps dt, le pouvoir dépolarisant s'affaiblit d'une quantité $-d\varphi$ proportionnelle à l'intensité du courant. On a donc, si aucune compensation n'a lieu,

(3) $$-\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{B}i,$$

B étant une constante caractéristique du liquide. Les deux équations différentielles simultanées (1) et (3) donnent lieu à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\mathrm{R}_0}{\eta}\frac{d^2 i}{dt^2} - \mathrm{A}\frac{di}{dt} - \mathrm{B}i = 0,$$

et à une intégrale de la forme

(4) $$i = \mathrm{M}e^{-mt} + \mathrm{N}e^{-nt}.$$

Cette fonction diffère de celle du 1er cas en ce que, même après l'évanouissement du terme le plus rapidement décroissant (soit $\mathrm{N}e^{-nt}$), elle continue à décroître, mais plus lentement.

Dans la réalité, la perte $-d\varphi$ est compensée plus ou moins complètement par le *renouvellement intérieur* signalé au § 25.

Soit $v\,dt$ la quantité d'hydrogène que peut brûler, pendant le temps dt, le liquide neuf qui remplace le liquide appauvri. On a

(3′) $$-\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{B}i - v,$$

cette troisième équation devant être combinée avec (1) et (3).

36. *3e Cas.* — Supposons d'abord v constant.

Si v était, au début, égal à $\mathrm{B}i_0$, il y aurait constance parfaite, et l'on retomberait dans le 1er cas.

Si v est inférieur à Bi, il y aura d'abord décroissement, puis équilibre. L'intensité sera représentée par

$$i = L + Me^{-mt} + Ne^{-nt},$$

avec deux cas possibles.

Si on a M positif, il y a décroissement continu, avec dérivée toujours négative, sans maximum ni minimum, comme au 1er et au 2e cas.

Si on a M négatif, on a :

$$i = L - Me^{-mt} + Ne^{-nt}.$$

Quand le terme Ne^{-nt}, le plus rapidement décroissant, s'est évanoui, on a :

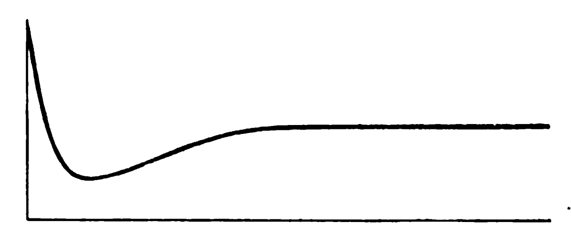
$$i = L - Me^{-mt},$$

dont la dérivée $+ mMe^{-mt}$ est positive. Il y a relèvement de l'intensité après un minimum correspondant à

$$mMe^{-m\tau} = nNe^{-n\tau};$$

enfin, $- Me^{-mt}$ s'évanouissant à son tour, l'intensité atteint une valeur maxima L, qu'elle conserve.

La forme de la courbe représentative



est précisément celle que nous ont donnée les expériences du § 32 (avec renouvellement du liquide chromique) [courbe B].

37. *4e Cas.* — Soit v variable, par exemple parce que le liquide dépolarisant n'est pas extérieurement renouvelé. La substitution intérieure de liquide neuf au liquide appauvri se fait de plus en plus difficilement. Aux équations différentielles antérieures

$$(1) \qquad -\frac{R}{\eta}\frac{di}{dt} = ai - \varphi,$$

$$(3') \qquad -\frac{d\varphi}{dt} = Bi - v,$$

il faudra ajouter une troisième équation représentant le décroissement de v.

Il est évident que ce décroissement est d'autant plus rapide que l'intensité est plus grande et appauvrit plus vite le liquide. On aura donc

$$(5) \qquad -\frac{dv}{dt} = \gamma i.$$

$\frac{d\varphi}{dt}$ étant emprunté à (1) et porté dans (3), $-\frac{dv}{dt}$ emprunté à (3) ainsi modifié, et porté dans (5), on obtient une équation différentielle du troisième ordre, conduisant à une intégrale de la forme

$$i = Le^{-lt} + Me^{-mt} + Ne^{-nt}.$$

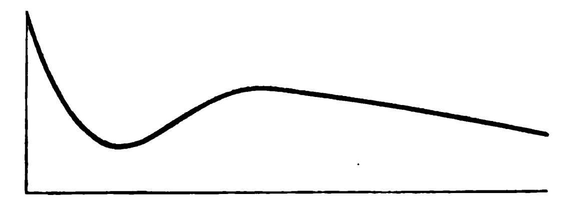
Le calcul des paramètres géométriques L, M, N, l, m, n à l'aide des paramètres physiques, supposés connus, ne serait pas toujours possible; ils sont liés par une équation du troisième degré. Mais le calcul inverse est toujours possible, les paramètres géométriques étant fournis par les données de l'observation.

L, M, N tous positifs donneraient un décroissement continu sans maximum ni minimum.

L et N positifs, avec M négatif, donnent une expression

$$i = Le^{-lt} - Me^{-mt} + Ne^{-nt}.$$

Elle ressemble au 3e cas, sauf que l'état final constant est remplacé par un décroissement indéfini et très lent. C'est pré-



cisément la forme donnée par les expériences faites sans renouvellement extérieur (§ 30, courbe A).

38. Ainsi le calcul nous a, à son tour, donné tous les résultats qu'avait fournis l'expérience. Il nous en a même fait entrevoir de nouveaux, comme c'est l'ordinaire, et peut ainsi nous guider dans des recherches ultérieures.

Je ne crois pas utile de donner ici les détails relatifs au calcul des paramètres géométriques à l'aide des valeurs observées. Je renverrai pour ce sujet à ma thèse (Faculté de Paris, 1882), où ces calculs se rencontrent souvent et sont présentés avec tous les détails nécessaires.

Je ne crois pas non plus devoir citer des exemples numériques. J'en ai calculé un grand nombre; j'ai toujours trouvé une concordance presque complète entre le calcul et l'expérience, sauf peut-être pour la branche qui précède le minimum terminant le décroissement rapide (coup de fouet, comme on dit industriellement). Les écarts, en somme très petits, constatés dans cette période, peuvent s'expliquer soit par la variation plus rapide de l'intensité, qui peut rendre plus sensibles les erreurs d'expérience, soit par l'exactitude imparfaite des approximations admises dans l'établissement de nos formules.

ANALYSIS SITUS

RECHERCHES SUR LES RÉSEAUX

PAR M. G. BRUNEL,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

Considérons un ensemble de points reliés les uns aux autres par des lignes de forme quelconque; la configuration formée par la totalité des points et des lignes constitue un ***réseau;*** les points recevront le nom de ***sommets,*** les lignes, le nom d'***arêtes*** du réseau. Au point de vue où nous nous plaçons ici, la forme d'une arête qui relie deux sommets est complètement indifférente; en d'autres termes, la configuration est déformable à volonté, pourvu qu'après une déformation les dispositions relatives des sommets et des arêtes n'aient pas été altérées. On peut regarder comme identiques deux réseaux qui contiennent le même nombre de sommets et le même nombre d'arêtes, lorsque l'on peut établir une correspondance entre les sommets de chacun d'eux, en sorte que deux sommets reliés dans la première configuration sont aussi reliés dans la seconde configuration, le nombre des lignes de jonction étant d'ailleurs alors le même dans les deux réseaux.

Nous ne considérerons dans la suite que les réseaux connexes, c'est-à-dire tels que l'on peut, en suivant les arêtes du réseau, aller d'un sommet quelconque du réseau à un autre sommet également quelconque.

On connaît relativement aux réseaux quelques propositions générales. Nous pouvons rappeler les suivantes :

Le nombre des sommets d'où part un nombre impair d'arêtes est toujours pair. Si l'on désigne par 2_q ce nombre, le nombre minimum de traits continus, simples, c'est-à-dire tels qu'au-

cune portion de l'un d'eux ne soit point tracée deux fois, qui passent par toutes les arêtes, est égal à q. Il est égal à 1 si $q = 0$.

L'étude des différents modes de détermination, pour un réseau donné, de l'ensemble des traits continus qui comprend la totalité des arêtes du réseau, a été faite dans quelques cas plus ou moins complexes.

Si l'on désigne par A le nombre des arêtes, par S le nombre des sommets et par F le nombre des contours ou des trajets fermés linéairement indépendants qui existent dans le réseau, on a la relation

$$F = A - S + 1.$$

La détermination d'un système de trajets indépendants relatif à un réseau donné ne présente aucune difficulté. Il n'en est plus de même s'il s'agit de trouver tous les systèmes différents de trajets indépendants, bien que la connaissance d'un système contienne implicitement celle de tous les autres.

Parmi les trajets fermés constitués avec les arêtes d'un réseau, on a été conduit, dans une série de questions d'aspect au premier abord différent, à examiner d'une façon spéciale ceux qui passent par tous les sommets.

Nous nous proposons ici de montrer comment la question précédente se pose naturellement quand on considère les réseaux, et aussi comment on en trouve non moins simplement la solution. Le temps matériellement nécessaire pour écrire successivement les différentes solutions du problème pourra être considérable; la méthode qui permettra d'arriver à toutes les solutions n'en sera pas moins rigoureuse et déterminée.

Un réseau étant donné, distinguons les différents sommets par des caractéristiques différentes, par des lettres $a, b, c, d, \ldots$ ou par des chiffres $1, 2, 3, 4, \ldots$, ou de telle autre façon que l'on voudra. En désignant par S le nombre des sommets, on formera un tableau à double entrée contenant S lignes et S colonnes. Chacune des lignes et chacune des colonnes sera affectée à chacun des sommets et portera son indice caractéristique. Si, par exemple, le point d'indice p est relié par une

arête du réseau au point d'indice q, on insère dans la $p^{\text{ième}}$ ligne et dans la $q^{\text{ième}}$ colonne un symbole indiquant l'existence de cette arête. Il convient de choisir, pour représenter une arête reliant les deux sommets p et q, un symbole où apparaissent ces deux indices, par exemple le symbole [1]

$$\begin{smallmatrix} p & \\ & q \end{smallmatrix}$$

unique s'il n'existe qu'une arête entre les sommets p et q; si ces deux sommets étaient reliés par plus d'une arête, on aurait recours à un symbole à plusieurs termes

$$\begin{smallmatrix} p & \\ & q_1 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} p & \\ & q_2 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} p & \\ & q_3 \end{smallmatrix} + \ldots,$$

où chaque terme correspond à l'une des arêtes de liaison existant entre les sommets p et q. Si les deux sommets ne sont pas reliés, la case restera vide.

On pourra ainsi représenter, par exemple, un triangle dont les trois sommets sont désignés par les lettres a, b, c par le tableau

(1)

	a	b	c
a		$\begin{smallmatrix} a & \\ & b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} a & \\ & c \end{smallmatrix}$
b	$\begin{smallmatrix} b & \\ & a \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} b & \\ & c \end{smallmatrix}$
c	$\begin{smallmatrix} c & \\ & a \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c & \\ & b \end{smallmatrix}$	

un tétraèdre de sommets a, b, c, d par le tableau

(2)

	a	b	c	d
a		$\begin{smallmatrix} a & \\ & b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} a & \\ & c \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} a & \\ & d \end{smallmatrix}$
b	$\begin{smallmatrix} b & \\ & a \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} b & \\ & c \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} b & \\ & d \end{smallmatrix}$
c	$\begin{smallmatrix} c & \\ & a \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c & \\ & b \end{smallmatrix}$		$\begin{smallmatrix} c & \\ & d \end{smallmatrix}$
d	$\begin{smallmatrix} d & \\ & a \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} d & \\ & b \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} d & \\ & c \end{smallmatrix}$	

[1] On pourrait tout aussi bien employer les deux lettres $p\,q$ placées sur une seule ligne, mais on verra par la suite pourquoi nous préférons un symbole au premier abord d'aspect plus compliqué.

et un prisme à bases triangulaires a, b, c, a', b', c', par le tableau

(3)

	a	b	c	a'	b'	c'
a		$^{a}{}_{b}$	$^{a}{}_{c}$	$^{a}{}_{a'}$		
b	$^{b}{}_{a}$		$^{b}{}_{c}$		$^{b}{}_{b'}$	
c	$^{c}{}_{a}$	$^{c}{}_{b}$				$^{c}{}_{c'}$
a'	$^{a'}{}_{a}$				$^{a'}{}_{b'}$	$^{a'}{}_{c'}$
b'		$^{b'}{}_{b}$		$^{b'}{}_{a'}$		$^{b'}{}_{c'}$
c'			$^{c'}{}_{c}$	$^{c'}{}_{a'}$	$^{c'}{}_{b'}$	

Lorsqu'un sommet est relié à lui-même par une arête ne présentant sur son trajet aucun autre sommet, nous disons qu'il y a auto-liaison. Le tableau correspondant contiendra dans la diagonale principale les symboles représentatifs de ces auto-liaisons. Dans les exemples précédents, il n'y a pas d'auto-liaison, et la diagonale principale est vide.

A un réseau donné correspond donc un tableau déterminé de liaisons auquel on peut d'ailleurs donner des formes différentes, suivant l'ordre dans lequel on inscrit les sommets dans les lignes et dans les colonnes. Inversement à un tableau donné répond un réseau déterminé; le tableau doit cependant être tel que les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale contienne les symboles des deux mêmes sommets, mais en sens inverse ([1]), le symbole $^{p}{}_{q}$ d'une part et le symbole $^{q}{}_{p}$ de l'autre.

([1]) Dans des questions de nature un peu différente de celles qui se présentent ici, nous avons été conduits à examiner des tableaux non symétriques relativement à la diagonale principale; cela arrive, par exemple, lorsque les points ou sommets représentent des êtres, idées ou objets reliés entre eux, en sorte que l'on peut, d'une façon directe, passer d'un des sommets à un autre sommet par un chemin déterminé sans qu'il soit nécessaire pour cela que la marche inverse du second au premier soit admissible. La marche inverse peut exister ou ne pas exister suivant les cas. Cette particularité ne se présente pas dans les réseaux; une arête peut être décrite dans un sens comme dans l'autre.

Dans le tableau relatif à un réseau apparaissent alors, si l'on fait abstraction de la première ligne supérieure et de la première colonne à gauche où figurent les sommets, un système de n^2 éléments, chacun des éléments étant simple si deux sommets du réseau sont reliés par une seule arête, quelques éléments étant des sommes de symboles dans le cas contraire. Un tel système de n^2 éléments peut être considéré comme un *déterminant*, et on est alors amené à se demander quelle est la signification d'un *terme* d'un déterminant de cette nature.

Nous n'aurons pas à tenir compte du signe à attribuer à un tel terme; la notion de terme d'un déterminant s'introduit ici comme elle apparaît au commencement de la théorie des déterminants, et nous aurions pu la laisser absolument de côté si nous n'avions tenu à indiquer la façon dont nous sommes arrivé à la solution des problèmes dont il va maintenant être question.

Un terme du tableau résulte de la considération simultanée d'éléments pris en sorte qu'il existe dans l'ensemble un élément de chacune des lignes et un élément de chacune des colonnes.

Les n éléments qui figurent dans un terme représentent des arêtes qui constituent un ou plusieurs trajets passant par tous les sommets du réseau. Cela résulte immédiatement de la notion de terme d'un déterminant ou d'un tableau.

En effet, si aucun des éléments constituant le terme considéré n'appartient à la diagonale principale, partons d'un élément ${}^{a}{}_{b}$ de la ligne a et de la colonne b, et prenons comme élément consécutif l'élément qui appartient à la ligne b, élément dont l'existence a été supposée. Soit ${}^{b}{}_{c}$ cet élément, prenons à la suite l'élément appartenant à la ligne c, et ainsi de suite. Comme le nombre de lettres a, b, c ... est fini, on arrivera nécessairement, en employant ce procédé, à un symbole présentant dans sa constitution une des lettres déjà employées. Ce sera nécessairement le symbole initial a, car, autrement, si c'était le symbole b, par exemple, l'élément dont il s'agit contiendrait un dernier symbole ${}^{l}{}_{b}$ ou ${}^{b}{}_{l}$ avec deux symboles ${}^{a}{}_{b}$

et $^{b}{}_{c}$, c'est-à-dire que b n'apparaîtrait pas seulement dans une ligne et dans une colonne, ce qui est contre l'hypothèse. On obtient donc de la sorte un premier trajet fermé constitué avec les arêtes du réseau. Si ce trajet ne passe pas par tous les sommets du réseau ou, en d'autres termes, si les éléments qui ont servi à le constituer sont en nombre inférieur à n, on formera de la même manière, en partant d'un élément $^{a'}{}_{b'}$ non employé, un nouvel ensemble répondant à un nouveau trajet fermé passant par des sommets non encore occupés, et ainsi de suite.

Si, dans le terme considéré, l'élément qui suit immédiatement $^{a}{}_{b}$ n'est autre que $^{b}{}_{a}$, on se trouve dans un cas spécial et on est amené à considérer comme trajet fermé particulier une arête décrite successivement dans les deux sens.

Si le terme contient enfin des éléments de la diagonale principale, ces éléments correspondent à des auto-liaisons. On a alors dans le réseau pour chaque élément de la diagonale une boucle issue d'un sommet et aboutissant à ce sommet. Les autres éléments fournissent comme précédemment des trajets fermés ou des arêtes décrites deux fois. L'ensemble constitue en tout cas un trajet ou une série de trajets constitués avec les arêtes du réseau et passant par tous les sommets du réseau.

Il est facile de voir que, inversement, à tout trajet fermé ou à tout ensemble de trajets constitué avec les arêtes du réseau et passant par tous ses sommets correspond un terme du tableau définissant le réseau.

Nous sommes donc ainsi amenés à considérer dans un réseau les trajets fermés qui passent par tous les sommets du réseau, et nous voyons en même temps que la solution de la question nous sera fournie par le développement du tableau relatif à ce réseau.

Le raisonnement précédent s'applique sans grande modification au cas où plusieurs arêtes relient les deux mêmes

sommets ou bien au cas où il existe relativement à un même sommet une auto-liaison multiple. Ceci posé, il est facile de ramener au cas où n'existe aucune auto-liaison ni aucune liaison multiple, le cas général.

S'il existe des liaisons multiples, la détermination des trajets d'un réseau à liaison simple fournit la solution du cas général si dans la solution d'un réseau on remplace les symboles d'une arête ${}^{a}{}_{b}$ par les différents symboles ${}^{a}{}_{b_1}$, ${}^{a}{}_{b_2}$..., représentant les autres arêtes qui vont de a en b.

S'il existe des auto-liaisons, la solution comprend deux classes distinctes de solutions, celles où figurent les boucles d'auto-liaison et alors les trajets passant par les autres sommets sont fournis par la solution du même problème relatif au cas où les sommets présentant des auto-liaisons sont laissés de côté, et d'autre part les solutions où les boucles d'auto-liaison ne figurent pas, c'est-à-dire où l'on néglige dans le tableau du réseau les éléments qui figurent dans la diagonale principale.

En résumé, *la construction sur un réseau d'un trajet fermé ou d'un ensemble de trajets constitués avec les arêtes, passant par tous les sommets, revient donc à la formation des termes du tableau du réseau, chaque terme contenant un élément d'une ligne et un élément d'une colonne. Le tableau peut être supposé à diagonale vide. Ses éléments peuvent être supposés simples.*

Nous étudierons d'une façon plus spéciale le cas où le nombre des sommets est pair, et, ayant en vue la détermination des trajets formés d'un seul trait qui passent par tous les sommets, nous examinerons tout particulièrement les trajets contenant un nombre pair d'arêtes.

Nous distinguons alors d'une façon toute particulière dans un tel trajet ou dans un tel ensemble de trajets ce que nous appellerons un demi-trajet. Un demi-trajet est constitué par un ensemble de k symboles ${}^{p}{}_{q}$ tel que les $2k = n$ symboles

correspondant aux différents sommets apparaissent tous et chacun d'eux une seule fois dans la totalité des k symboles.

Il est évident que, en prenant dans un trajet simple ou multiple passant par les $2k$ sommets du réseau, les arêtes d'un même ordre de parité relatif au seul trajet existant, ou bien les arêtes d'un même ordre de parité dans les différents trajets qui peuvent exister, on trouvera un demi-trajet défini comme il vient d'être dit.

On voit facilement, d'autre part, qu'un trajet passant par tous les sommets du réseau peut être considéré comme le *produit* de deux demi-trajets. Nous avons été conduit à la considération de ces demi-trajets par la considération du tableau des liaisons ou du déterminant relatif au réseau défini comme il a été dit précédemment.

Si l'on considère les éléments ${}^{p}{}_{q}$ et ${}^{q}{}_{p}$, symétriques par rapport à la diagonale principale, comme égaux et de signes contraires, leur valeur étant d'ailleurs quelconque, le déterminant étudié est un déterminant symétrique gauche. Dans le cas où nous nous plaçons, le déterminant étant d'ordre pair est un carré parfait, et on sait immédiatement former l'expression dont le carré fournit la valeur du déterminant.

Les théorèmes connus de Jacobi et de Cayley sur ces déterminants peuvent s'énoncer en disant qu'il suffit, si nous ne tenons pas compte du signe des termes du développement, de former avec les éléments qui figurent dans l'un des triangles du tableau situé au-dessus ou au-dessous de la diagonale principale un terme où apparaissent les différents indices de chacune des lignes et de chacune des colonnes. Ce n'est autre chose, au point de vue où nous nous plaçons ici, que la formation d'un demi-trajet.

Par exemple, le tableau relatif au tétraèdre peut être considéré comme le carré du symbole

$${}^{a}{}_{b}{}^{c}{}_{d} + {}^{a}{}_{d}{}^{b}{}_{c} + {}^{a}{}_{c}{}^{b}{}_{d},$$

où le signe + signifie la prise en considération simultanée des différents symboles qu'il relie ; et si dans le développement du carré de cette expression symbolique on néglige les termes qui contiennent le produit d'un symbole par lui-même, c'est-à-dire si l'on ne tient pas compte des trajets formés par le tracé successif, dans un sens et dans l'autre, d'une seule et même arête, on obtient des trajets fermés contenant un nombre pair d'arêtes passant par tous les sommets du réseau et obtenus comme produits de deux demi-trajets. On a ainsi, dans le cas précédent, les trajets simples

$$\begin{smallmatrix} a & & c & \\ & b & & d \end{smallmatrix} \times \begin{smallmatrix} a & & b & \\ & d & & c \end{smallmatrix},$$

où les demi-trajets sont formés de symboles lus dans un sens déterminé : de gauche en haut à droite en bas. Mais on peut condenser le produit symbolique ainsi obtenu en l'écrivant sous la forme

$$\begin{smallmatrix} a & & c & \\ & d & & b \end{smallmatrix},$$

où le second facteur apparaît dans les symboles d'arêtes lus de gauche en haut à droite en bas, et le second facteur, au contraire, figure dans les symboles d'arêtes lus de gauche en bas à droite en haut. Le symbole total doit être considéré comme fermé sur lui-même ou bien comme commençant en un quelconque des symboles d'arêtes qu'il renferme. Ainsi, il y a identité entre le trajet indiqué par le symbole écrit précédemment et le symbole

$$\begin{smallmatrix} c & & a & \\ & d & & b \end{smallmatrix}.$$

Le développement du carré de la somme des trois demi-trajets relatifs au tétraèdre fournit de la même façon les deux autres trajets

$$\begin{smallmatrix} a & & b & \\ & c & & d \end{smallmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{smallmatrix} a & & c & \\ & b & & d \end{smallmatrix}.$$

Les symboles de trajets complets ont, dans le cas présent, même forme que les symboles des demi-trajets ayant servi à

les former, mais le symbole d'un trajet complet n'est pas lu de la même façon que celui d'un demi-trajet; dans un demi-trajet les symboles constitutifs vont par couple et représentent des arêtes issues d'un sommet et aboutissant en un autre sommet, aucun sommet n'étant jamais commun à deux arêtes, tandis que dans le symbole d'un trajet complet les symboles de sommets sont lus successivement en haut, en bas, en haut, en bas, etc. Nous avons pu conserver le même mode de représentation pour les demi-trajets et pour les trajets complets, car il n'y a jamais de confusion possible entre eux. Les uns se lisent par bonds, les autres d'une façon continue.

Ceci posé, il est facile de voir que la recherche des trajets passant par tous les sommets d'un réseau d'un nombre pair de sommets et ne contenant qu'un seul trajet ou plusieurs trajets fermés contenant chacun un nombre pair de sommets, revient à la construction des demi-trajets.

Si les demi-trajets sont formés, le produit de deux demi-trajets qui ne contient le carré d'aucun élément fournira un des trajets cherchés.

Mais la construction des demi-trajets se ramène toujours à la construction de demi-trajets pour un réseau d'ordre moins élevé.

En effet, formons le tableau des liaisons, non plus sous forme de carré, mais en n'écrivant que ce qui, dans le déterminant du réseau, se trouvait, par exemple, au-dessus de la diagonale principale. Pour le tétraèdre, par exemple, nous nous contenterons d'écrire

a	b	c	d
b	c	d	
c	d		

et pour le prisme à bases triangulaires :

a	b	c	a'
b	c	b'	
c	c'		
a'	b'	c'	
b'	c'		

cette forme de représentation des liaisons du réseau étant, au fond, identique au mode de représentation employé précédemment.

On voit immédiatement comment on peut développer un tableau de cette nature de façon à obtenir le symbole des demi-trajets.

Prenons comme exemple le dernier tableau.

La lettre a peut être reliée à l'une des lettres b, c ou a'. Prenons d'abord la première inscrite, la lettre b; nous obtenons un premier symbole d'arête ${}^{a}{}_{b}$; mais, en prenant ce symbole, nous avons fait un choix arbitraire et il y aura lieu de revenir ultérieurement sur les cas que nous excluons ainsi. Les lettres a et b étant maintenant employées, prenons le symbole du sommet que nous regardons comme immédiatement consécutif, le symbole c; il est uniquement relié à c', car les symboles ${}^{c}{}_{b}$ et ${}^{c}{}_{a}$ ne doivent plus être introduits, par suite de l'élimination faite auparavant de a et b. On obtient donc le symbole ${}^{c}{}_{c'}$.

La première lettre non encore employée est a' qui ne peut plus, d'après la formation du tableau et les emplois déjà faits, être que b'. De là, le symbole ${}^{a'}{}_{b'}$ qui, pris avec les précédents, donne le demi-trajet

$${}^{a}{}_{b}\,{}^{c}{}_{c'}\,{}^{a'}{}_{b'}.$$

Il y aurait à étudier maintenant les symboles de demi-trajets commençant par ${}^{a}{}_{c}$ et ${}^{a}{}_{a'}$. Nous pouvons remarquer que, comme nous l'avions indiqué précédemment, le symbole ${}^{c}{}_{c'}\,{}^{a'}{}_{b'}$ est le symbole d'un demi-trajet relatif au réseau déduit du prisme à deux bases triangulaires, lorsque l'on supprime l'arête ${}^{a}{}_{b}$, les arêtes qui aboutissent au point a et les arêtes qui aboutissent au point b. — La propriété est d'ailleurs évidemment générale et l'on peut dire, par suite, que la détermination des demi-trajets se ramène successivement à la

détermination de demi-trajets pour des réseaux de moins en moins complexes.

De plus nous pouvons établir maintenant que la recherche des demi-trajets complémentaires d'un demi-trajet revient à la recherche des demi-trajets relatifs à certains réseaux parfaitement déterminés. En effet, si nous supprimons dans un réseau les arêtes qui figurent dans un demi-trajet, la configuration obtenue est un réseau dont nous savons former les demi-trajets, qui sont complémentaires du demi-trajet considéré.

La détermination des trajets simples ou multiples contenant tous les sommets d'un réseau lorsqu'on s'assujettit à ne considérer que des trajets possédant un nombre pair de sommets revient donc à la construction de demi-trajets appartenant au réseau, cette construction se ramenant d'ailleurs au même problème pour des réseaux de plus en plus simples.

Un trajet formé d'un seul trait a un seul symbole représentatif si l'on suppose que l'on prend comme point de départ un sommet donné et si l'on choisit l'une des deux arêtes qui dans ce trajet partent de ce sommet comme arête initiale.

Un trajet formé de deux traits admet deux symboles représentatifs; on suppose que l'on prend un sommet initial et une arête initiale issue de ce sommet; le deuxième trait peut à partir d'un sommet initial donné être décrit dans un sens ou dans l'autre. Les demi-trajets correspondant à cette double alternative sont essentiellement distincts.

De même un trajet formé de trois traits peut être considéré de quatre manières différentes comme le produit de deux demi-trajets. La connaissance des deux demi-trajets qui fournissent un tel trajet à trois traits entraîne avec elle la connaissance de trois autres couples de demi-trajets fournissant le même produit. Et ainsi de suite.

La détermination des trajets à plusieurs traits s'est présentée au même titre que celle des trajets d'un seul trait, et l'existence de ces trajets multiples, même si l'on a en vue exclusivement

les trajets simples, est importante en ce sens qu'elle fournit des vérifications nombreuses et indispensables qu'il est nécessaire de faire pour établir la justesse des opérations faites pour obtenir les demi-trajets.

Nous avons appliqué le procédé qui vient d'être indiqué à l'Icosian Game et retrouvé les résultats connus dus à Hamilton.

Une autre application non moins intéressante est celle relative à la coloration des cartes géographiques avec quatre couleurs. On sait, en effet, qu'il suffit de considérer la question dans le cas où partent de chaque point de rencontre de plusieurs lignes frontières trois lignes frontières seulement, en d'autres termes, de considérer des réseaux à sommets d'où partent trois arêtes ou à sommets trilatéraux. On est alors nécessairement dans le cas d'un nombre pair de sommets. Le problème se ramène ensuite au suivant : affecter les arêtes de trois indices λ, μ, ν, en sorte que les trois arêtes aboutissant à un sommet offrent l'une l'indice λ, la seconde l'indice μ, la troisième l'indice ν. Dès lors, si on considère l'ensemble des arêtes affectées de deux indices, λ et μ, par exemple, cet ensemble constitue un ou plusieurs trajets fermés, chaque trajet fermé contenant un nombre pair de sommets et tous les sommets se trouvant d'ailleurs employés, c'est-à-dire des trajets de la nature de ceux qui ont été examinés précédemment.

Le procédé indiqué plus haut permet donc de numéroter les lignes frontières d'une carte géographique modifiée de manière à ne présenter que des sommets trilatéraux, comme il le faut pour en déduire immédiatement sa coloration avec quatre couleurs. — Il est facile de voir que la méthode fournit toutes les colorations possibles.

On obtient également de la même façon la solution théorique complète du problème du saut du cavalier sur l'échiquier. La solution effective demanderait trop de temps et exigerait trop d'espace pour être tentée. Numérotant les cases de l'échiquier de 1 à 64, il suffit de former le tableau des liaisons

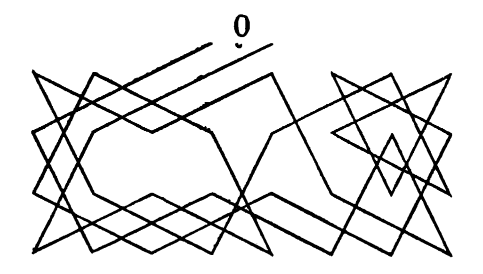
qui existent entre ces cases, deux cases étant supposées reliées lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par un saut du cavalier. Le développement de ce tableau, effectué comme nous l'avons dit, fournirait tous les trajets du cavalier pour lesquels un seul trait fermé, ou un ensemble de plusieurs traits partiels fermés, constitue un trajet total passant par toutes les cases.

La question de la détermination d'un trajet partant d'une case, passant par toutes les autres cases pour aboutir en une case donnée se résout théoriquement d'une façon aussi simple. Il suffit de représenter dans le tableau relatif au réseau que nous considérons une arête de liaison entre la case initiale et la case finale et de prendre dans le développement du tableau les termes qui contiennent le symbole de l'arête ainsi introduite.

La même méthode nous permet encore de compléter un saut du cavalier dont on donne une portion. Étant donné par exemple un trajet du cavalier sur l'échiquier passant par toutes les cases, on en arrache une partie, et on se propose, non pas de reconstituer la portion supprimée, mais de construire les trajets tels que ceux que l'on a supprimés, qui forment avec les branches de trajet conservées un trajet unique passant par toutes les cases.

Parmi les différentes applications que nous avons faites de la méthode indiquée, nous avons choisi pour le présenter ici un problème de la classe qui vient d'être signalée. La question est la suivante.

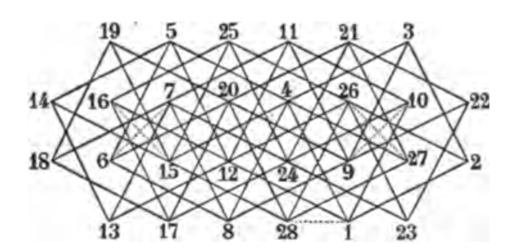
Euler a donné un saut du cavalier dont voici la demi-moitié inférieure :



On obtient la demi-moitié supérieure en faisant tourner de 180° la figure précédente autour du centre O de l'échiquier. En d'autres termes, on peut déduire immédiatement de la figure tracée une figure complétant avec elle un saut du cavalier. N'y a-t-il pas moyen de compléter le trajet d'autre façon? Nous allons voir qu'il y a toute une série de solutions.

Figurons les centres des cases de la portion supérieure de l'échiquier et attribuons à chacun de ces centres ou à chacune des cases un indice particulier, un chiffre par exemple. Nous simplifierons la question en remarquant dès l'abord que les centres des cases qui figurent au coin du rectangle formant la demi-moitié supérieure de l'échiquier sont nécessairement reliés à deux cases, et à deux cases seulement, qui, sur la figure ci-dessous, sont respectivement les cases 6, 7; 9, 10; 15, 16; 26, 27.

Un trajet passant par toutes les cases passe nécessairement par les cases situées aux quatre coins du rectangle, contient donc forcément les lignes qui vont du point 6 au point 7, du point 9 au point 10, du point 15 au point 16, du point 26 au point 27.



De plus, le trajet inférieur tracé sur l'échiquier doit se relier au trajet supérieur, c'est-à-dire que le point 1 doit, par l'intermédiaire du trajet inférieur, être relié au point 28. Les lignes pointillées sur la figure ci-dessus représentent donc des liaisons *nécessaires;* les lignes pleines, tracées d'après la règle qui régit la marche du cavalier sur l'échiquier, indiquent les liaisons *possibles.*

Le tableau des liaisons relatif au réseau qui nous occupe est alors le suivant :

1	2	4	10	12	28	15	16	19	25	28
2	3	26				16	17	25		
3	4	9				17	18	20	24	
4	5	8	15	27		18	19			
5	6	12	14			19	20			
6	7	8	20			20	21	28		
7	8	11	13	18	24	21	22	24	27	
8	9					22	23			
9	10	11	20	22		23	24	26		
10	11	24				24	25			
11	12					25	26			
12	13	16	26			26	27	28		
13	14					27	28			
14	15									

C'est là le tableau qu'il faut développer pour répondre à la question posée. Quelques simplifications résultent de ce que le trajet total doit nécessairement contenir les symboles

$$ {}^{1}{}_{28},\ {}^{6}{}_{7},\ {}^{9}{}_{10},\ {}^{15}{}_{16} \text{ et } {}^{26}{}_{27}. $$

Nous appellerons demi-trajet fondamental un demi-trajet contenant le symbole ${}^{1}{}_{28}$. Il est facile de voir qu'il n'existe aucun demi-trajet contenant à la fois les symboles ${}^{6}{}_{7}$ et ${}^{9}{}_{10}$ ou bien à la fois les symboles ${}^{15}{}_{16}$ et ${}^{26}{}_{27}$.

En effet, si 6 est relié à 7 et 9 relié à 10, 8, qui pouvait apparaître avec 4, 6, 7 et 9, ne peut plus se présenter qu'avec 4, puisque 6, 7 et 9 sont employés; 3 ne pouvait se présenter qu'avec 2, 4 et 9, il ne peut être lié dans le demi-trajet qu'avec 2, puisque 4 et 9 ont déjà été employés.

Or, maintenant, 5 ne peut plus être relié à 4 ni à 6, il peut être relié à 12 ou à 14; s'il est relié à 12, 11 ne peut plus être introduit dans le demi-trajet, car les seuls points avec lesquels il était relié, 7, 9, 10 et 12, ont déjà été employés; s'il est relié

à 14, 13 apparaît forcément avec 12, et 11 ne trouve plus sa place. Un demi-trajet ne peut donc jamais contenir ${}^{6}{}_{7}$ et ${}^{9}{}_{10}$.

La même chose a lieu si l'on considère les deux arêtes ${}^{15}{}_{16}$ et ${}^{26}{}_{27}$. Si l'on suppose leur existence simultanée dans un demi-trajet, ce demi-trajet contient ${}^{25}{}_{24}$, et alors 21 ne peut apparaître qu'avec 20 ou avec 22. Si le demi-trajet contient ${}^{21}{}_{22}$, 23 n'est relié à aucun sommet non employé : il y a impossibilité. De même si le demi-trajet contient ${}^{21}{}_{20}$, il contient nécessairement ${}^{19}{}_{18}$, et 17 n'est relié à aucun sommet non employé. Un demi-trajet ne peut donc jamais contenir ${}^{15}{}_{16}$ et ${}^{26}{}_{27}$.

Il y a donc quatre types, et quatre types seulement, de demi-trajets fondamentaux :

A	ceux qui contiennent		${}^{1}{}_{28}\;{}^{6}{}_{7}\;{}^{26}{}_{27}$.
B	»	»	${}^{1}{}_{28}\;{}^{6}{}_{7}\;{}^{15}{}_{16}$.
C	»	»	${}^{1}{}_{28}\;{}^{9}{}_{10}\;{}^{26}{}_{27}$.
D	»	»	${}^{1}{}_{28}\;{}^{9}{}_{10}\;{}^{15}{}_{16}$.

Ceci posé, il nous suffit de procéder, par la méthode dichotomique indiquée dans les pages précédentes, au développement des réseaux de plus en plus simples auxquels on arrive successivement pour obtenir la suite des demi-trajets fondamentaux A, B, C et D que nous donnons maintenant.

La suite de ces demi-trajets contient dans une première colonne l'indice du type A, B, C ou D auquel appartient le demi-trajet et un numéro spécial, puis à la suite le symbole de toutes les arêtes constituant le demi-trajet dans l'ordre où ces arêtes se sont présentées. Les espaces libres sont supposés remplis par les symboles qui figurent dans les lignes déjà écrites au-dessus de la ligne considérée.

ÉNUMÉRATION

des demi-trajets fondamentaux des quatre classes.

A	1	1 6 26 2 4 8 10 12 14 16 18 20 22 24	28 7 27 3 5 9 11 13 15 17 19 21 23 25
	2	16 17 19 21 23	25 18 20 22 24
	3	21 22	24 23
	4	17 18 21 23	20 19 22 24
	5	21 22	24 23
	6	17 18 20 22	24 19 21 23
	7	12 13 15 17 20 22 24	16 14 19 18 21 23 25
	8	15 17 19 21 23	25 18 20 22 24
	9	21 22	24 23
	10	17 18 21 23	20 19 22 24
	11	21 22	24 23
	12	17 18 20 22	24 19 21 23
	13	10 11 13 15 16 17 20 22	24 12 14 19 25 18 21 23
	14	15 16 18 20 22	25 17 19 21 23
	15	4 5 9 10 13 15 16 17 20 22	8 12 11 24 14 19 25 18 21 23
	16	15 16 18 20 22	25 17 19 21 23
	17	9 10 13 15 16 17 21 23	20 11 14 19 25 18 22 24
	18	21 22	24 23
	19	15 16 18 21 23	25 17 19 22 24
	20	21 22	24 23

A 21	1 6 26 2 4 5 9 10 13 15 16 17 20 23	28 7 27 3 8 12 22 11 14 19 25 18 21 24
22	15 16 18 20 23	25 17 19 21 24
23	5 9 12 10 15 16 17 20 22	14 11 13 24 19 25 18 21 23
24	15 16 18 20 22	25 17 19 21 23
25	9 10 12 15 16 17 21 23	20 11 13 19 25 18 22 24
26	21 22	24 23
27	15 16 18 21 23	25 17 19 22 24
28	21 22	24 23
29	9 10 12 15 16 17 20 23	22 11 13 19 25 18 21 24
30	15 16 18 20 23	25 17 19 21 24
31	4 8 5 10 13 16 18 20 22 24	15 9 12 11 14 17 19 21 23 25
32	16 17 19 21 23	25 18 20 22 24
33	21 22	24 23
34	17 18 21 23	20 19 22 24
35	21 22	24 23
36	17 18 20 22	24 19 21 23
37	5 10 12 16 18 20 22 24	14 11 13 17 19 21 23 25
38	16 17 19 21 23	25 18 20 22 24
39	21 22	24 23
40	17 18 21 23	20 19 22 24
41	21 22	24 23
42	17 18 20 22	24 19 21 23
B 1	15 2 4 8 10 12 13 17 19 21 22 24	16 3 5 9 11 26 14 18 20 27 23 25
2	17 18 21 22 24	20 19 27 23 25

B 3	1	6	15	2	4	8	10	11	13	17	19	21	22	25
	28	7	16	3	5	9	24	12	14	18	20	27	23	26
4										17	18	21	22	25
										20	19	27	23	26
5					4	5	9	10	13	17	19	21	22	25
					8	12	11	24	14	18	20	27	23	26
6										17	18	21	22	25
										20	19	27	23	26
7							9	10	13	17	18	21	22	25
							20	11	14	24	19	27	23	26
8							9	10	13	17	19	21	23	25
							22	11	14	18	20	27	24	26
9													23	24
													26	25
10										17	18	21	23	25
										20	19	27	24	26
11													23	24
													26	25
12						5	9	10	12	17	19	21	22	25
						14	11	24	13	18	20	27	23	26
13										17	18	21	22	25
										20	19	27	23	26
14							9	10	12	17	18	21	22	25
							20	11	13	24	19	27	23	26
15							9	10	12	17	19	21	23	25
							22	11	13	18	20	27	24	26
16													23	24
													26	25
17										17	18	21	23	25
										20	19	27	24	26
18													23	24
													26	25
19					4	5	8	10	13	17	19	21	23	25
					27	12	9	11	14	18	20	22	24	26
20													23	24
													26	25
21												21	22	25
												24	23	26
22										17	18	21	23	25
										20	19	22	24	26
23													23	24
													26	25
24												21	22	25
												24	23	26
25										17	18	20	22	25
										24	19	21	23	26
26						5	8	10	12	17	19	21	23	25
						14	9	11	13	18	20	22	24	26

B	27	1 6 15 2 4 5 8 10 12 17 19 21 23 24 28 7 16 3 27 14 9 11 13 18 20 22 26 25
	28	21 22 25 24 23 26
	29	17 18 21 23 25 20 19 22 24 26
	30	23 24 26 25
	31	21 22 25 24 23 26
	32	17 18 20 22 25 24 19 21 23 26
	33	2 3 8 5 10 13 17 19 21 22 24 26 4 9 12 11 14 18 20 27 23 25
	34	17 18 21 22 24 20 19 27 23 25
	35	5 10 12 17 19 21 22 24 14 11 13 18 20 27 23 25
	36	17 18 21 22 24 20 19 27 23 25
	37	3 4 5 10 13 17 19 21 22 24 9 8 12 11 14 18 20 27 23 25
	38	17 18 21 22 24 20 19 27 23 25
	39	5 10 12 17 19 21 22 24 14 11 13 18 20 27 23 25
	40	17 18 21 22 24 20 19 27 23 25
C	1	1 9 26 2 4 6 7 12 14 16 18 20 22 24 28 10 27 3 5 8 11 13 15 17 19 21 23 25
	2	16 17 19 21 23 25 18 20 22 24
	3	21 22 24 23
	4	17 18 21 23 20 19 22 24
	5	21 22 24 23
	6	17 18 20 22 24 19 21 23
	7	12 13 15 17 20 22 24 16 14 19 18 21 23 25
	8	15 17 19 21 23 25 18 20 22 24
	9	21 22 24 23
	10	17 18 21 23 20 19 22 24

C 11	1 9 26 2 4 6 7 12 13 15 17 18 21 22	28 10 27 3 5 8 11 16 14 25 20 19 24 23
12	17 18 20 22	24 19 21 23
13	7 11 14 16 18 20 22 24	13 12 15 17 19 21 23 25
14	16 17 19 21 23	25 18 20 22 24
15	21 22	24 23
16	17 18 21 23	20 19 22 24
17	21 22	24 23
18	17 18 20 22	24 19 21 23
19	7 11 13 15 16 20 22 24	18 12 14 19 17 21 23 25
20	16 17 21 23	25 20 22 24
21	21 22	24 23
22	17 20 22	24 21 23
23	15 16 19 21 23	25 17 20 22 24
24	21 22	24 23
25	7 11 13 15 16 17 20 22	24 12 14 19 25 18 21 23
26	15 16 18 20 22	25 17 19 21 23
27	6 7 11 13 15 16 17 21 23	20 8 12 14 19 25 18 22 24
28	21 22	24 23
29	15 16 18 21 23	25 17 19 22 24
30	21 22	24 23
31	4 5 7 12 13 15 17 20 22 24	8 6 11 16 14 19 18 21 23 25
32	15 17 19 21 23	25 18 20 22 24
33	21 22	24 23
34	17 18 21 23	20 19 22 24

C 35	1	9	26	2	4	5	7	12	13	15	17	18	21	22
	28	10	27	3	8	6	11	16	14	25	20	19	24	23
36											17	18	20	22
											24	19	21	23
37							7	11	14	16	18	20	22	24
							13	12	15	17	19	21	23	25
38										16	17	19	21	23
										25	18	20	22	24
39													21	22
													24	23
40											17	18	21	23
											20	19	22	24
41													21	22
													24	23
42											17	18	20	22
											24	19	21	23
43							7	11	13	15	16	20	22	24
							18	12	14	19	17	21	23	25
44											16	17	21	23
											25	20	22	24
45													21	22
													24	23
46												17	20	22
												24	21	23
47										15	16	19	21	23
										25	17	20	22	24
48													21	22
													24	23
49							7	11	13	15	16	17	20	22
							24	12	14	19	25	18	21	23
50										15	16	18	20	22
										25	17	19	21	23
51						5	6	7	13	15	16	17	21	23
						12	20	11	14	19	25	18	22	24
52													21	22
													24	23
53										15	16	18	21	23
										25	17	19	22	24
54													21	22
													24	23
55						5	6	7	12	15	16	17	21	23
						14	20	11	13	19	25	18	22	24
56													21	22
													24	23
57										15	16	18	21	23
										25	17	19	22	24
58													21	22
													24	23

C 59 1 9 26 2 4 5 6 7 11 15 16 17 21 23
28 10 27 3 8 14 20 13 12 19 25 18 22 24

60 21 22
24 23

61 15 16 18 21 23
25 17 19 22 24

62 21 22
24 23

63 4 5 7 11 13 16 18 20 22 24
15 6 8 12 14 17 19 21 23 25

64 16 17 19 21 23
25 18 20 22 24

65 21 22
24 23

66 17 18 21 23
20 19 22 24

67 21 22
24 23

68 17 18 20 22
24 19 21 23

69 5 6 7 13 16 18 20 22 24
12 8 11 14 17 19 21 23 25

70 16 17 19 21 23
25 18 20 22 24

71 21 22
24 23

72 17 18 21 23
20 19 22 24

73 21 22
24 23

74 17 18 20 22
24 19 21 23

75 5 6 7 12 16 18 20 22 24
14 8 11 13 17 19 21 23 25

76 16 17 19 21 23
25 18 20 22 24

77 21 22
24 23

78 17 18 21 23
20 19 22 24

79 21 22
24 23

80 17 18 20 22
24 19 21 23

81 7 11 16 18 20 22 24
13 12 17 19 21 23 25

82 16 17 19 21 23
25 18 20 22 24

C	83	1 9 26 2 4 5 6 7 11 16 17 19 21 22	28 10 27 3 15 14 8 13 12 25 18 20 24 23
	84	17 18 21 23	20 19 22 24
	85	21 22	24 23
	86	17 18 20 22	24 19 21 23
D	1	1 9 15 2 4 6 7 12 13 17 19 21 22 24	28 10 16 3 5 8 11 26 14 18 20 27 23 25
	2	17 18 21 22 24	20 19 27 23 25
	3	7 11 13 17 19 21 22 25	18 12 14 24 20 27 23 26
	4	7 11 13 17 19 21 22 25	24 12 14 18 20 27 23 26
	5	17 18 21 22 25	20 19 27 23 26
	6	6 7 11 13 17 18 21 22 25	20 8 12 14 24 19 27 23 26
	7	4 5 7 12 13 17 19 21 22 24	8 6 11 26 14 18 20 27 23 25
	8	17 18 21 22 24	20 19 27 23 25
	9	7 11 13 17 19 21 22 25	18 12 14 24 20 27 23 26
	10	7 11 13 17 19 21 22 25	24 12 14 18 20 27 23 26
	11	17 18 21 22 25	20 19 27 23 26
	12	5 6 7 13 17 18 21 22 25	12 20 11 14 24 19 27 23 26
	13	5 6 7 12 17 18 21 22 25	14 20 11 13 24 19 27 23 26
	14	7 11 17 18 21 22 25	13 12 24 19 27 23 26
	15	4 5 7 11 13 17 19 21 23 25	27 6 8 12 14 18 20 22 24 26
	16	23 24	26 25
	17	21 22 25	24 23 26
	18	17 18 21 23 25	20 19 22 24 26
	19	23 24	26 25
	20	21 22 25	24 23 26

D 21	1 9 15 2 4 5 7 11 13 17 18 20 22 25
	28 10 16 3 27 6 8 12 14 24 19 21 23 26
22	5 6 7 13 17 19 21 23 25
	12 8 11 14 18 20 22 24 26
23	23 24
	26 25
24	21 22 25
	24 23 26
25	17 18 21 23 25
	20 19 22 24 26
26	23 24
	26 25
27	21 22 25
	24 23 26
28	17 18 20 22 25
	24 19 21 23 26
29	5 6 7 12 17 19 21 23 25
	14 8 11 13 18 20 22 24 26
30	23 24
	26 25
31	21 22 25
	24 23 26
32	17 18 21 23 25
	20 19 22 24 26
33	23 24
	26 25
34	21 22 25
	24 23 26
35	17 18 20 22 25
	24 19 21 23 26
36	7 11 17 19 21 23 25
	13 12 18 20 22 24 26
37	23 24
	26 25
38	21 22 25
	24 23 26
39	17 18 21 23 25
	20 19 22 24 26
40	23 24
	26 25
41	21 22 25
	24 23 26
42	17 18 20 22 25
	24 19 21 23 26
43	2 3 5 7 11 13 17 19 21 22 24
	26 4 6 8 12 14 18 20 27 23 25
44	17 18 21 22 24
	20 19 27 23 25

D 45	1 9 15 2 3 5 6 7 13 17 19 21 22 24
	28 10 16 26 4 12 8 11 14 18 20 27 23 25
46	17 18 21 22 24
	20 19 27 23 25
47	5 6 7 11 17 19 21 22 24
	14 8 13 12 18 20 27 23 25
48	17 18 21 22 24
	20 19 27 23 25
49	7 12 17 19 21 22 24
	11 13 18 20 27 23 25
50	17 18 21 22 24
	20 19 27 23 25

Nous obtenons ainsi un nombre total de demi-trajets égal à

$$42 + 40 + 86 + 50 = 218.$$

Il y a donc lieu maintenant de déterminer les demi-trajets complémentaires de chacun de ces demi-trajets fondamentaux. Un demi-trajet complémentaire est un demi-trajet relatif à un réseau déduit du réseau primitif en y supprimant toutes les arêtes qui entrent dans le demi-trajet dont on cherche le complément.

Une simplification ultérieure résulte encore dans le cas présent du fait que l'on sait que :
dans le cas d'un demi-trajet A le demi-trajet complémentaire contient

9 11
10 16 ;

dans le cas d'un demi-trajet B, le demi-trajet complémentaire contient

9 26
10 27 ;

dans le cas d'un demi-trajet C, le demi-trajet complémentaire contient

6 15
7 16 ;

et dans le cas d'un demi-trajet D, le trajet complémentaire contient

6 26
7 27.

Il n'y a plus, dès lors, grande difficulté à former les demi-trajets complémentaires de chacun des 218 demi-trajets fondamentaux. On n'a, dans chaque cas, à développer que le tableau réduit des liaisons relatif à un réseau des plus simples; le nombre des demi-trajets complémentaires obtenus de la sorte a été de 1020.

L'énumération de ces demi-trajets complémentaires occuperait une cinquantaine de pages; nous nous contenterons de donner le commencement de ce tableau.

Le demi-trajet A_1

1 6 26 2 4 8 10 12 14 16 18 20 22 24
28 7 27 3 5 9 11 13 15 17 19 21 23 25

admet comme compléments

9 15 3 22 27 19 25 1 23 17 5 7 11 13
10 16 4 21 28 20 26 2 24 18 6 8 12 14

5 6 7 13
12 8 11 14

5 6 7 11
14 8 13 12

et alors, en combinant le premier demi-complément avec le demi-trajet fondamental, on obtient la suite des sommets successifs qui figurent dans la double ligne suivante :

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28;

nous retrouvons ainsi le trajet initial d'où nous sommes partis; nous désignerons par α un trajet formé, comme le précédent, d'un seul trait, et nous attribuerons aux différents α que nous rencontrerons successivement des indices différents.

Le second demi-complément conduit à la double ligne

1 3 5 13 15 17 19 21 23 25 27 · 6 9 11
2 4 12 14 16 18 20 22 24 26 28 · 8 10 7

et le troisième demi-complément à la double ligne

1 3 5 15 17 19 21 23 25 27 · 6 9 11 13
2 4 14 16 18 20 22 24 26 28 · 8 10 12 7,

qui correspondent chacun à deux traits fermés; nous désigne-

rons par β un ensemble de deux trajets formés comme les deux précédents de deux traits chacun et nous attribuerons aux différents β que nous rencontrerons successivement des indices différents.

En passant en revue les 218 demi-trajets fondamentaux pris avec les 1020 demi-trajets complémentaires, on trouve des trajets α, β, γ, δ et ε, formés de un, deux, trois, quatre et cinq traits, et on a déterminé tous les traits ou ensembles de traits passant par tous les sommets du réseau et constitués avec les arêtes du réseau.

Chacun des symboles α ne se présente qu'une fois; les symboles β se présentent deux fois, et de l'un des symboles correspondant à l'existence de deux trajets passant par tous les sommets se déduit immédiatement la forme du second symbole relatif à la même figure. Il suffit, comme nous le savons, de changer la portion du symbole situé au delà du couple de points qui figurent dans le symbole en écrivant les symboles constitutifs dans l'ordre inverse.

Dans le premier symbole β trouvé précédemment

$$\overset{6}{\cdot}\,{}_{8}\,{}^{9}\,{}_{10}\,{}^{11}\,{}_{7} \quad \text{devient alors} \quad \overset{6}{\cdot}\,{}_{7}\,{}^{11}\,{}_{10}\,{}^{9}\,{}_{8}$$

et dans le second

$$\overset{6}{\cdot}\,{}_{8}\,{}^{9}\,{}_{10}\,{}^{11}\,{}_{12}\,{}^{13}\,{}_{7} \quad \text{devient} \quad \overset{6}{\cdot}\,{}_{7}\,{}^{13}\,{}_{12}\,{}^{11}\,{}_{10}\,{}^{9}\,{}_{8}.$$

Cette remarque nous montre que l'existence du demi-trajet A_1 et de deux de ses demi-trajets complémentaires entraîne l'existence d'autres demi-trajets fondamentaux qui sont ici, d'une part,

$${}^{1}\,{}_{28}\,{}^{6}\,{}_{8}\,{}^{7}\,{}_{11}\,{}^{9}\,{}_{10}\,{}^{26}\,{}_{27}\,{}^{2}\,{}_{3}\,{}^{4}\,{}_{5}\,{}^{12}\,{}_{13}\,{}^{14}\,{}_{15}\,{}^{16}\,{}_{17}\,{}^{18}\,{}_{19}\,{}^{20}\,{}_{21}\,{}^{22}\,{}_{23}\,{}^{24}\,{}_{25},$$

et d'autre part,

$${}^{1}\,{}_{28}\,{}^{6}\,{}_{8}\,{}^{7}\,{}_{13}\,{}^{9}\,{}_{10}\,{}^{11}\,{}_{12}\,{}^{26}\,{}_{27}\,{}^{2}\,{}_{3}\,{}^{4}\,{}_{5}\,{}^{14}\,{}_{15}\,{}^{16}\,{}_{17}\,{}^{18}\,{}_{19}\,{}^{20}\,{}_{21}\,{}^{22}\,{}_{23}\,{}^{24}\,{}_{25},$$

c'est-à-dire respectivement C_1 et C_{13}.

Chacun des trajets β, γ, δ, ε conduit de la même façon à la vérification des calculs des demi-trajets fondamentaux écrits précédemment. Un trajet β donne une vérification, un trajet γ en fournit $3 = 4 - 1$; de même, un trajet δ et un trajet ε fournissent respectivement $7 = 8 - 1$ et $15 = 16 - 1$ vérifications. En établissant le tableau des trajets à 1, 2, 3, 4 et 5 traits, nous avons donc eu à faire toute une série de vérifications. Chacune d'elles a été faite, et nous sommes portés à croire que le tableau des trajets ainsi obtenu ne contient pas d'erreurs. S'il y a des omissions, l'ensemble des omissions faites constitue un groupe à part. Nous ne croyons pas qu'un tel groupe existe; il y a peu de chances pour que, dans la construction des demi-trajets fondamentaux, il y ait eu quelque erreur, leur construction ayant été répétée plusieurs fois et le tableau des demi-trajets s'étant prêté à toutes les vérifications qui se sont offertes.

Nous avons inscrit dans le tableau suivant les différents trajets ainsi obtenus, en employant une notation semblable à celle déjà mise en usage pour les demi-trajets fondamentaux. Les espaces vides doivent ici encore être supposés remplis par l'ensemble des symboles d'arêtes qui se trouvent dans la ligne ou dans les lignes placées au-dessus. Dans le tableau des demi-trajets fondamentaux l'ordre des arêtes successivement introduites dans un demi-trajet était sans importance; il n'en est plus de même ici où un seul symbole contient des arêtes successives, les arêtes d'un même ordre de parité étant lues dans un sens déterminé de haut à gauche à droite en bas par exemple et l'autre suite d'arêtes étant lue dans le sens inverse. On voit maintenant pourquoi nous n'avons pas représenté une arête par deux chiffres consécutifs. Les symboles sont plus nets et plus facilement lisibles.

TABLEAU DES TRAJETS COMPLETS

formés de un, deux, trois, quatre ou cinq traits.

---

a 1	1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27	2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28
2	25 27 22 24 18 20	26 21 23 17 19 28
3	25 17 19 21 23 27	24 18 20 22 26 28
4	5 13 6 9 11 16 19 17 21 23 25 27	14 7 8 10 12 15 18 20 22 24 26 28
5	25 27 22 24 18 20	26 21 23 17 19 28
6	25 17 19 21 23 27	24 18 20 22 26 28
7	13 11 6 9 24 22 20 18 15 25 27	12 7 8 10 23 21 17 19 16 26 28
8	24 16 19 17 21 23 27	25 15 18 20 22 26 28
9	24 22 20 18 16 25 27	23 21 19 17 15 26 28
10	24 15 17 19 21 23 27	25 16 18 20 22 26 28
11	8 7 14 12 9 24 22 20 18 15 25 27	6 13 5 11 10 23 21 17 19 16 26 28
12	24 16 19 17 21 23 27	25 15 18 20 22 26 28
13	24 22 20 18 16 25 27	23 21 19 17 15 26 28
14	24 15 17 19 21 23 27	25 16 18 20 22 26 28
15	10 20 18 15 25 23 21 26	9 17 19 16 24 22 27 28
16	20 22 24 18 15 25 27	21 23 17 19 16 26 28
17	20 18 15 25 21 23 27	17 19 16 24 22 26 28
18	20 18 16 25 23 21 26	19 17 15 24 22 27 28
19	21 23 27	22 26 28
20	22 20 18 15 25 23 27	21 17 19 16 24 26 28

a 21	1 3 8 7 14 12 10 22 24 20 18 15 25 27	2 4 6 13 5 11 9 23 21 17 19 16 26 28
22	24 16 19 17 21 26	25 15 18 20 27 28
23	24 18 15 25 27 20	17 19 16 26 21 28
24	22 20 18 16 25 23 27	21 19 17 15 24 26 28
25	22 24 20 18 16 25 27	23 21 19 17 15 26 28
26	24 15 17 19 21 26	25 16 18 20 27 28
27	8 6 14 12 9 24 22 20 18 15 25 27	7 5 13 11 10 23 21 17 19 16 26 28
28	24 16 19 17 21 23 27	25 15 18 20 22 26 28
29	24 22 20 18 16 25 27	23 21 19 17 15 26 28
30	24 15 17 19 21 23 27	25 16 18 20 22 26 28
31	10 20 18 15 25 23 21 26	9 17 19 16 24 22 27 28
32	20 22 24 18 15 25 27	21 23 17 19 16 26 28
33	20 18 15 25 21 23 27	17 19 16 24 22 26 28
34	20 18 16 25 23 21 26	19 17 15 24 22 27 28
35	21 23 27	22 26 28
36	22 20 18 15 25 23 27	21 17 19 16 24 26 28
37	22 24 20 18 15 25 27	23 21 17 19 16 26 28
38	24 16 19 17 21 26	25 15 18 20 27 28
39	24 18 15 25 27 20	17 19 16 26 21 28
40	22 20 18 16 25 23 27	21 19 17 15 24 26 28
41	22 24 20 18 16 25 27	23 21 19 17 15 26 28
42	24 15 17 19 21 26	25 16 18 20 27 28
43	5 13 6 9 11 26 21 23 25 16 18 20	14 7 8 10 12 27 22 24 15 17 19 28
44	25 15 18 20	16 19 17 28

α	45	1 3 5 13 11 6 9 24 22 27 25 16 18 20
		2 4 14 12 7 8 10 23 21 26 15 17 19 28
	46	25 15 18 20
		16 19 17 28
	47	8 7 14 12 9 24 22 27 25 16 18 20
		6 13 5 11 10 23 21 26 15 17 19 28
	48	25 15 18 20
		16 19 17 28
	49	10 20 18 24 22 27 25 15
		9 19 17 23 21 26 16 28
	50	22 24 27 25 16 18 20
		23 21 26 15 17 19 28
	51	24 26 21 19 17 15
		25 27 20 18 16 28
	52	24 18 20 27 25 15
		17 19 21 26 16 28
	53	26 21 25 16 18 20
		27 24 15 17 19 28
	54	21 19 17 25 15
		20 18 24 16 28
	55	22 27 23 25 16 18 20
		21 26 24 15 17 19 28
	56	22 24 27 25 15 18 20
		23 21 26 16 19 17 28
	57	22 27 23 25 15 18 20
		21 26 24 16 19 17 28
	58	22 26 21 25 15 18 20
		23 27 24 16 19 17 28
	59	8 6 14 12 9 24 22 27 25 16 18 20
		7 5 13 11 10 23 21 26 15 17 19 28
	60	25 15 18 20
		16 19 17 28
	61	10 20 18 24 22 27 25 15
		9 19 17 23 21 26 16 28
	62	22 24 27 25 16 18 20
		23 21 26 15 17 19 28
	63	24 26 21 19 17 15
		25 27 20 18 16 28
	64	24 18 20 27 25 15
		17 19 21 26 16 28
	65	22 27 23 25 16 18 20
		21 26 24 15 17 19 28
	66	22 26 21 25 16 18 20
		23 27 24 15 17 19 28
	67	21 19 17 25 15
		20 18 24 16 28
	68	24 27 25 15 18 20
		21 26 16 19 17 28

α 69	1 3 8 6 14 12 10 22 27 23 25 15 18 20	2 4 7 5 13 11 9 21 26 24 16 19 17 28
70	22 26 21 25 15 18 20	23 27 24 16 19 17 28
71	1 8 7 14 12 10 3 26 21 23 25 16 18 20	4 6 13 5 11 9 2 27 22 24 15 17 19 28
72	25 15 18 20	16 19 17 28
73	8 6 14 12 10 3 26 21 23 25 16 18 20	7 5 13 11 9 2 27 22 24 15 17 19 28
74	25 15 18 20	16 19 17 28
75	1 13 5 8 7 10 3 26 21 23 25 16 18 20	12 14 4 6 11 9 2 27 22 24 15 17 19 28
76	25 15 18 20	16 19 17 28
77	1 3 10 7 8 5 13 15 17 19 21 23 25 27	2 9 11 6 4 12 14 16 18 20 22 24 26 28
78	25 27 22 24 18 20	26 21 23 17 19 28
79	25 17 19 21 23 27	24 18 20 22 26 28
80	5 13 16 19 17 21 23 25 27	14 12 15 18 20 22 24 26 28
81	25 27 22 24 18 20	26 21 23 17 19 28
82	25 17 19 21 23 27	24 18 20 22 26 28
83	3 5 11 9 6 13 15 17 19 21 23 25 27	4 12 10 8 7 14 16 18 20 22 24 26 28
84	3 10 12 4 6 13 15 17 19 21 23 25 27	9 11 5 8 7 14 16 18 20 22 24 26 28
85	12 7 8 5 15 17 19 21 23 25 27	13 6 4 14 16 18 20 22 24 26 28
86	3 5 11 9 6 13 15 25 27 22 24 18 20	4 12 10 8 7 14 16 26 21 23 17 19 28
87	3 10 12 4 6 13 15 25 27 22 24 18 20	9 11 5 8 7 14 16 26 21 23 17 19 28
88	12 7 8 5 15 25 27 22 24 18 20	13 6 4 14 16 26 21 23 17 19 28
89	3 5 11 9 6 13 15 25 17 19 21 23 27	4 12 10 8 7 14 16 24 18 20 22 26 28
90	3 10 12 4 6 13 15 25 17 19 21 23 27	9 11 5 8 7 14 16 24 18 20 22 26 28
91	12 7 8 5 15 25 17 19 21 23 27	13 6 4 14 16 24 18 20 22 26 28
92	3 5 13 11 9 6 18 16 19 21 23 25 27	4 14 12 10 8 7 17 15 20 22 24 26 28

α 93	1 3 5 13 11 9 6 18 15 17 21 23 25 27
	2 4 14 12 10 8 7 19 16 20 22 24 26 28
94	3 10 12 14 4 6 18 16 19 21 23 25 27
	9 11 13 5 8 7 17 15 20 22 24 26 28
95	18 15 17 21 23 25 27
	19 16 20 22 24 26 28
96	3 5 13 11 9 6 18 20 15 25 23 21 26
	4 14 12 10 8 7 17 19 16 24 22 27 28
97	18 15 25 27 22 24 20
	19 16 26 21 23 17 28
98	3 10 12 14 4 6 18 20 15 25 23 21 26
	9 11 13 5 8 7 17 19 16 24 22 27 28
99	18 15 25 27 22 24 20
	19 16 26 21 23 17 28
100	3 5 13 11 9 6 18 20 15 25 21 23 27
	4 14 12 10 8 7 17 19 16 24 22 26 28
101	3 10 12 14 4 6 18 20 15 25 21 23 27
	9 11 13 5 8 7 17 19 16 24 22 26 28
102	3 5 1 11 9 6 18 24 22 20 15 25 27
	4 14 12 10 8 7 17 23 21 19 16 26 28
103	24 16 19 21 23 27
	25 15 20 22 26 28
104	18 15 25 17 21 23 27
	19 16 24 20 22 26 28
105	3 10 12 14 4 6 18 24 22 20 15 25 27
	9 11 13 5 8 7 17 23 21 19 16 26 28
106	24 16 19 21 23 27
	25 15 20 22 26 28
107	18 15 25 17 21 23 27
	19 16 24 20 22 26 28
108	3 5 13 11 9 6 18 20 22 24 16 25 27
	4 14 12 10 8 7 19 21 23 17 15 26 28
109	3 10 12 14 4 6 18 20 22 24 16 25 27
	9 11 13 5 8 7 19 21 23 17 15 26 28
110	3 5 13 11 9 6 18 20 16 25 21 23 27
	4 14 12 10 8 7 19 17 15 24 22 26 28
111	3 10 12 14 4 6 18 20 16 25 21 23 27
	9 11 13 5 8 7 19 17 15 24 22 26 28
112	3 5 13 11 9 6 24 22 20 18 15 25 27
	4 14 12 10 8 7 23 21 17 19 16 26 28
113	24 16 19 17 21 23 27
	25 15 18 20 22 26 28
114	3 10 12 14 4 6 24 22 20 18 15 25 27
	9 11 13 5 8 7 23 21 17 19 16 26 28
115	24 16 19 17 21 23 27
	25 15 18 20 22 26 28
116	3 5 13 11 9 6 24 22 20 18 16 25 27
	4 14 12 10 8 7 23 21 19 17 15 26 28

α 117	1 3 5 13 11 9 6 24 15 17 19 21 23 27
	2 4 14 12 10 8 7 25 16 18 20 22 26 28
118	3 10 12 14 4 6 24 22 20 18 16 25 27
	9 11 13 5 8 7 23 21 19 17 15 26 28
119	24 15 17 19 21 23 27
	25 16 18 20 22 26 28
120	3 5 13 11 9 7 20 18 15 25 23 21 26
	4 14 12 10 8 6 17 19 16 24 22 27 28
121	20 22 24 18 15 25 27
	21 23 17 19 16 26 28
122	3 10 12 14 4 7 20 18 15 25 23 21 26
	9 11 13 5 8 6 17 19 16 24 22 27 28
123	20 22 24 18 15 25 27
	21 23 17 19 16 26 28
124	3 5 13 11 9 7 20 18 15 25 21 23 27
	4 14 12 10 8 6 17 19 16 24 22 26 28
125	3 10 12 14 4 7 20 18 15 25 21 23 27
	9 11 13 5 8 6 17 19 16 24 22 26 28
126	3 5 13 11 9 7 20 18 16 25 23 21 26
	4 14 12 10 8 6 19 17 15 24 22 27 28
127	3 10 12 14 4 7 20 18 16 25 23 21 26
	9 11 13 5 8 6 19 17 15 24 22 27 28
128	3 5 13 11 9 7 20 18 16 25 21 23 27
	4 14 12 10 8 6 19 17 15 24 22 26 28
129	3 10 12 14 4 7 20 18 16 25 21 23 27
	9 11 13 5 8 6 19 17 15 24 22 26 28
130	3 8 10 7 5 13 16 19 17 21 23 25 27
	4 9 11 6 14 12 15 18 20 22 24 26 28
131	25 17 19 21 23 27
	24 18 20 22 26 28
132	12 6 13 15 17 19 21 23 25 27
	5 7 14 16 18 20 22 24 26 28
133	12 7 5 15 17 19 21 23 25 27
	13 6 14 16 18 20 22 24 26 28
134	12 6 13 15 25 17 19 21 23 27
	5 7 14 16 24 18 20 22 26 28
135	12 7 5 15 25 17 19 21 23 27
	13 6 14 16 24 18 20 22 26 28
136	14 6 18 16 19 21 23 25 27
	5 7 17 15 20 22 24 26 28
137	18 15 17 21 23 25 27
	19 16 20 22 24 26 28
138	18 20 15 25 23 21 26
	17 19 16 24 22 27 28
139	18 15 25 27 22 24 20
	19 16 26 21 23 17 28
140	18 20 15 25 21 23 27
	17 19 16 24 22 26 28

α 141 1 3 8 10 12 14 6 18 24 22 20 15 25 27
2 4 9 11 13 5 7 17 23 21 19 16 26 28

142 24 16 19 21 23 27
25 15 20 22 26 28

143 18 15 25 17 21 23 27
19 16 24 20 22 26 28

144 20 16 25 23 21 26
17 15 24 22 27 28

145 20 22 24 16 25 27
21 23 17 15 26 28

146 20 16 25 21 23 27
17 15 24 22 26 28

147 24 22 20 18 15 25 27
23 21 17 19 16 26 28

148 24 16 19 17 21 23 27
25 15 18 20 22 26 28

149 24 22 20 18 16 25 27
23 21 19 17 15 26 28

150 24 15 17 19 21 23 27
25 16 18 20 22 26 28

151 12 14 7 20 22 24 18 15 25 27
5 13 6 21 23 17 19 16 26 28

152 20 18 15 25 21 23 27
17 19 16 24 22 26 28

153 20 18 16 25 23 21 26
19 17 15 24 22 27 28

154 21 23 27
22 26 28

155 3 10 12 14 6 8 15 17 19 21 23 25 27
9 11 13 5 7 4 16 18 20 22 24 26 28

156 25 27 22 24 18 20
26 21 23 17 19 28

157 25 17 19 21 23 27
24 18 20 22 26 28

158 12 14 7 8 15 17 19 21 23 25 27
5 13 6 4 16 18 20 22 24 26 28

159 25 27 22 24 18 20
26 21 23 17 19 28

160 25 17 19 21 23 27
24 18 20 22 26 28

161 7 8 5 13 26 21 23 25 16 18 20
6 4 14 12 27 22 24 15 17 19 28

162 25 15 18 20
16 19 17 28

163 3 5 13 11 9 6 18 24 22 27 25 15 20
4 14 12 10 8 7 17 23 21 26 16 19 28

164 18 20 24 22 27 25 15
19 17 23 21 26 16 28

	Upper row	Lower row
a 165	1 3 10 12 14 4 6 18 24 22 27 25 15 20	2 9 11 13 5 8 7 17 23 21 26 16 19 28
166	18 20 24 22 27 25 15	19 17 23 21 26 16 28
167	3 5 13 11 9 6 24 22 27 25 16 18 20	4 14 12 10 8 7 23 21 26 15 17 19 28
168	3 10 12 14 4 6 24 22 27 25 16 18 20	9 11 13 5 8 7 23 21 26 15 17 19 28
169	3 5 13 11 9 6 24 22 27 25 15 18 20	4 14 12 10 8 7 23 21 26 16 19 17 28
170	3 10 12 14 4 6 24 22 27 25 15 18 20	9 11 13 5 8 7 23 21 26 16 19 17 28
171	3 5 13 11 9 7 20 18 24 22 27 25 15	4 14 12 10 8 6 19 17 23 21 26 16 28
172	3 10 12 14 4 7 20 18 24 22 27 25 15	9 11 13 5 8 6 19 17 23 21 26 16 28
173	3 8 10 7 5 13 26 21 23 25 16 18 20	4 9 11 6 14 12 27 22 24 15 17 19 28
174	25 15 18 20	16 19 17 28
175	12 14 6 18 20 24 22 27 25 15	13 5 7 19 17 23 21 26 16 28
176	24 22 27 25 16 18 20	23 21 26 15 17 19 28
177	25 15 18 20	16 19 17 28
178	12 14 7 20 18 24 22 27 25 15	5 13 6 19 17 23 21 26 16 28
179	3 10 12 14 6 8 27 25 23 21 19 17 15	9 11 13 5 7 4 26 24 22 20 18 16 28
180	23 21 25 16 18 20	22 24 15 17 19 28
181	21 19 17 25 15	20 18 24 16 28
182	21 25 15 18 20	24 16 19 17 28
183	25 15 18 24 22 20	16 19 17 23 21 28
184	12 14 7 8 27 25 23 21 19 17 15	5 13 6 4 26 24 22 20 18 16 28
185	23 21 25 16 18 20	22 24 15 17 19 28
186	21 19 17 25 15	20 18 24 16 28
187	21 25 15 18 20	24 16 19 17 28
188	25 15 18 24 22 20	16 19 17 23 21 28

α 189 1 9 12 14 6 8 3 26 21 23 25 16 18 20
10 11 13 5 7 4 2 27 22 24 15 17 19 28

190 25 15 18 20
16 19 17 28

191 12 14 7 8 3 26 21 23 25 16 18 20
5 13 6 4 2 27 22 24 15 17 19 28

192 1 11 9 6 13 5 3 26 21 23 25 16 18 20
12 10 8 7 14 4 2 27 22 24 15 17 19 28

193 1 9 12 14 7 8 3 26 21 23 25 15 18 20
10 11 5 13 6 4 2 27 22 24 16 19 17 28

194 1 11 9 6 13 5 3 26 21 23 25 15 18 20
12 10 8 7 14 4 2 27 22 24 16 19 17 28

195 1 9 6 11 13 5 3 26 21 23 25 16 18 20
10 8 7 12 14 4 2 27 22 24 15 17 19 28

196 25 15 18 20
16 19 17 28

β 1 1 3 5 13 15 17 19 21 23 25 27 · 6 9 11
2 4 12 14 16 18 20 22 24 26 28 · 8 10 7

2 5 15 17 19 21 23 25 27 · 6 9 11 13
14 16 18 20 22 24 26 28 · 8 10 12 7

3 5 7 9 11 13 15 25 23 21 26 · 17 19
6 8 10 12 14 16 24 22 27 28 · 20 18

4 25 27 · 17 23 21 19
26 28 · 24 22 20 18

5 5 13 15 25 27 22 24 18 20 · 6 9 11
12 14 16 26 21 23 17 19 28 · 8 10 7

6 5 15 25 27 22 24 18 20 · 6 9 11 13
14 16 26 21 23 17 19 28 · 8 10 12 7

7 5 7 9 11 13 15 25 21 23 27 · 17 19
6 8 10 12 14 16 24 22 26 28 · 20 18

8 5 13 15 25 17 19 21 23 27 · 6 9 11
12 14 16 24 18 20 22 26 28 · 8 10 7

9 5 15 25 17 19 21 23 27 · 6 9 11 13
14 16 24 18 20 22 26 28 · 8 10 12 7

10 13 16 19 17 21 23 25 27 · 6 9 11
12 15 18 20 22 24 26 28 · 8 10 7

11 25 27 22 24 18 20 ·
26 21 23 17 19 28

12 13 6 9 11 16 25 23 21 26 · 17 19
7 8 10 12 15 24 22 27 28 · 20 18

13 25 27 · 17 23 21 19
26 28 · 24 22 20 18

14 25 21 23 27 · 17 19
24 22 26 28 · 20 18

15 13 16 25 17 19 21 23 27 · 6 9 11
12 15 24 18 20 22 26 28 · 8 10 7

16 8 7 9 24 22 20 18 15 25 27 · 5 13
6 11 10 23 21 17 19 16 26 28 · 14 12

β 17	1 3 8 7 9 24 16 19 17 21 23 27 · 5 13 2 4 6 11 10 25 15 18 20 22 26 28 · 14 12
18	24 22 20 18 16 25 27 · 23 21 19 17 15 26 28
19	24 15 17 19 21 23 27 · 25 16 18 20 22 26 28
20	10 20 18 15 25 23 21 26 · 9 17 19 16 24 22 27 28
21	20 22 24 18 15 25 27 · 21 23 17 19 16 26 28
22	7 14 12 10 20 18 15 25 27 · 21 23 13 5 11 9 17 19 16 26 28 · 24 22
23	20 · 15 25 27 22 24 18 28 · 16 26 21 23 17 19
24	7 10 20 18 15 25 21 23 27 · 5 13 11 9 17 19 16 24 22 26 28 · 14 12
25	20 18 16 25 23 21 26 · 19 17 15 24 22 27 28
26	7 14 12 10 20 18 16 25 27 · 21 23 13 5 11 9 19 17 15 26 28 · 24 22
27	7 10 20 18 16 25 21 23 27 · 5 13 11 9 19 17 15 24 22 26 28 · 14 12
28	22 20 18 15 25 23 27 · 21 17 19 16 24 26 28
29	22 24 20 18 15 25 27 · 23 21 17 19 16 26 28
30	24 16 19 17 21 26 · 25 15 18 20 27 28
31	24 18 15 25 27 20 · 17 19 16 26 21 28
32	22 20 18 16 25 23 27 · 21 19 17 15 24 26 28
33	22 24 20 18 16 25 27 · 23 21 19 17 15 26 28
34	24 15 17 19 21 26 · 25 16 18 20 27 28
35	8 6 14 12 10 20 18 15 25 27 · 21 23 7 5 13 11 9 17 19 16 26 28 · 24 22
36	20 · 15 25 27 22 24 18 28 · 16 26 21 23 17 19
37	20 18 16 25 27 · 21 23 19 17 15 26 28 · 24 22
38	15 17 19 21 23 25 27 · 5 13 6 9 11 16 18 20 22 24 26 28 · 14 7 8 10 12
39	25 27 22 24 18 20 · 26 21 23 17 19 28
40	25 17 19 21 23 27 · 24 18 20 22 26 28

β 41	1 3 15 17 19 21 23 25 27 · 5 7 9 11 13	2 4 16 18 20 22 24 26 28 · 6 8 10 12 14
42	25 27 22 24 18 20 ·	26 21 23 17 19 28
43	25 17 19 21 23 27 ·	24 18 20 22 26 28
44	5 13 26 21 23 25 16 18 20 · 6 9 11	14 12 27 22 24 15 17 19 28 · 8 10 7
45	13 6 9 11 26 21 23 25 15 · 17 19	7 8 10 12 27 22 24 16 28 · 20 18
46	13 26 21 23 25 15 18 20 · 6 9 11	12 27 22 24 16 19 17 28 · 8 10 7
47	11 6 9 24 22 27 25 15 · 17 19	7 8 10 23 21 26 16 28 · 20 18
48	8 7 9 24 22 27 25 16 18 20 · 5 13	6 11 10 23 21 26 15 17 19 28 · 14 12
49	7 14 12 9 24 22 27 25 15 · 17 19	13 5 11 10 23 21 26 16 28 · 20 18
50	7 9 24 22 27 25 15 18 20 · 5 13	11 10 23 21 26 16 19 17 28 · 14 12
51	10 20 18 24 22 27 25 15 ·	9 19 17 23 21 26 16 28
52	22 24 27 25 16 18 20 ·	23 21 26 15 17 19 28
53	24 26 21 19 17 15 ·	25 27 20 18 16 28
54	24 18 20 27 25 15 ·	17 19 21 26 16 28
55	7 14 12 10 22 24 27 25 15 · 17 19	13 5 11 9 23 21 26 16 28 · 20 18
56	7 10 22 26 21 25 16 18 20 · 5 13	11 9 23 27 24 15 17 19 28 · 14 12
57	7 14 12 10 22 26 21 25 15 · 17 19	13 5 11 9 23 27 24 16 28 · 20 18
58	7 10 22 26 21 19 17 25 15 · 5 13	11 9 23 27 20 18 24 16 28 · 14 12
59	22 27 23 25 16 18 20 ·	21 26 24 15 17 19 28
60	7 14 12 10 22 27 23 25 15 · 17 19	13 5 11 9 21 26 24 16 28 · 20 18
61	7 10 22 24 27 25 15 18 20 · 5 13	11 9 23 21 26 16 19 17 28 · 14 12
62	22 27 23 25 15 18 20 ·	21 26 24 16 19 17 28
63	22 26 21 25 15 18 20 ·	23 27 24 16 19 17 28
64	8 6 14 12 9 24 22 27 25 15 · 17 19	7 5 13 11 10 23 21 26 16 28 · 20 18

β 65 1 3 8 6 14 12 10 22 24 27 25 15 · 17 19
2 4 7 5 13 11 9 23 21 26 16 28 · 20 18

66 22 27 23
21 26 24

67 22 26 21
23 27 24

68 27 25 23 21 19 17 15 · 5 13 6 9 11
26 24 22 20 18 16 28 · 14 7 8 10 12

69 27 23 21 25 16 18 20 ·
26 22 24 15 17 19 28

70 21 19 17 25 15 ·
20 18 24 16 28

71 21 25 15 18 20 ·
24 16 19 17 28

72 25 15 18 24 22 20 ·
16 19 17 23 21 28

73 25 23 21 19 17 15 · 5 7 9 11 13
24 22 20 18 16 28 · 6 8 10 12 14

74 23 21 25 16 18 20 ·
22 24 15 17 19 28

75 21 19 17 25 15 ·
20 18 24 16 28

76 21 25 15 18 20 ·
24 16 19 17 28

77 25 15 18 24 22 20 ·
16 19 17 23 21 28

78 1 3 26 21 23 25 16 18 20 · 5 13 6 9 11
4 2 27 22 24 15 17 19 28 · 14 7 8 10 12

79 25 15 18
16 19 17

80 25 16 18 20 · 5 7 9 11 13
15 17 19 28 · 6 8 10 12 14

81 25 15 18
16 19 17

82 1 13 5 3 26 21 23 25 16 18 20 · 6 9 11
12 14 4 2 27 22 24 15 17 19 28 · 8 10 7

83 25 15 18
16 19 17

84 1 26 21 23 25 16 18 20 · 3 8 7 14 12 10
2 27 22 24 15 17 19 28 · 4 6 13 5 11 9

85 1 8 7 10 3 26 21 23 25 16 18 20 · 5 13
4 6 11 9 2 27 22 24 15 17 19 28 · 14 12

86 7 14 12 10 3 26 21 23 25 15 · 17 19
13 5 11 9 2 27 22 24 16 28 · 20 18

87 1 26 21 23 25 15 18 20 · 3 8 7 14 12 10
2 27 22 24 16 19 17 28 · 4 6 13 5 11 9

88 1 8 7 10 3 26 21 23 25 15 18 20 · 5 13
4 6 11 9 2 27 22 24 16 19 17 28 · 14 12

β 89 1 26 21 23 25 16 18 20·5 7 4 9 11 13
2 27 22 24 15 17 19 28·6 8 3 10 12 14

90 1 8 6 14 12 10 3 26 21 23 25 15·17 19
4 7 5 13 11 9 2 27 22 24 16 28·20 18

91 1 13 5 8 7
12 14 4 6 11

92 1 26 21 23 25 15 18 20·5 7 4 9 11 13
2 27 22 24 16 19 17 28·6 8 3 10 12 14

93 3 10 7 8 5 13 15 25 23 21 26·17 19
9 11 6 4 12 14 16 24 22 27 28·20 18

94 25 27·17 23 21 19
26 28·24 22 20 18

95 25 21 23 27·17 19
24 22 26 28·20 18

96 5 13 16 25 23 21 26·17 19
14 12 15 24 22 27 28·20 18

97 25 27·17 23 21 19
26 28·24 22 20 18

98 25 21 23 27·17 19
24 22 26 28·20 18

99 3 5 11 9 6 13 15 25 23 21 26·17 19
4 12 10 8 7 14 16 24 22 27 28·20 18

100 25 27·17 23 21 19
26 28·24 22 20 18

101 3 10 12 4 6 13 15 25 23 21 26·17 19
9 11 5 8 7 14 16 24 22 27 28·20 18

102 25 27·17 23 21 19
26 28·24 22 20 18

103 12 7 8 5 15 25 23 21 26·17 19
13 6 4 14 16 24 22 27 28·20 18

104 25 27·17 23 21 19
26 28·24 22 20. 18

105 3 5 11 9 6 13 15 25 21 23 27·17 19
4 12 10 8 7 14 16 24 22 26 28·20 18

106 3 10 12 4 6 13
9 11 5 8 7 14

107 12 7 8 5
13 6 4 14

108 3 5 13 11 9 6 18 20 15 25 27·21 23
4 14 12 10 8 7 17 19 16 26 28·24 22

109 18 15 25 27·17 23 21
19 16 26 28·24 22 20

110 3 10 12 14 4 6 18 20 15 25 27·21 23
9 11 13 5 8 7 17 19 16 26 28·24 22

111 18 15 25 27·17 23 21
19 16 26 28·24 22 20

112 3 5 13 11 9 6 18 20 16 25 27·21 23
4 14 12 10 8 7 19 17 15 26 28·24 22

β 113	1 3 5 13 11 9 6 18 20 · 15 17 23 21 26	2 4 14 12 10 8 7 19 28 · 16 24 22 27 25
114	3 10 12 14 4 6 18 20 16 25 27 · 21 23	9 11 13 5 8 7 19 17 15 26 28 · 24 22
115	20 · 15 17 23 21 26	28 · 16 24 22 27 25
116	3 5 13 11 9 7 20 18 15 25 27 · 21 23	4 14 12 10 8 6 17 19 16 26 28 · 24 22
. 117	20 · 15 25 27 22 24 18	28 · 16 26 21 23 17 19
118	3 10 12 14 4 7 20 18 15 25 27 · 21 23	9 11 13 5 8 6 17 19 16 26 28 · 24 22
119	20 · 15 25 27 22 24 18	28 · 16 26 21 23 17 19
120	3 5 13 11 9 7 20 18 16 25 27 · 21 23	4 14 12 10 8 6 19 17 15 26 28 · 24 22
121	3 10 12 14 4	9 11 13 5 8
122	3 8 10 7 5 13 16 25 23 21 26 · 17 19	4 9 11 6 14 12 15 24 22 27 28 · 20 18
123	25 27 · 17 23 21 19	26 28 · 24 22 20 18
124	25 21 23 27 · 17 19	24 22 26 28 · 20 18
125	12 6 13 15 25 23 21 26 · 17 19	5 7 14 16 24 22 27 28 · 20 18
126	25 27 · 17 23 21 19	26 28 · 24 22 20 18
127	25 21 23 27 · 17 19	24 22 26 28 · 20 18
128	12 7 5 15 25 23 21 26 · 17 19	13 6 14 16 24 22 27 28 · 20 18
129	25 27 · 17 23 21 19	26 28 · 24 22 20 18
130	25 21 23 27 · 17 19	24 22 26 28 · 20 18
131	14 6 18 20 15 25 27 · 21 23	5 7 17 19 16 26 28 · 24 22
132	18 15 25 27 · 17 23 21	19 16 26 28 · 24 22 20
133	20 16 25 27 · 21 23	17 15 26 28 · 24 22
134	20 · 17 23 21 26 15	28 · 24 22 27 25 16
135	7 20 18 15 25 23 21 26 · 5 13	6 17 19 16 24 22 27 28 · 14 12
136	20 22 24 18 15 25 27 ·	21 23 17 19 16 26 28

137	1 3 8 10 7 20 18 15 25 21 23 27 · 5 13
	2 4 9 11 6 17 19 16 24 22 26 28 · 14 12
138	20 18 16 25 23 21 26 ·
	19 17 15 24 22 27 28
139	21 23 27 ·
	22 26 28
140	12 14 7 20 18 15 25 27 · 21 23
	5 13 6 17 19 16 26 28 · 24 22
141	20 · 15 25 27 22 24 18
	28 · 16 26 21 23 17 19
142	20 18 16 25 27 · 21 23
	19 17 15 26 28 · 24 22
143	3 10 12 14 6 8 15 25 23 21 26 · 17 19
	9 11 13 5 7 4 16 24 22 27 28 · 20 18
144	25 27 · 17 23 21 19
	26 28 · 24 22 20 18
145	25 21 23 27 · 17 19
	24 22 26 28 · 20 18
146	7 8 15 17 19 21 23 25 27 · 5 13
	6 4 16 18 20 22 24 26 28 · 14 12
147	25 27 22 24 18 20 ·
	26 21 23 17 19 28
148	25 17 19 21 23 27 ·
	24 18 20 22 26 28
149	12 14 7 8 15 25 23 21 26 · 17 19
	5 13 6 4 16 24 22 27 28 · 20 18
150	25 27 · 17 23 21 19
	26 28 · 24 22 20 18
151	25 21 23 27 · 17 19
	24 22 26 28 · 20 18
152	7 8 5 13 26 21 23 25 15 ·
	6 4 14 12 27 22 24 16 28
153	3 5 13 11 9 6 24 22 27 25 15 ·
	4 14 12 10 8 7 23 21 26 16 28
154	3 10 12 14 4
	9 11 13 5 8
155	3 8 10 7 5 13 26 21 23 25 15 ·
	4 9 11 6 14 12 27 22 24 16 28
156	12 14 6 24 22 27
	13 5 7 23 21 26
157	7 20 18 24 22 27 25 15 · 5 13
	6 19 17 23 21 26 16 28 · 14 12
158	3 10 12 14 6 8 27 25 16 18 20 · 21 23
	9 11 13 5 7 4 26 15 17 19 28 · 24 22
159	25 15 · 17 23 21 19
	16 28 · 24 22 20 18
160	23 21 25 15 · 17 19
	22 24 16 28 · 20 18

β 161	1 3 10 12 14 6 8 27 25 15 18 20 · 21 23 2 9 11 13 5 7 4 26 16 19 17 28 · 24 22
162	7 8 27 25 23 21 19 17 15 · 5 13 6 4 26 24 22 20 18 16 28 · 14 12
163	23 21 25 16 18 20 · 22 24 15 17 19 28
164	21 19 17 25 15 · 20 18 24 16 28
165	21 25 15 18 20 · 24 16 19 17 28
166	25 15 18 24 22 20 · 16 19 17 23 21 28
167	12 14 7 8 27 25 16 18 20 · 21 23 5 13 6 4 26 15 17 19 28 · 24 22
168	25 15 · 17 23 21 19 16 28 · 24 22 20 18
169	23 21 25 15 · 21 23 22 24 16 28 · 24 22
170	25 15 18 20 · 21 23 16 19 17 28 · 24 22
171	1 9 12 14 6 8 3 26 21 23 25 15 · 17 19 10 11 13 5 7 4 2 27 22 24 16 28 · 20 18
172	7 8 3 26 21 23 25 16 18 20 · 5 13 6 4 2 27 22 24 15 17 19 28 · 14 12
173	25 15 18 16 19 17
174	12 14 7 8 3 26 21 23 25 15 · 5 13 6 4 2 27 22 24 16 28
175	9 6 11 13 5 8 7 12 14 4
176	1 11 9 6 12 10 8 7
γ 1	1 3 5 7 9 11 13 15 25 27 · 17 19 · 21 23 2 4 6 8 10 12 14 16 26 28 · 20 18 · 24 22
2	5 13 15 25 23 21 26 · 6 9 11 · 17 19 12 14 16 24 22 27 28 · 8 10 7 · 20 18
3	25 27 · 6 9 11 · 17 23 21 19 26 28 · 8 10 7 · 24 22 20 18
4	5 15 25 23 21 26 · 6 9 11 13 · 17 19 14 16 24 22 27 28 · 8 10 12 7 · 20 18
5	25 27 · 6 9 11 13 · 17 23 21 19 26 28 · 8 10 12 7 · 24 22 20 18
6	5 13 15 25 21 23 27 · 6 9 11 · 17 19 12 14 16 24 22 26 28 · 8 10 7 · 20 18
7	5 15 25 21 23 27 · 6 9 11 13 · 14 16 24 22 26 28 · 8 10 12 7
8	13 16 25 23 21 26 · 6 9 11 · 12 15 24 22 27 28 · 8 10 7

γ 9	1 3 5 13 16 25 27 · 6 9 11 · 17 23 21 19
	2 4 14 12 15 26 28 · 8 10 7 · 24 22 20 18
10	13 6 9 11 16 25 27 · 17 19 · 21 23
	7 8 10 12 15 26 28 · 20 18 · 24 22
11	13 16 25 21 23 27 · 6 9 11 · 17 19
	12 15 24 22 26 28 · 8 10 7 · 20 18
12	8 7 10 20 18 15 25 27 · 5 13 · 21 23
	6 11 9 17 19 16 26 28 · 14 12 · 24 22
13	20 · 5 13 · 15 25 27 22 24 18
	28 · 14 12 · 16 26 21 23 17 19
14	20 18 16 25 27 · 5 13 · 21 23
	19 17 15 26 28 · 14 12 · 24 22
15	15 17 19 21 23 25 27 · 5 13 · 6 9 11
	16 18 20 22 24 26 28 · 14 12 · 8 10 7
16	25 27 22 24 18 20 ·
	26 21 23 17 19 28
17	25 23 21 26 · 5 13 6 9 11 · 17 19
	24 22 27 28 · 14 7 8 10 12 · 20 18
18	25 27 · 5 13 6 9 11 · 17 23 21 19
	26 28 · 14 7 8 10 12 · 24 22 20 18
19	25 21 23 27 · 5 13 6 9 11 · 17 19
	24 22 26 28 · 14 7 8 10 12 · 20 18
20	17 19 21 23 27 · 5 13 · 6 9 11
	18 20 22 26 28 · 14 12 · 8 10 7
21	23 21 26 · 5 7 9 11 13 · 17 19
	22 27 28 · 6 8 10 12 14 · 20 18
22	25 27 · 5 7 9 11 13 · 17 23 21 19
	26 28 · 6 8 10 12 14 · 24 22 20 18
23	25 21 23 27 · 5 7 9 11 13 · 17 19
	24 22 26 28 · 6 8 10 12 14 · 20 18
24	5 13 26 21 23 25 15 · 6 9 11 ·
	14 12 27 22 24 16 28 · 8 10 7
25	8 7 9 24 22 27 25 15 · 5 13 ·
	6 11 10 23 21 26 16 28 · 14 12
26	10 22 24
	9 23 21
27	26 21
	27 24
28	22 27 23
	21 26 24
29	27 25 23 21 19 17 15 · 5 13 · 6 9 11
	26 24 22 20 18 16 28 · 14 12 · 8 10 7
30	25 16 18 20 · 5 13 6 9 11 · 21 23
	15 17 19 28 · 14 7 8 10 12 · 24 22
31	25 15 · 5 13 6 9 11 · 17 23 21 19
	16 28 · 14 7 8 10 12 · 24 22 20 18
32	23 21 25 16 18 20 · 5 13 · 6 9 11
	22 24 15 17 19 28 · 14 12 · 8 10 7

γ 33 1 3 27 23 21 19 17 25 15 · 5 13 · 6 9 11
2 4 26 22 20 18 24 16 28 · 14 12 · 8 10 7

34 21 25 15 · 5 13 6 9 11 · 17 19
24 16 28 · 14 7 8 10 12 · 20 18

35 25 15 18 20 · 5 13 6 9 11 · 21 23
16 19 17 28 · 14 7 8 10 12 · 24 22

36 23 21 25 15 18 20 · 5 13 · 6 9 11
22 24 16 19 17 28 · 14 12 · 8 10 7

37 25 15 18 24 22 20 ·
16 19 17 23 21 28

38 25 16 18 20 · 5 7 9 11 13 · 21 23
15 17 19 28 · 6 8 10 12 14 · 24 22

39 25 15 · 5 7 9 11 13 · 17 23 21 19
16 28 · 6 8 10 12 14 · 24 22 20 18

40 23 21 25 11 · 5 7 9 11 13 · 17 19
22 24 16 28 · 6 8 10 12 14 · 20 18

41 25 15 18 20 · 5 7 9 11 13 · 21 23
16 19 17 28 · 6 8 10 12 14 · 24 22

42 1 3 26 21 23 25 16 18 20 · 5 13 · 6 9 11
4 2 27 22 24 15 17 19 28 · 14 12 · 8 10 7

43 25 15 · 5 13 6 9 11 · 17 19
16 28 · 14 7 8 10 12 · 20 18

44 15 18 20 · 5 13 · 6 9 11
19 17 28 · 14 12 · 8 10 7

45 15 · 5 7 9 11 13 · 17 19
28 · 6 8 10 12 14 · 20 18

46 1 13 5 3 26 21 23 25 15 · 6 9 11 ·
12 14 4 2 27 22 24 16 28 · 8 10 7

47 1 26 21 23 25 16 18 20 · 3 8 7 10 · 5 13
2 27 22 24 15 17 19 28 · 4 6 11 9 · 14 12

48 25 15 · 3 8 7 14 12 10 · 17 19
16 28 · 4 6 13 5 11 9 · 20 18

49 1 8 7 10 3 26 21 23 25 15 · 5 13 ·
4 6 11 9 2 27 22 24 16 28 · 14 12

50 1 26 21 23 25 15 18 20 · 3 8 7 10 · 5 13
2 27 22 24 16 19 17 28 · 4 6 11 9 · 14 12

51 25 15 · 3 8 6 14 12 10 · 17 19
16 28 · 4 7 5 13 11 9 · 20 18

52 3 10 7 8 5 13 · 15 25 27 · 17 19 · 21 23
9 11 6 4 12 14 16 26 28 · 20 18 · 24 22

53 5 13 16
14 12 15

54 3 5 11 9 6 13 15
4 12 10 8 7 14 16

55 3 10 12 4
9 11 5 8

56 12 7 8 5
13 6 4 14

γ	57	1 3 8 10 7 5 13 16 25 27 · 17 19 · 21 23 2 4 9 11 6 14 12 15 26 28 · 20 18 · 24 22
	58	12 6 13 15 5 7 14 16
	59	12 7 5 13 6 14
	60	7 20 18 15 25 27 · 5 13 · 6 17 19 16 26 28 · 14 12
	61	20 · 5 13 · 15 25 27 22 24 18 28 · 14 12 · 16 26 21 23 17 19
	62	20 18 16 25 27 · 5 13 · 21 23 19 17 15 26 28 · 14 12 · 24 22
	63	3 10 12 14 6 8 15 25 27 · 17 19 · 9 11 13 5 7 4 16 26 28 · 20 18
	64	7 8 15 25 23 21 26 · 5 13 · 17 19 6 4 16 24 22 27 28 · 14 12 · 20 18
	65	25 27 · 5 13 · 17 23 21 19 26 28 · 14 12 · 24 22 20 18
	66	25 21 23 27 · 5 13 · 17 19 24 22 26 28 · 14 12 · 20 18
	67	12 14 7 8 15 25 27 · 17 19 · 21 23 5 13 6 4 16 26 28 · 20 18 · 24 22
	68	12 14 6 8 27 25 15 · 13 5 7 4 26 16 28
	69	7 8 27 25 16 18 20 · 5 13 · 6 4 26 15 17 19 28 · 14 12
	70	25 15 · 5 13 · 17 23 21 19 16 28 · 14 12 · 24 22 20 18
	71	23 21 25 15 · 5 13 · 17 19 22 24 16 28 · 14 12 · 20 18
	72	25 15 18 20 · 5 13 · 21 23 16 19 17 28 · 14 12 · 24 22
	73	12 14 7 8 27 25 15 · 17 19 · 5 13 6 4 26 16 28 · 20 18
	74	1 9 7 8 3 26 21 23 25 15 · 10 11 6 4 2 27 22 24 16 28 ·
δ	1	1 3 5 13 15 25 27 · 6 9 11 · 17 19 · 21 23 2 4 12 14 16 26 28 · 8 10 7 · 20 18 · 24 22
	2	5 15 25 27 · 6 9 11 13 · 14 16 26 28 · 8 10 12 7 ·
	3	13 16 25 27 · 6 9 11 · 12 15 26 28 · 8 10 7 ·
	4	15 25 23 21 26 · 5 13 · 6 9 11 · 17 19 16 24 22 27 28 · 14 12 · 8 10 7 · 20 18
	5	1 3 15 25 27 · 5 13 · 6 9 11 · 17 23 21 19 2 4 16 26 28 · 14 12 · 8 10 7 · 24 22 20 18
	6	5 13 6 9 11 · 17 19 · 21 23 · 14 7 8 10 12 · 20 18 · 24 22

δ	7	25 21 23 27 · 5 13 · 6 9 11 · 17 19
		24 22 26 28 · 14 12 · 8 10 7 · 20 18
	8	25 27 · 5 7 9 11 13 · 17 19 · 21 23
		26 28 · 6 8 10 12 14 · 20 18 · 24 22
	9	27 25 16 18 20 · 5 13 · 6 9 11 · 21 23
		26 15 17 19 28 · 14 12 · 8 10 7 · 24 22
	10	25 15 · 5 13 · 6 9 11 · 17 23 21 19
		16 28 · 14 12 · 8 10 7 · 24 22 20 18
	11	5 13 6 9 11 · 17 19 · 21 23
		· 14 7 8 10 12 · 20 18 · 24 22
	12	23 21 25 15 · 5 13 · 6 9 11 · 17 19
		22 24 16 28 · 14 12 · 8 10 7 · 20 18
	13	25 15 18 20 · 5 13 · 6 9 11 · 21 23
		16 19 17 28 · 14 12 · 8 10 7 · 24 22
	14	15 · 5 7 9 11 13 · 17 19 · 21 23
		28 · 6 8 10 12 14 · 20 18 · 24 22
	15	1 3 26 21 23 25 15 · 17 19 · 5 13 · 6 9 11
		4 2 27 22 24 16 28 · 20 18 · 14 12 · 8 10 7
	16	1 26 21 23 25 15 · 17 19 · 3 8 7 10 · 5 13
		. 2 27 22 24 16 28 · 20 18 · 4 6 11 9 · 14 12
	17	3 10 7 8 15 25 27 · 5 13 · 17 19 · 21 23
		9 11 6 4 16 26 28 · 14 12 · 20 18 · 24 22
	18	27 25 15 ·
		26 16 28
ε	1	3 15 25 27 · 6 9 11 ·
		4 16 26 28 · 8 10 7
	2	27 25 15 ·
		26 16 28

Nous avons donc ainsi en tout 466 trajets :

196 d'un seul trait,
176 de deux traits,
74 de trois traits,
18 de quatre traits,
2 de cinq traits.

Si l'on construit dans la moitié supérieure de l'échiquier un trajet formé de m traits et dans la moitié inférieure un trajet de n traits, la liaison entre les deux portions de l'échiquier se faisant par l'intermédiaire des deux seules arêtes qui, dans la figure primitive d'Euler, se trouvaient dans la bande horizontale passant par le centre, on obtient un trajet à $m + n - 1$ traits.

En particulier, les configurations α trouvées précédemment nous fournissent immédiatement en les combinant deux à deux

un nombre de solutions du problème du saut du cavalier aux échecs égal à $\frac{196 \times 197}{2} = 19306$.

Si l'on considère comme différents deux trajets contenant le premier α_k dans la demi-moitié supérieure de l'échiquier, et α_l dans la demi-moitié inférieure, et le second α_l dans la demi-moitié supérieure avec α_l dans la demi-moitié inférieure, le nombre des solutions est égal à $196^2 = 38416$.

Enfin, si l'on prend les configurations déduites des précédentes par symétrie relativement à l'horizontale passant par le centre de l'échiquier, puis relativement à ses diagonales le nombre total de solutions qui résulte du tableau des symboles α est égal à $4 \times 38416 = 153664$.

La solution du problème du cavalier généralisé, où l'on admet plusieurs traits fermés, et non plus un seul trait comme précédemment, sont en nombre naturellement bien considérable. Le tableau que nous avons reproduit en fournit 868624 pour lesquels le nombre des traits passant par tous les sommets, varie de 1 à 9.

Mars 1894.

ACTION DE QUELQUES GAZ

SUR

LE SODAMMONIUM ET LE POTASSAMMONIUM

PAR M. A. JOANNIS,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

Le sodium et le potassium sont, comme on le sait depuis les travaux classiques de Gay-Lussac et Thénard, des métaux qui réagissent avec une grande énergie sur la plupart des corps; les dégagements de chaleur qui accompagnent ces actions, déterminés pour la plupart par Thomsen, mesurent l'énergie mise en jeu dans ces combinaisons. Malgré l'affinité très grande de ces métaux pour les divers corps simples, ils ne se combinent avec eux à la température ordinaire que d'une façon très incomplète, parce que le produit formé constitue une couche protectrice qui préserve le métal alcalin d'une altération plus profonde; quelquefois même le potassium et le sodium ne semblent pas éprouver d'altération superficielle. Lorsqu'on opère, au contraire, à une température où ces corps sont liquides ou même à une température notablement supérieure à celle de leur point de fusion, les réactions deviennent très vives; elles sont parfois accompagnées d'explosions; la chaleur dégagée dans la réaction élève d'ailleurs la température bien au-dessus de la température primitive, et les appareils en verre où l'on fait l'expérience sont attaqués; la silice est réduite, et cette action secondaire vient troubler et quelquefois même masquer l'action principale qu'on voulait étudier. Nous en verrons plus loin quelques exemples.

Le sodium et le potassium, en se combinant avec l'ammoniac, donnent des ammoniums substitués (1) dont les formules

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIX, p. 900.

brutes AzH^3Na et AzH^3K dérivent de celle de l'ammonium AzH^4, composé non encore obtenu. Mais il résulte d'expériences où l'on a mesuré la tension de vapeur de l'ammoniac tenant ces corps en dissolution (1) que la formule de ces composés doit être doublée; elle devient alors $Az^2H^6Na^2$ et $Az^2H^6K^2$; c'est ce que l'on pouvait prévoir d'après l'atomicité impaire de l'azote. Ces ammoniums alcalins sont des composés facilement dissociables, qui ne peuvent par suite subsister à une température donnée qu'en présence de gaz ammoniac, sous une pression supérieure ou au moins égale à la tension de dissociation correspondant à cette température. Les tableaux suivants donnent les tensions de dissociation de ces corps à diverses températures. Ce sont des données indispensables à connaître pour savoir les conditions dans lesquelles on doit se placer lorsqu'on veut employer ces composés.

Tensions de dissociation du sodammonium à diverses températures.

TEMPÉRATURES	TENSIONS observées	TENSIONS calculées	DIFFÉRENCES
— 78	1°3	3°8	+ 2°5
— 40	30,2	31,1	+ 0,9
— 30	»	49,5	»
— 25,13	61,4	61,4	0,0
— 20	»	76,6	»
— 16,4	89,2	89,0	— 0,2
— 10	»	115,4	»
— 2,8	152,9	152,9	0,0
0	170,0	170,0	0,0
+ 1,7	181,5	181,2	— 0,3
3,9	195,8	196,6	+ 0,8
10	»	245,3	»
15,11	293,5	293,6	+ 0,1
20	»	347,3	»
23,53	391,1	391,0	— 0,1
26,21	426,3	427,2	+ 1,1

Les tensions calculées l'ont été d'après la formule suivante,

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXV, p. 820.

où P désigne la tension en centimètres de mercure et T la température absolue :

$$\log P = -\frac{619,9625}{T} + 5,055364 \log T - 7,814313.$$

Tensions de dissociation du potassammonium à diverses températures.

TEMPÉRATURES	TENSIONS observées	TENSIONS calculées	DIFFÉRENCES
— 20°	»	36,07	»
— 19,3	37,0	37,0	0
— 15,5	42,8	42,7	— 0,1
— 10,0	53,18	52,34	— 0,84
— 4	64,9	65,09	+ 0,19
0	75,0	75,0	0
+ 8,44	100,6	100,07	— 0,53
10	»	106,39	»
17,75	141,3	139,19	— 2,11
20	»	150,15	»
21,86	161,4	159,81	— 1,59
28,2	199,3	197,3	— 2,0
30	»	209,32	»
35,15	246,8	246,8	0

Les tensions calculées l'ont été d'après la formule

$$\log P = \frac{243,06}{T} + 11,775 \log T - 27,7003.$$

Il résulte de ces tableaux que l'on ne pourra employer ces corps dans une atmosphère d'ammoniac à la pression atmosphérique qu'à la température de —20° pour le sodammonium et à la température de 0° pour le potassammonium.

Ces composés jouissent d'une propriété précieuse : ils sont solubles dans le gaz ammoniac liquéfié. Les réactions que ces corps pourront éprouver ne seront pas arrêtées par une couche protectrice du composé formé, et les réactions que l'on déterminera s'effectueront à des températures où le verre n'est pas attaqué par ces corps ; on évitera ainsi des actions secondaires. D'autre part, ces composés agiront, dans la plupart des cas, comme les métaux alcalins eux-mêmes. Cela tient, d'une part,

à ce qu'ils se décomposent facilement en ammoniac et métal alcalin, et, d'autre part, à ce que leur chaleur de formation est faible [1]. J'ai trouvé en effet que

$$2AzH^3 \text{ gaz (sous la pression atmosphérique)} + 2Na \text{ solide}$$
$$= Az^2H^6Na^2 \text{ solide, dégage} \ldots 2 \times 5^c,2,$$

et que

$$2AzH^3 \text{ gaz (sous la pression atmosphérique)} + 2K \text{ solide}$$
$$= Az^2H^6K^2 \text{ solide, dégage} \ldots 2 \times 6^c,3.$$

En tenant compte de la chaleur latente de volatilisation de l'ammoniaque liquide ($4^c,4$ pour une molécule d'après Regnault), on a

$$2AzH^3 \text{ liquide} + 2Na \text{ solide} = Az^2H^6Na^2 \text{ solide, dégage..} + 2 \times 0^c,8,$$

et

$$2AzH^3 \text{ liquide} + 2K \text{ solide} = Az^2H^6K^2 \text{ solide, dégage} \ldots + 2 \times 1^c,9.$$

Il résulte de ces nombres que dans les réactions où ces ammoniums composés agiront, le gaz ammoniac devenant libre sans donner lieu à des réactions simultanées, la réaction sera à peu près aussi énergique que celle des métaux alcalins; dans les réactions où l'ammoniaque mise en liberté simultanément pourra donner lieu à une action secondaire, ces ammoniums se comporteront, au contraire, d'une façon plus énergique que les métaux alcalins. Ainsi, une demi-molécule de potassammonium (contenant un atome de potassium), en agissant sur le chlore, dégagera 144^c, tandis qu'un atome de potassium agissant sur le chlore ne dégage que 105^c. A côté de ces deux espèces de réactions, où le sodium et l'ammoniaque agissent chacun comme s'il était seul, nous en verrons d'autres où l'action de ces deux corps est simultanée.

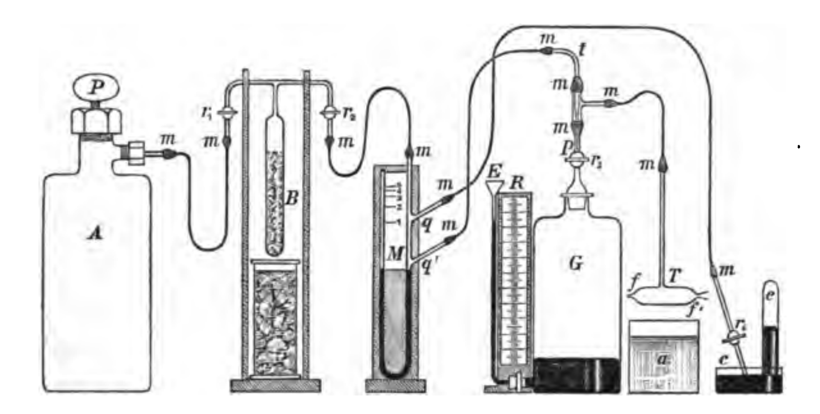
Dans ce Mémoire, nous étudierons l'action de l'oxygène, du protoxyde et du bioxyde d'azote, de l'oxyde de carbone et du

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIX, p. 965.

phosphure d'hydrogène sur le sodammonium et le potassammonium. Nous avons choisi ces gaz à cause de leur importance et parce que leur action sur les métaux alcalins a été étudiée; avec chacun d'eux, nous avons préparé des composés qui n'avaient pas été obtenus avec les métaux alcalins eux-mêmes; la plupart de ces composés sont nouveaux.

Appareil. — L'appareil employé pour ces expériences se composait d'un réservoir A contenant de l'ammoniac liquéfié, d'un condenseur B plein de soude caustique récemment fondue,



d'un manomètre à air comprimé M, communiquant d'une part avec un gazomètre à mercure G et avec un tube à expérience T, et d'autre part avec une cuve à mercure *c*. Ces diverses parties étaient réunies les unes aux autres à l'aide de tubes de plomb mastiqués sur les tubes de verre.

Le réservoir A était formé d'une bouteille en fer telle que celles qui servent à transporter le mercure; à la partie supérieure se trouvait vissée une pièce de fonte comprenant un robinet à vis P et un ajutage latéral servant au dégagement de l'ammoniac lorsqu'on desserrait la vis P. Les joints étaient rendus étanches par des rondelles de plomb que l'on écrasait en serrant les écrous qui maintenaient la vis P et l'ajutage latéral. L'ammoniac liquéfié contenu dans cette bouteille avait

été préparé à l'avance en chauffant dans un appareil clos tout en fer une dissolution aqueuse d'ammoniaque pure. Les vapeurs émises par cette solution, avant d'aller se condenser dans la bouteille A, parcouraient un tube plein de soude caustique qui arrêtait la majeure partie de l'eau et de l'acide carbonique qui se trouvaient mélangés au gaz ammoniac. L'appareil utilisé permettait de condenser en quelques heures un ou deux kilogrammes d'ammoniac à peu près exempt d'acide carbonique et de vapeur d'eau. Le condenseur B représenté dans la figure servait, au moment des expériences, à enlever à l'ammoniac de A les dernières traces d'acide carbonique et d'eau qui y étaient encore contenues. Pour cela, on refroidissait B en soulevant le vase V, qui contenait un mélange de glace et de sel, et l'on ouvrait les robinets P et r_1 [1]; l'ammoniac se vaporisait de A dans B et se condensait dans ce tube; lorsqu'on en avait distillé une quantité suffisante, une vingtaine de centimètres cubes en moyenne, on fermait les robinets P et r, et on laissait séjourner quelques minutes l'ammoniac liquide au contact des morceaux de soude caustique qui lui enlevaient les dernières traces d'eau et d'acide carbonique. On ouvrait ensuite un peu le robinet r_2, de façon à balayer tout l'air contenu dans les appareils par un courant d'ammoniac pur. Certaines précautions avaient été prises, dans la construction de l'appareil, pour éviter tout espace nuisible où de petites quantités d'air auraient pu séjourner : ainsi, le manomètre M présentait deux tubes latéraux q et q', dont l'un affleurait le niveau du mercure au commencement des expériences, quand la pression était égale à la pression atmosphérique. En ouvrant r_4, on chassait l'air contenu dans q et dans le tube de plomb reliant le manomètre à r_4; on fermait ensuite r_4, et l'ammoniac s'échappant par q' se dégageait par le tube t; ce tube était effilé et sa pointe p arrivait tout près du robinet r_3, de sorte que le gaz

---

[1] Le robinet r_1, comme tous les autres robinets en verre de l'appareil, était maintenu par des élastiques qui l'empêchaient de sortir de son boisseau sous l'influence de la pression intérieure.

ammoniac chassait l'air contenu dans cette partie de l'appareil et se rendait ensuite dans le tube T, d'où il s'échappait par les points f et f'.

Le manomètre M était un manomètre à air comprimé, ne servant pas à faire des mesures, mais destiné seulement à donner une idée de la pression dans l'appareil pendant les expériences.

Le gazomètre G était un flacon en verre d'une capacité de un litre environ; le goulot rodé était fermé par un bouchon en verre creux muni d'un robinet r_3. Des élastiques maintenaient cet ajutage contre le goulot pour l'empêcher d'être soulevé par la pression intérieure du gaz contenu dans l'appareil. Le gazomètre était muni à sa partie inférieure d'une tubulure latérale dans laquelle on plaçait un bouchon en caoutchouc laissant passer un tube coudé qui s'élevait verticalement et se terminait par un entonnoir E. Une planchette graduée en millimètres R permettait de mesurer les distances des niveaux du mercure dans le gazomètre et dans le tube E.

Le tube T était le tube à expérience; c'est dans ce tube que se trouvait l'ammonium alcalin, dans ce tube que le gaz du gazomètre G venait réagir.

Méthode. — Pour faire agir un gaz sur le sodammonium ou le potassammonium, on remplissait le gazomètre de mercure, on le transportait sur la cuve à mercure, et, par la tubulure inférieure débarrassée de son bouchon de caoutchouc, on introduisait le gaz que l'on voulait mettre en expérience. Ce gaz avait été préparé à l'avance avec les précautions nécessaires pour l'obtenir aussi sec et aussi pur que possible, et il avait été renfermé dans des flacons bouchés à l'émeri et suiffés, en suivant le procédé imaginé par M. Berthelot pour la conservation des gaz. On fixait alors dans la tubulure inférieure du gazomètre le bouchon de caoutchouc et le tube E, et, à l'aide de mastic Golaz, on réunissait la partie supérieure du robinet r_3 à un tube à trois branches traversé par le tube p. On faisait

alors les autres masticages en réservant encore celui qui devait relier le tube T au tube de plomb qui lui amenait le gaz ammoniac; un petit tube de caoutchouc servait provisoirement, au début de l'expérience, à réunir ces deux tubes. Au moment de faire une expérience, on liquéfiait en B une certaine quantité d'ammoniac, on chassait tout l'air de l'appareil, on fermait *f* à la lampe, on bouchait *f'* avec un bouchon de liège, et, retirant alors le petit tube de caoutchouc reliant le tube de plomb au tube T, on fermait celui-ci à l'aide d'un petit bouchon. Le tube ainsi rempli d'ammoniac était alors porté sur une balance et taré. On le mettait ensuite de nouveau en communication avec le tube de plomb par l'intermédiaire du tube de caoutchouc, on enlevait le bouchon de *f'* et, le gaz ammoniac continuant à balayer l'appareil et à sortir par *f'*, on introduisait le métal alcalin en T. Pour faire cette opération dans les meilleures conditions possibles, le métal alcalin était fondu dans un petit tube au milieu d'une atmosphère d'hydrogène sec et purifié par son passage sur de la tournure de cuivre chauffée. On aspirait alors avec un tube effilé une certaine quantité du métal fondu et, introduisant la pointe dans l'étranglement *f'*, on faisait passer en T une petite quantité de métal alcalin fondu, en soufflant avec précaution dans le tube effilé. Il est facile de réussir cette opération après quelques essais; il est indispensable, surtout avec le potassium, d'opérer aussi près que possible du point de fusion pour éviter que le métal fondu n'attaque le verre ou l'ammoniac en donnant, dans ce dernier cas, de l'hydrogène et l'amidure correspondant AzH^2M. Le métal alcalin introduit, on ferme *f'* avec un bouchon, on retire le petit tube de caoutchouc et on ferme l'extrémité correspondante du tube A avec un bouchon; on reporte alors le tube sur la balance, et l'augmentation de poids donne le poids de métal alcalin introduit dans le tube. Cette quantité déterminée, on remet l'appareil en place comme précédemment, mais en remplaçant cette fois le petit tube de caoutchouc par un masticage; on débouche *f'* quand ce masticage est fait, et l'on ferme à la lampe cette

extrémité f'. On reporte alors sur la balance le fragment de verre que l'on a détaché en fondant f', ainsi que les bouchons qui avaient servi pendant les pesées du tube T, et l'on détermine le poids des parties ainsi enlevées au tube T, qui ne figureront plus dans les pesées suivantes.

Ceci fait, on plonge le tube T dans un mélange réfrigérant de glace et de sel, et, ouvrant le robinet r_2, on envoie dans l'appareil de l'ammoniac sous pression qui vient se combiner en T au métal alcalin en donnant l'ammonium correspondant, ou plutôt une dissolution de cet ammonium dans un excès d'ammoniac liquéfié. Lorsque tout le métal alcalin a disparu, on a dans le tube un liquide mordoré si la solution de l'ammonium alcalin est saturée, ou un liquide bleu indigo foncé si la solution est plus étendue, avec des reflets plus ou moins métalliques, selon la concentration. Lorsque la quantité de liquide contenue en T est jugée suffisante, on ferme r_2; la pression indiquée par le manomètre M dépend de la concentration de la solution et de la température du mélange réfrigérant qui entoure le tube T; elle est en moyenne de deux atmosphères. On refroidit alors, à l'aide de petits cylindres d'acide carbonique solide, un bain d'alcool contenu dans un vase plat *a*, et on y plonge le tube T; on continue de mettre des bougies d'acide carbonique jusqu'à ce que le manomètre M indique que l'on est revenu à la pression atmosphérique. On ouvre alors r_3, et le gaz renfermé dans le gazomètre sous une pression un peu supérieure à la pression atmosphérique sort du flacon G. Pour déterminer la quantité de gaz sortie du gazomètre pendant toute la durée de l'expérience, on a noté au début la pression atmosphérique, la température ambiante et la différence des niveaux du mercure dans le flacon G et le tube E. Pendant le cours de l'expérience, on verse du mercure en E, avec précaution, de façon à ne pas entraîner de bulles d'air dans le gazomètre. Ce mercure est contenu dans un vase taré; on a soin, lorsque l'expérience est terminée, de verser du mercure en E, de façon à ramener la pression du gaz dans

le flacon G à être la même qu'au début; une nouvelle pesée du vase contenant le mercure donne le poids et, par suite, le volume du mercure introduit. On peut ainsi déterminer la quantité de gaz sortie du gazomètre.

Pour que le gaz en expérience ait dans le tube T une pression suffisante, il faut que la tension du gaz ammoniac y soit suffisamment faible; ce résultat était obtenu en refroidissant l'alcool du vase *a* jusque vers — 78°. La tension de l'ammoniac ne dépassait plus guère 1 centimètre à cette température. A cette température, le tube T se trouve donc rempli du gaz primitivement contenu dans le gazomètre, mêlé d'une très petite quantité d'ammoniac; arrivé à ce point de l'expérience, trois cas peuvent alors se produire : le gaz peut être sans action sur l'ammonium alcalin, ou bien il peut réagir avec ou sans dégagement d'un corps gazeux à cette température.

Dans ce dernier cas, lorsque le gaz réagit sans donner naissance à un nouveau gaz, on voit la pression diminuer peu à peu dans le gazomètre, surtout lorsque l'on agite le tube T et que l'on favorise ainsi le contact du gaz et de l'ammonium alcalin. L'action de l'oxygène nous fournira un exemple de ce genre de réaction.

Lorsqu'au contraire l'absorption du gaz du gazomètre est accompagnée du dégagement d'un autre gaz formé dans la réaction, l'appel produit dans le gazomètre G par le refroidissement du tube T cesse bientôt, et la réaction s'arrête; on ferme alors le robinet r_3 et l'on ouvre r_2 pendant quelques instants; on refoule ainsi jusqu'en T, à l'aide du gaz ammoniac comprimé, le gaz sorti du gazomètre, mais resté dans la canalisation; on agite le tube T pour accélérer la réaction du gaz ainsi introduit. Pour chasser ensuite le gaz dégagé dans la réaction, on ferme le robinet r_2 et l'on ouvre lentement le robinet r_4; on recueille alors dans l'éprouvette *e* les gaz contenus dans l'appareil, on sort le tube T du bain d'alcool froid, on le laisse se réchauffer un peu; la tension de l'ammoniac dans ce tube devient bientôt égale à la pression atmosphérique;

à partir de ce moment, il se produit un courant de gaz ammoniac qui balaie tout l'appareil et entraîne dans l'éprouvette *e* tous les gaz contenus dans la canalisation. On ferme alors le robinet r_4, on replonge le tube T dans l'alcool froid ; la pression indiquée par le manomètre baisse aussitôt, et, dès qu'elle atteint la pression atmosphérique, on ouvre de nouveau le robinet r_3, et l'expérience continue comme précédemment. Les gaz recueillis en *e* sont analysés ; on y trouve presque toujours un peu du gaz contenu dans le gazomètre et qui a échappé à l'action de l'ammonium alcalin. Il est facile d'en tenir compte dans le calcul du gaz entré en réaction.

Enfin, quand le gaz est sans action, on opère comme précédemment, mais on retrouve dans l'éprouvette *e* tout le gaz sorti du flacon G.

Lorsqu'il y a réaction, on est averti en général que la réaction est terminée par le changement de couleur de la matière ; en effet, pendant l'expérience, l'ammonium alcalin disparaissant, sa solution dans l'ammoniac devient de plus en plus étendue ; la couleur passe donc, pour cette cause, du mordoré au bleu indigo foncé, puis au bleu clair. Pendant ce temps, la substance formée, si elle n'est pas incolore, modifie aussi la couleur primitive par sa formation de plus en plus abondante. Il en résulte que l'on est averti de la disparition de la dernière trace de l'ammonium alcalin par un changement de teinte aussi brusque que le meilleur virage utilisé dans les analyses volumétriques. Mais la réaction n'est pas toujours terminée quand tout l'ammonium alcalin a disparu. Le gaz peut continuer à agir sur les produits formés pendant la première phase de la réaction, ainsi qu'on le verra un peu plus loin. Si l'on n'était pas prévenu de ce fait et si l'on arrêtait l'action du gaz au moment où le virage se produit, on obtiendrait, comme cela m'est arrivé au début, des produits de compositions variables d'une expérience à l'autre, suivant la durée plus ou moins grande des expériences, suivant l'agitation plus ou moins fréquente du tube T, etc.

On ne devra donc admettre que la réaction est terminée que lorsqu'on aura constaté, dans le cas d'une absorption pure et simple du gaz en expérience, que l'absorption cesse de se produire, même lorsqu'on agite le tube T maintenu froid. Dans le cas d'une réaction accompagnée d'un dégagement de gaz, on fera l'essai suivant : la pression du gaz dans le gazomètre étant ramenée à sa valeur initiale et le vase contenant le mercure ayant été pesé de nouveau pour déterminer le poids du mercure introduit jusque-là dans le gazomètre, on expulsera tous les gaz contenus dans la canalisation en réchauffant le tube T et en ouvrant le robinet r_4. On fermera ensuite ce robinet, on refroidira le tube T, on ouvrira le robinet r_3 quand la pression sera revenue égale à la pression atmosphérique; on introduira ainsi dans le tube T et la canalisation un volume du gaz du gazomètre, que l'on déterminera en ramenant la pression à sa valeur primitive et mesurant la diminution de poids du vase contenant le mercure; on agitera le tube T, puis, ouvrant le robinet r_4 et laissant réchauffer le tube T, on recueillera les gaz qui sortiront dans l'éprouvette *e*. Ce n'est que lorsqu'on aura constaté que l'on retrouve dans cette éprouvette tout le gaz sorti du gazomètre que l'on admettra que la réaction est terminée.

Il y aura lieu, dans le cas où l'on aura constaté que l'action du gaz continue après la décoloration de l'ammonium alcalin, de chercher à isoler le produit intermédiaire formé d'abord et à le soustraire autant que possible à l'action ultérieure du gaz.

Lorsque la réaction est terminée, le produit obtenu est dissous ou en suspension dans l'ammoniac liquéfié; on ouvre alors le robinet r_4 et on laisse s'échapper peu à peu tout le gaz ammoniac. Si le composé formé est susceptible de donner avec l'ammoniac un composé dissociable, on l'obtiendra en laissant dégager l'ammoniac, le tube T étant maintenu à une température inférieure à celle où ce composé possède une tension de dissociation égale à la pression atmosphérique.

Calcul du volume de gaz introduit. — Soient P le poids de mercure introduit dans l'appareil, exprimé en grammes, H la [illegible]ession dans le gazomètre, obtenue en faisant la somme de [illegible] pression atmosphérique et de la colonne de mercure mesurée [illegible] la règle R, exprimées toutes deux en centimètres; θ la [illegible]pérature ambiante, supposée invariable pendant la durée de [illegible]érience; S et s les sections du flacon G et du tube E; soit [illegible] D_0 la densité du mercure à 0° et α son coefficient de dila[illegible]. Après l'expérience, les niveaux du mercure dans G et [illegible]E sont à une même distance h des niveaux primitifs, [illegible]e à la fin de l'expérience la pression a été ramenée à sa [illegible]primitive.

[illegible]présente la variation du volume occupé par les gaz dans [illegible]g[illegible]ètre, et $h(S+s)$ représente le volume du mercure [illegible]ro[illegible]; l'on a par conséquent

$$P [illegible] \frac{h(S+s)D_0}{1+K\theta} \quad \text{ou} \quad hS = \frac{P(1+K\theta)}{\left(1+\frac{s}{S}\right)D_0}.$$

Le g[illegible]troduit, mesuré à 0° et sous la pression 76, a un volum[illegible]onné par la relation suivante, α étant le coefficient de dil[illegible]on des gaz :

$$V = hS \times \frac{H}{76} \times \frac{1}{1+\alpha\theta},$$

d'[illegible]

$$[illegible] = \frac{P(1+K\theta)H}{76 \times D_0 \times \left(1+\frac{s}{S}\right)(1+\alpha\theta)} = \frac{1+K\theta}{76 \times D_0\left(1+\frac{s}{S}\right)} \frac{PH}{1+\alpha\theta}.$$

De ces deux fractions, la première peut être considérée comme constante; ses variations sont très faibles et beaucoup plus petites que l'erreur relative commise dans la mesure de H. Cette fraction était égale à 0,000969 avec l'appareil employé.

Augmentation de poids de la matière. — Pendant l'expérience, le métal alcalin a fixé certaines substances, soit le gaz

que l'on a fait agir sur lui, soit certains éléments de ce gaz, les autres étant mis en liberté. L'augmentation de poids du métal pendant l'expérience est très importante à déterminer; elle fournit une vérification très précise des mesures faites sur les gaz absorbés et dégagés. On la détermine en fermant à la lampe le tube T près du masticage, en enlevant le fragment de tube resté mastiqué après le tube de plomb et en le débarrassant du mastic par des lavages à l'alcool. Le tube ainsi scellé et le fragment de tube sont alors pesés; leur nouveau poids, comparé à celui que les premières pesées décrites plus haut permettaient de calculer, donne le poids de la matière fixée.

Le tube est ensuite ouvert, la matière contenue est dissoute dans l'eau ou dans tel autre réactif approprié, et analysée.

Les détails que nous venons de donner nous permettront, dans ce qui va suivre, d'exposer plus rapidement les résultats obtenus. Pour représenter la composition des corps produits dans ces réactions, nous donnerons leur composition centésimale, calculée comme à l'ordinaire, mais nous exprimerons en outre les résultats des expériences en les évaluant en molécules, ce qui permet mieux de juger du degré d'exactitude des expériences et du degré de pureté des produits obtenus.

Action de l'oxygène sur le sodammonium et le potassammonium.

L'action de l'oxygène sur les ammoniums alcalins était intéressante à étudier et à rapprocher de celle que ce gaz exerce sur les métaux alcalins libres. On sait, depuis les expériences de Gay-Lussac et de Vernon-Harcourt, que les métaux alcalins chauffés dans l'oxygène donnent en même temps que le protoxyde Na^2O ou K^2O des oxydes supérieurs plus ou moins bien définis. Gay-Lussac avait conclu de ses expériences à l'existence de sous-oxydes et des trioxydes Na^2O^3 et K^2O^3; les nombres

qu'il a obtenus ne vérifient d'ailleurs que très imparfaitement ces formules.

I. — Peroxydes de potassium.

Recherches de Gay-Lussac et Thénard sur le potassium (1). — Gay-Lussac pense avoir obtenu un oxyde moins riche en oxygène que la potasse en abandonnant dans un flacon bouché par du liège un morceau de potassium, qui s'oxyde lentement grâce à l'oxygène de l'air qui traverse peu à peu le bouchon. Aucune analyse n'est donnée du produit obtenu, que l'on peut considérer comme un mélange d'hydrate de potasse et de potassium.

Gay-Lussac décrit ensuite des expériences de combustion dans lesquelles il a fait brûler du potassium dans une atmosphère d'oxygène, le métal alcalin se trouvant placé sur des lames d'argent ou de platine ou même sur du verre. L'argent seul n'est pas attaqué dans ces conditions. Pour déterminer la quantité d'oxygène entrant dans la composition de l'oxyde formé, Gay-Lussac remplissait une cloche courbe de mercure, y faisait passer un certain volume d'oxygène, puis une petite capsule de platine ou d'argent dans laquelle on déposait, à l'aide d'une tige de fer, une quantité déterminée de potassium. On chauffait alors celui-ci avec une lampe à alcool; il ne tardait pas à fondre, puis à s'enflammer, en dégageant assez de chaleur pour porter la capsule au rouge; on laissait alors refroidir l'appareil, et l'on mesurait le volume de l'oxygène non absorbé. Pour tenir compte de la quantité d'oxygène fixée simultanément par la capsule de métal, on traitait ensuite par l'eau; l'oxyde repassait à l'état d'hydrate de potasse, d'après Gay-Lussac, en dégageant de l'oxygène. Dans le tableau suivant, qui résume les expériences de Gay-Lussac, le potassium est évalué en volume : la mesure M qui y figure s'obtient en coulant du potassium dans un moule; il correspond, d'après Gay-

(1) Gay-Lussac et Thénard, *Recherches physico-chimiques*, p. 125.

Lussac, à 0gr,0212 de potassium, et il absorbait 39,5 parties d'oxygène pour se transformer en protoxyde K^2O.

Numéros des expériences	Quantités de potassium employé	Quantités d'oxygène absorbé	Quantités d'oxygène dégagé en traitant par l'eau	Quantités d'oxygène absorbé par la capsule	Nature de cette capsule	Formules (1) correspondantes
1re	Une mesure M	parties 128,8	parties 66	13,3	Platine	$K^2O^{2,67}$
2e	id.	102,5	48	15	id.	$K^2O^{2,22}$
3e	id.	120,5	68	13	id.	$K^2O^{2,72}$
4e	id.	104,5	61	4	id.	$K^2O^{2,55}$
5e	id.	130,0	79	11,5	id.	$K^2O^{3,00}$
6e	id.	128,0	81	7,5	id.	$K^2O^{3,06}$
7e	id.	78,0	38,5	0	Argent	$K^2O^{1,98}$
8e	id.	91,0	39,0	12,5	Verre	$K^2O^{1,99}$

On voit qu'à l'exception de la 5e et de la 6e expérience, les résultats trouvés sont peu d'accord avec la formule K^2O^3.

Voici maintenant certaines propriétés du corps obtenu : il est fusible, mais moins facilement que l'hydrate de potasse; il est jaune quand il est pur, et brun lorsqu'il a été obtenu dans le platine; l'eau le décompose avec une vive effervescence en mettant de l'oxygène en liberté.

Expériences de Vernon-Harcourt (2). — Ces expériences ont été entreprises en partie pour vérifier celles de Gay-Lussac et Thénard, qui étaient en désaccord avec d'autres expériences de Davy sur le même sujet; le savant anglais n'avait obtenu que les protoxydes Na^2O et K^2O. Vernon-Harcourt purifiait le métal alcalin qu'il employait en le faisant fondre et en le forçant à passer à travers une toile en le pressant à l'aide d'une sorte de piston. L'appareil se composait d'un ballon en verre dur de 150 centimètres cubes de capacité environ; on le séchait

(1) Ce tableau se trouve dans le mémoire de Gay-Lussac, à l'exception de cette dernière colonne, dans laquelle nous avons mis les formules auxquelles conduisent les nombres de Gay-Lussac; ces formules sont calculées avec K = 39 et O = 16.

(2) Vernon-Harcourt, *On the Peroxydes of Potassium and Sodium : Journal of the Chemical Society*, t. XIV, p. 266.

en le chauffant et en y faisant arriver un courant d'air sec, puis on le laissait refroidir et on le pesait muni de son bouchon et des tubes de dégagement que portait ce dernier; on le remplissait ensuite d'azote sec par déplacement et on le pesait de nouveau; le métal alcalin, conservé dans de l'huile de naphte très volatile, était placé dans un tube traversé par un courant d'azote; on le chauffait pour volatiliser l'huile de naphte, puis on le faisait glisser dans le ballon; il était resté pendant ces diverses opérations en contact avec l'azote (1). On pesait de nouveau le ballon; l'augmentation de poids donnait le poids de potassium en expérience. L'appareil était alors plongé dans un bain de sable, de façon à faire fondre le potassium, et on faisait arriver très lentement dans le ballon un courant d'air; la réaction commençait au-dessous de 100°. Si le courant d'air arrive trop vite, l'oxydation devient trop vive; il se fait des fumées d'oxyde qui sont entraînées en dehors de l'appareil. Lorsque l'opération est, au contraire, bien conduite, l'oxydation se fait lentement; à partir d'un certain moment, la matière grimpe le long des parois et la surface d'action se trouve considérablement augmentée; l'opération durait plusieurs heures; vers la fin, on remplaçait peu à peu le courant d'air par un courant d'oxygène sec. En opérant ainsi d'une façon ménagée et à une température inférieure à 300°, Vernon-Harcourt évitait l'attaque du verre et la masse restait poreuse; le produit obtenu lorsque l'absorption avait cessé était jaune; on obtenait, en outre, un produit intermédiaire de couleur blanche dont la composition répondait à peu près à la formule K^2O^2. La composition de l'oxyde jaune a été établie par la pesée du potassium et de l'oxygène fixé, par le dégagement de l'oxygène obtenu avec un poids donné de la matière quand on la met dans l'eau en présence du noir de platine, ou par l'action du permanganate de potasse. Les divers résultats obtenus conduisent à la formule K^2O^4; ce corps contient 55 0/0 de potassium. Les nombres

(1) Vernon-Harcourt a cependant toujours constaté une légère altération superficielle.

de Vernon-Harcourt oscillent entre 54,45 et 56,17. La moyenne de sept expériences donne 55,52, ce qui correspond à 3,90 atomes d'oxygène pour 2 de potassium.

Expériences avec l'oxygène et le potassammonium. — Voici maintenant les résultats que j'ai obtenus en faisant arriver de l'oxygène pur et sec sur le potassammonium maintenu à des températures comprises entre — 50° et — 78°. L'absorption du gaz est assez rapide et aucun gaz ne se dégage. Si l'on opère lentement et en agitant constamment, la solution de potassammonium dans l'ammoniac liquide, qui était d'abord mordorée, devient bleu indigo foncé, puis bleu pâle; bientôt elle est décolorée. Dans l'ammoniac liquide se trouve alors en suspension un précipité gélatineux; on évapore l'ammoniac, et il reste une masse rose pulvérulente qui ne contient que de l'oxygène et du potassium et pas d'ammoniac. Si l'on a eu soin d'introduire lentement l'oxygène et surtout d'éviter qu'une petite quantité de ce gaz reste en présence de la matière sitôt sa décoloration produite, on trouve, d'après l'oxygène absorbé ou d'après l'augmentation de poids éprouvée par le tube, que la matière formée, qui est rose, correspond sensiblement à la formule K^2O^2. On a trouvé en effet :

	Bioxyde K^2O^2	
	Calculé	Trouvé
K....	70,90	68,96
O....	29,10	31,04
	100,00	100,00

Voici le détail d'une expérience :

Potassium mis en expérience...	$0^{gr},3355$, valant $8^{a},60$ (1)
Augmentation de poids du tube après l'expérience	$0^{gr},1510$, valant $9^{a},43$

(1) Ces nombres $8^{a},60$ et $9^{a},43$ sont obtenus en divisant les poids correspondants exprimés en milligrammes par les poids atomiques du potassium et de l'oxygène :

$$\frac{335,5}{39} = 8,60 \text{ et } \frac{151}{16} = 9,43.$$

Ils représentent donc, exprimés en atomes-milligrammes, les poids des corps entrés en réaction.

Vérification: la pointe du tube est ouverte dans de l'acide sulfurique étendu; la matière se dissout et la solution est traitée dans un appareil Schlœsing pour y doser l'ammoniac. On a reçu dans 5 centimètres cubes d'acide sulfurique, contenant 0gr,2532 d'acide monohydraté SO^4H^2, l'ammoniac qui a passé à la distillation; il a fallu, pour neutraliser la liqueur, y verser 29cc,3 d'une solution de baryte dont 70 centimètres cubes équivalaient à 10 centimètres cubes de la solution sulfurique. On déduit de ces nombres, pour la quantité d'ammoniac reçue, le poids 0,0143, qui correspond à un volume de 18cc,77 à 0° et 760; or, le volume du tube était de 18cc,6. Par conséquent, l'ammoniac trouvé était celui qui remplissait le tube; il n'y en avait pas de fixé sur la substance. L'augmentation de poids trouvée doit donc être attribuée uniquement à l'oxygène fixé. Le rapport trouvé $\frac{9,43}{8,60}$ est égal à 2,17 au lieu de 2. Pour 2 atomes de potassium, on trouve donc qu'on a fixé un peu plus de 2 atomes d'oxygène; on n'a donc pas évité complètement la formation d'une petite quantité d'un oxyde supérieur au bioxyde.

Ce composé rose se dissout dans l'eau sans dégagement de gaz, en donnant une liqueur assez stable et douée de propriétés oxydantes. Il m'est arrivé à deux reprises, en faisant arriver une goutte d'eau dans le tube où était renfermé le bioxyde, de voir une explosion se produire; en examinant aussitôt après les débris du tube, on constate la présence d'une matière jaune, qui semble être le tétraoxyde K^2O^4, et d'une matière violacée, qui dégage en présence de l'eau un gaz inflammable et qui semble être du potassium. Dans ces conditions, le bioxyde paraît donc se dédoubler en potassium et en tétraoxyde; c'est une réaction analogue à celle que M. Ditte (1) a signalée pour le protoxyde d'étain, que la chaleur dédouble en étain et bioxyde d'étain.

Si, au contraire, lorsque la solution de potassammonium est

(1) *Annales de chimie et de physique*, 5e série, t. XXVII, p. 170.

décolorée et lorsque ce corps est transformé en un précipité gélatineux, on continue de faire arriver de l'oxygène, on constate que l'action de ce gaz n'était pas épuisée, car il continue d'être absorbé et la matière prend une couleur d'abord plus foncée rappelant le rouge brique; puis, l'oxydation continuant, sa couleur devient plus claire pour devenir à la fin d'un beau jaune de chrome [1]. Au moment où la coloration est le plus foncée, la composition correspond à peu près à la formule K^2O^3. Le composé jaune, produit ultime de l'oxydation, correspond à la formule K^2O^4, ainsi que le montrent les résultats suivants:

Tétraoxyde K^2O^4.

	Calculé	Trouvé
K....	55,00	55,81
O....	45,00	44,19
	100,00	100,00

La composition a été établie d'après l'augmentation de poids éprouvée par une quantité connue de potassium et en vérifiant que la matière ne contenait pas d'ammoniac. On peut encore exprimer ces résultats de la façon suivante : pour 2 atomes de potassium, on a donc trouvé 3,86 au lieu de 4 atomes d'oxygène.

Le tétraoxyde de potassium se dissout dans l'eau avec effervescence par suite de la mise en liberté d'une grande quantité d'oxygène.

Voici le détail d'une expérience :

Potassium mis en expérience..	$0^{gr},2857$, valant	$7^{a},325$ de K
Augmentation de poids du tube après l'expérience.........	$0^{gr},2223$, valant	$13^{a},894$ de O

On a constaté, comme précédemment, que la matière ne contenait pas d'ammoniac; le rapport $\frac{13,894}{7,325}$ est égal à 1,891 au lieu de 2. Pour 2 atomes de potassium, on trouve qu'on a fixé 3,782 au lieu de 4 atomes d'oxygène.

(1) L'absorption de l'oxygène se produit de plus en plus lentement.

Voici le détail d'une autre expérience où l'oxygène fixé, au lieu d'être pesé, a été déterminé par des mesures de volume :

Potassium mis en expérience.. $0^{gr},3530$, valant $9^{a},051$.
Poids de mercure introduit dans le gazomètre, $2575^{gr} = P$.
Température, $14^{\circ} = \theta$.
Pression dans le gazomètre, $76 + 18,4 = 94,4 = H$.
La formule donnée plus haut :

$$V = 0,000969 \frac{PH}{1 + \frac{\theta}{273}}, \qquad \text{donne } V = 224^{cc},0$$

Oxygène recueilli et non absorbé ramené à 0° et 76° $v = 20^{cc},8$
Oxygène ayant réagi $203^{cc},2$

Ces $203^{cc},2$ d'oxygène représentent $18^{a},205$ d'oxygène. Le rapport $\frac{18,205}{9,051}$ donne 2,01 au lieu de 2.

II. — Peroxydes de sodium.

Recherches de Gay-Lussac et Thénard. — Après avoir déterminé les divers degrés d'oxydation du potassium et examiné les principales propriétés des divers oxydes de ce métal, Gay-Lussac et Thénard ont fait des recherches analogues sur le sodium, et ils sont arrivés à ces conclusions, qu'il existe autant d'oxydes de sodium que d'oxydes de potassium, qu'ils ont des formules correspondantes et qu'ils se produisent dans les mêmes conditions. Il y en aurait donc trois : un sous-oxyde, le protoxyde Na^2O et le trioxyde Na^2O^3. Voici les résultats donnés par Gay-Lussac :

NUMÉROS des expériences	SODIUM employé (1)	OXYGÈNE absorbé (2)	OXYGÈNE dégagé par l'action de l'eau	OXYGÈNE absorbé par le vase	NATURE du vase	FORMULES correspondantes (3)
1	Une mesure M	130 parties	42 parties	14	Platine	$Na^2O^{1,57}$
2	id.	110,5	30	6,5	id.	$Na^2O^{1,41}$
3	id.	123,5	37,5	12	id.	$Na^2O^{1,51}$
4	id.	104,0	30	0	Argent	$Na^2O^{1,41}$
5	id.	94,0	20	0	Verre	$Na^2O^{1,27}$

(1) Cette mesure M est capable de dégager, quand on la traite par l'eau, 148 parties d'hydrogène ; elle absorberait donc, pour se transformer en soude

Bien que le rapport de l'oxygène au sodium n'ait pas dépassé $\frac{1,57}{2}$, Gay-Lussac a conclu de ses expériences, à cause des analogies du sodium et du potassium, que le peroxyde de sodium, dont ses expériences montraient l'existence, avait aussi pour formule Na^2O^3; il avait cependant à peine fixé sur le sodium la moitié de l'oxygène que cette formule indique. Il était indispensable de reprendre ces expériences; c'est ce qu'a fait Vernon-Harcourt.

Expériences de Vernon-Harcourt. — Ce savant a opéré comme pour le potassium; il a constaté quelques différences dans la marche de la réaction : l'oxydation se produit vers 200° avec le sodium; elle est beaucoup moins vive qu'avec le potassium; la matière ne grimpe pas sur les parois comme avec ce métal, et l'on peut, par suite, opérer sur un poids plus considérable de matière. Par contre, le verre est presque toujours attaqué, le peroxyde de sodium semblant plus actif que le peroxyde de potassium à la même température; la précision des expériences est donc moindre.

Le peroxyde obtenu par Vernon-Harcourt est blanc à froid et jaune à chaud, comme l'oxyde de zinc. Exposé à l'air, il tombe en déliquescence; il se dissout dans l'eau avec un grand dégagement de chaleur. Il diffère surtout du composé de potassium correspondant par sa formule; c'est un bioxyde Na^2O^2. Vernon-Harcourt a établi sa composition par la synthèse, en déterminant le poids d'oxygène fixé par une quantité connue de sodium (pesée avant l'expérience à l'état de sodium ou après à l'état de sulfate de sodium) et par l'analyse en le décomposant par l'eau en présence du noir de platine ou du permanganate de potassium. La formule Na^2O^2 exige 58,97 0/0 de sodium. Dans huit expériences, Vernon-Harcourt a trouvé des nombres va-

---

anhydre Na^2O, 74 parties d'oxygène. — (2) L'oxygène absorbé est exprimé en une unité arbitraire dont le rapport avec la mesure M se trouve donné dans la note précédente. — (3) Ces formules n'existent pas dans le tableau de Gay-Lussac; elles ont été calculées à l'aide des nombres de son tableau.

riant entre 58,64 et 59,6. La moyenne de toutes ses expériences est 59,17, ce qui correspond à 1,984 au lieu de 2 atomes de sodium.

Avec le sodium comme avec le potassium, le dispositif employé par Vernon-Harcourt permet donc d'obtenir des composés plus riches en oxygène que ceux de Gay-Lussac et Thénard. Mais tandis qu'avec le potassium Vernon-Harcourt était arrivé à un tétraoxyde K^2O^4, avec le sodium il obtient très nettement un bioxyde Na^2O^2.

Expériences avec l'oxygène et le sodammonium. — Quand on fait passer de l'oxygène pur et absolument sec dans du sodammonium dissous dans l'ammoniac liquéfié et refroidi vers — 60°, on constate que l'oxygène est assez rapidement absorbé ; la couleur foncée du sodammonium disparaît peu à peu, et lorsqu'elle a disparu complètement, on constate qu'il s'est formé une matière blanchâtre, gélatineuse, rappelant par son aspect les précipités d'alumine. Cette matière se trouve en suspension dans l'ammoniac liquide qui tenait en dissolution le sodammonium. Si on laisse dégager cet ammoniac en retirant le tube du bain d'alcool refroidi et le laissant se réchauffer à l'air, la matière qui reste dans le tube se présente sous forme d'une poudre d'un blanc rosé. Elle se dissout dans l'eau sans mettre en liberté aucun gaz, mais en dégageant une très grande quantité de chaleur. Cette matière contient du sodium, de l'oxygène et de l'ammoniac. Sa composition correspond à la formule brute Na^2OAzH^3, que l'on peut écrire :

$$Az \left| \begin{array}{l} H \\ H \\ Na \\ Na \end{array} \right. OH$$

Ce corps serait l'hydrate d'oxyde de disodammonium, correspondant au chlorure de disodammonium AzH^2Na^2Cl que j'ai obtenu dans l'action du chlorure de sodium sur le sodammonium (1).

(1) *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. CXII, p. 392.

La composition de ce corps a été obtenue ainsi : le sodium a été tantôt pesé à l'état de sodium au début de l'expérience et tantôt dosé à la fin à l'état de sulfate ; l'oxygène a été dosé par différence, et dans quelques expériences on a mesuré le volume de ce gaz, qui avait été absorbé pendant la réaction ; l'ammoniac a été dosé volumétriquement, après avoir été séparé de la soude par distillation.

Voici les résultats d'une analyse :

	Na^2O,AzH^3 Calculé	Trouvé
Na....	58,23	58,45
AzH^3..	21,52	22,08
O.....	20,25	19,45
	100,00	99,98

Il est indispensable, pour obtenir ce composé aussi pur que possible, de faire agir l'oxygène très lentement et d'arrêter son action dès que toute coloration bleue a disparu. On peut aussi s'arrêter avant que la couleur bleue ait entièrement disparu ; en reprenant ensuite la matière par l'eau, il y aura un dégagement très faible d'hydrogène, dont le volume indiquera la quantité de sodium restant à l'état métallique ; en retranchant le poids de sodium ainsi calculé du poids de sodium mis, on aura le poids du sodium combiné à l'oxygène et à l'ammoniac. Dans une expérience faite de cette façon, on a trouvé que 2 atomes de sodium avaient fixé 1,02 molécule d'ammoniac (au lieu de 1) et 1,92 (au lieu de 2) atomes d'oxygène.

L'expérience faite de cette manière montre, en outre, qu'on n'obtient pas, par ce procédé, de composé moins oxygéné que Na^2OAzH^3, et qu'en particulier on ne trouve pas le sous-oxyde de Gay-Lussac Na^4O.

Si l'on n'opère pas très lentement et si on n'arrête pas l'action aussitôt que le liquide est décoloré, on obtient des résultats qui ne correspondent à aucune formule simple et qui varient d'une expérience à l'autre. Cela tient à ce que, lorsque la décoloration est produite, l'action de l'oxygène n'est pas épuisée ;

la masse gélatineuse obtenue tout d'abord peut encore absorber de l'oxygène, en donnant un second composé qui ne contient plus d'ammoniac, et dont la formule est Na^2O^3. C'est une matière rose pâle que l'eau décompose avec dégagement d'oxygène et formation d'un hydrate de bioxyde décrit par Vernon-Harcourt $Na^2O^2,8H^2O$.

Les résultats complexes et variables d'une expérience à l'autre s'expliquent par l'existence de ce trioxyde; on peut, en effet, représenter les résultats obtenus en admettant que le corps produit est un mélange des deux oxydes.

Ainsi, dans une expérience, $0^{gr},4046$ de sodium, soit $14^a,590$, ont fixé $0^{gr},0856$ d'ammoniac, soit $5^a,033$, et $0^{gr},2398$ d'oxygène, soit $14^a,987$. Si l'on admet que la quantité d'ammoniac trouvée est rigoureusement exacte, la matière contenait $5^{molés},033$ du composé Na^2O,AzH^3 et, en outre, $6^a,930$ de sodium et $9^a,952$ d'oxygène. Or, le rapport de ces nombres $\frac{9,952}{6,930} = 1,437$, nombre très voisin de 1,5. Les produits complexes dont nous avons signalé la production peuvent donc être considérés comme des mélanges des deux oxydes Na^2O,AzH^3 et Na^2O^3, que l'on obtient purs en opérant en présence d'un excès de sodammonium pour le premier, en présence d'un excès d'oxygène pour le second.

Voici les résultats de deux analyses faites sur deux échantillons différents de trioxyde :

	Na^2O^3		
	Calculé	Trouvé I	Trouvé II
Na....	48,94	48,74	49,59
O.....	51,06	51,26	50,41

Nous n'avons pu dépasser ce degré d'oxydation ni obtenir le composé correspondant au tétraoxyde de potassium.

En résumé, par l'action de l'oxygène sur le potassammonium, nous avons obtenu les deux composés K^2O^2 et K^2O^4 décrits par Vernon-Harcourt et montré l'existence d'un composé inter-

médiaire K^2O^3. Par l'action de l'oxygène sur le sodammonium, nous avons obtenu deux oxydes différents de celui que Vernon-Harcourt a signalé : l'un que l'on peut considérer comme un hydrate d'oxyde de disodammonium, et l'autre qui est un trioxyde Na^2O^3. Nous n'avons pas obtenu les deux sous-oxydes Na^4O et K^4O dont Gay-Lussac annonce l'existence.

Action du protoxyde d'azote sur les ammoniums alcalins.

Action du protoxyde d'azote sur le potassammonium. — Lorsque l'on chauffe un fragment de potassium dans du protoxyde d'azote, on le voit s'enflammer à un certain moment; il se produit un mélange de potasse anhydre, de trioxyde de potassium et d'azotite de potassium et un volume d'azote sensiblement égal, quoique un peu inférieur, au volume du protoxyde d'azote employé est mis en liberté. Dans cette action comme dans toutes les réactions du protoxyde d'azote, ce gaz commence à agir à une température où on peut admettre qu'il est dissocié. C'est alors l'oxygène mis en liberté qui agit et qui, par la chaleur que dégage sa combinaison avec la matière combustible, élève la température de la masse à un degré plus haut où la dissociation est plus avancée, et la combustion devient plus vive dans cette atmosphère devenue plus riche en oxygène.

Dans cette action du protoxyde d'azote sur le potassium, on n'a donc pas obtenu de réaction particulière à ce gaz; il s'est comporté comme un mélange d'azote et d'oxygène. Avec le potassammonium, la réaction est toute différente et assez complexe : si l'on fait arriver du protoxyde d'azote dans du potassammonium dissous dans l'ammoniac liquéfié et refroidi vers — 70°, on trouve que le protoxyde disparaît et que de l'azote est mis en liberté. Si l'on emploie alors le procédé décrit au début de cet article et si l'on expulse l'azote mis en liberté pour permettre au protoxyde d'azote de continuer à agir sur le

potassammonium, il arrive un moment où ce corps est entièrement décoloré; un corps solide blanc est alors en suspension dans l'ammoniac liquide. Si l'on arrête la réaction en ce point et si, après avoir chassé l'excès d'ammoniac, on détermine l'augmentation de poids du corps, la quantité de protoxyde d'azote disparue, le volume d'azote mis en liberté et la composition de la matière, on trouve des nombres qui varient un peu d'une expérience à l'autre. Ainsi, on constate : 1° que le volume d'azote dégagé est sensiblement égal au volume de protoxyde d'azote employé (quoique toujours un peu moindre); 2° que, pour une molécule de potassammonium $Az^2H^6K^2$, il disparaît un peu plus d'une molécule de protoxyde d'azote (de 1,14 à 1,17); 3° qu'il y a toujours de l'ammoniac fixé en même temps sur la matière, ou du moins qu'il s'en dégage quand on traite la matière par la soude (on en obtient ainsi de $0^{\text{molée}}$,85 à 0,95 d'ammoniac pour une de potassammonium); 4° la matière obtenue se dissout dans l'eau sans dégagement d'aucun gaz; 5° cette dissolution donne avec l'azotate d'argent un précipité blanc qui, une fois lavé et séché dans le vide, détonne avec la plus grande violence quand on le chauffe rapidement : 0^{milli},5 de ce corps placé au fond d'un tube à essai le perce sans le briser.

Voyons ce que l'on peut conclure de ces diverses observations. Étudions d'abord le sel d'argent, dont la composition pourra nous guider. Pour analyser ce sel, on a dosé l'argent à l'état de chlorure d'argent. Pour cela, le précipité lavé, séché dans le vide et pesé, a été traité par de l'acide azotique à une douce chaleur; il s'est décomposé sans explosion, et l'argent a été précipité par de l'acide chlorhydrique.

Voici le résultat d'une analyse :

Poids de matière employé........	0^{gr},1238
Poids de chlorure d'argent obtenu.	0^{gr},1184

De ces nombres on conclut que la matière contenait 71,98 0/0 d'argent. J'ai fait alors divers essais pour mesurer et analyser les gaz dégagés pendant la détonation dans le vide. L'appareil employé consistait en un long tube de 8 à 10 millimètres de

diamètre intérieur qui s'élevait verticalement et, à une hauteur de 80 centimètres environ, se recourbait horizontalement. La branche verticale plongeait dans du mercure; la branche horizontale recevait la matière à analyser. L'extrémité de ce tube était mastiquée par l'intermédiaire d'un tube de plomb à une trompe à mercure; on faisait le vide dans tout l'appareil, on fermait l'extrémité du tube à la lampe, et l'on chauffait avec une lampe à alcool l'endroit où se trouvait la matière à analyser. Cette matière étant posée directement sur le tube de verre par petits fragments espacés détona et brisa le tube (on avait opéré sur $0^{gr},0088$). Dans un second essai, la matière fut disposée sur de l'amiante (poids $0^{gr},005$); en chauffant, le tube fut brisé. Dans un troisième essai, on disposa sur une lame de platine $0^{gr},0253$ de ce corps, en divisant la matière en huit parcelles. Le tube ayant été chauffé, une explosion assez violente se produisit, le tube vola en éclats, et l'on retrouva la lame de platine présentant aux points où la matière avait été déposée des ampoules provenant de l'emboutissage du platine en ces points; en quelques-uns le platine était même déchiré. Profitant alors d'une remarque que nous avions eu l'occasion de faire en faisant détoner ce corps, l'expérience fut recommencée en employant une lame d'aluminium plus épaisse que celle de platine et en chauffant l'appareil très lentement; on réussit de cette façon à décomposer presque toute la matière sans explosion. Après une demi-heure de chauffe, on rapprocha la lampe à alcool; une faible explosion ne tarda pas à se produire, mais le tube ne fut pas brisé. On transvasa alors les gaz dans un tube gradué, on les mesura et analysa. Voici les résultats de cette expérience :

Poids de matière	$0^{gr},0305$
Volume de gaz dégagé mesuré à 0° et 760	$6^{cc},94$
Analyse du gaz :	
Volume de gaz mis à (14° et 76,5)	$7^{cc},2$
» après l'addition d'une solution de soude	$7^{cc},3$
» » » d'acide pyrogallique	$7^{cc},25$

Une partie de ce gaz, mise en présence de quelques centimètres cubes d'oxygène et de gaz tonant, ne diminua pas de volume après l'explosion. Avec l'autre portion du gaz, on constata qu'il éteignait les corps en combustion. On peut conclure de ces faits que le gaz obtenu était de l'azote sensiblement pur. La faible augmentation de volume constatée après l'addition de la solution de soude tient à ce que le gaz obtenu était sec et qu'au contact de la solution de soude il est devenu humide; la faible diminution de volume après l'addition d'acide pyrogallique semble indiquer une trace d'oxygène provenant de l'air resté dans l'appareil lorsqu'on a fait le vide avec la trompe de Sprengel.

Or, le poids de $6^{cc},94$ d'azote à 0° et 760 est de $0^{gr},0087$, ce qui donne une teneur en azote de 28,52 0/0.

Cette analyse montre que la matière obtenue est l'azoture d'argent Az^3Ag, qui correspond à l'acide azolhydrique. On a, en effet,

	Az^3Ag	
	Calculé	Trouvé
Argent...	72,00	71,98
Azote....	28,00	28,52
	100,00	100,50

L'azoture d'argent précipité ainsi, en traitant par l'azotate d'argent la dissolution aqueuse du composé de potassium obtenu, provient de l'existence de l'azoture de potassium correspondant Az^3K dans les produits de la réaction du protoxyde d'azote sur le potassammonium. Si l'on calcule la quantité d'azoture Az^3K ainsi formée et si on la compare à la quantité de potassammonium mise en jeu, on trouve qu'elle est assez faible. On obtient en moyenne 1 molécule de cet azoture pour 7 à 8 molécules de potassammonium. On peut donc penser que la production de ce corps est due à une réaction secondaire. Les variations que l'on trouve, d'une expérience à l'autre, entre les volumes de protoxyde d'azote disparu et les volumes d'azote dégagé, ainsi que les variations de la quantité d'ammoniac

fixé, viennent confirmer cette opinion. Les volumes de ces gaz (de $1^{mol},14$ à 1,17 de protoxyde pour 1 molécule environ d'azote), la quantité d'ammoniac fixée (de $0^{molée},85$ à 0,95), montrent aussi que la réaction principale doit utiliser, pour 1 molécule de potassammonium, 1 molécule de protoxyde d'azote, mettre en liberté 1 molécule d'azote, et produire un corps pouvant dégager 1 molécule d'ammoniac quand on le traite par la soude. La formule suivante est d'accord avec ces faits :

$$(1) \qquad Az^2O + Az^2H^6K^2 = AzH^2K + KOH + AzH^3 + Az^2.$$

Il se formerait donc de l'amidure de potassium et de l'hydrate de potasse. L'ammoniac et l'azote se dégagent. Lorsqu'on traite ensuite la matière par de l'eau, tout se dissout sans dégagement de gaz ; l'amidure donne, en effet, de l'hydrate de potasse et de l'ammoniaque, et lorsqu'on distille la liqueur, c'est cette molécule d'ammoniaque que l'on dose.

L'augmentation de poids éprouvée par le potassium pendant l'expérience peut aussi servir de vérification à cette formule. Nous voyons que 2×39 grammes de potassium doivent fixer AzH^2 et OH, c'est-à-dire 33 grammes, en donnant 111 grammes de matière. L'augmentation de poids doit donc être de 42,30 0/0 du poids de potassium. Ainsi, dans une expérience faite avec $0^{gr},3625$ de potassium, l'augmentation de poids de la matière a été de $0^{gr},1654$, soit de 45,63 0/0, nombre voisin de 42,30, mais supérieur à ce nombre. J'ai toujours obtenu des nombres un peu plus grands que 42,30.

Les écarts entre les quantités de protoxyde d'azote, d'azote, d'ammoniac qu'exige la formule (1), et les quantités trouvées, ainsi que le poids de matière fixée toujours un peu supérieur à ce qu'indique cette formule, vont nous renseigner sur la réaction secondaire que nous cherchons, et qui donne, comme nous l'avons vu, de l'azoture Az^3K.

De ce fait qu'on trouve toujours que la quantité de protoxyde d'azote employée est plus forte, comparée à la quantité de potassium mise en expérience, que la formule (1) ne l'indique,

et que, d'autre part, la quantité d'ammoniaque est plus faible, nous conclurons que le protoxyde d'azote doit s'attaquer au corps qui donne l'ammoniaque, c'est-à-dire à l'amidure, en donnant l'azoture Az^3K, dont nous avons constaté la présence, et cela sans dégagement d'azote, puisque la quantité d'azote, comparée à la quantité de potassium employée, concorde avec les indications de la formule (1). Ces diverses conditions sont vérifiées par la formule que voici :

(2) $$2AzH^2K + Az^2O = Az^3K + KOH + AzH^3.$$

Si cette réaction secondaire se produit en même temps que la réaction principale indiquée par la formule (1), on constatera, ainsi que l'expérience le montre, que pour 2 atomes de potassium employé il y a :

plus de 1 molécule de protoxyde d'azote employé,
moins de 1 molécule d'ammoniac provenant de l'amidure,
1 molécule d'azote
et une augmentation de poids supérieure à 42,30 0/0.

Tous les faits que nous avons observés sont donc bien d'accord avec ces formules. Il est d'ailleurs facile de les soumettre à d'autres vérifications. En effet, puisque la réaction (2) se produit entre le protoxyde d'azote et l'un des corps formés par la réaction (1) et qu'elle n'est qu'accessoire, en continuant l'action du protoxyde d'azote sur la matière une fois que la couleur du potassammonium a disparu, nous devrons constater une nouvelle absorption de protoxyde d'azote. C'est, en effet, ce que l'expérience vérifie. Si l'on continue de faire agir le protoxyde d'azote sur la matière jusqu'à ce qu'il n'y ait plus absorption, la réaction obtenue pourra être représentée par la formule

(3) $$3Az^2O + 2Az^2H^6K^2 = Az^3K + 3KOH + 3AzH^3 + 2Az^2.$$

L'ammoniac et l'azote s'en vont; il ne reste plus que de l'azoture de potassium et de la potasse caustique. La matière soumise à la distillation ne donne plus d'ammoniaque. Traitée

par l'eau et l'azotate d'argent, elle fournit un abondant précipité d'azoture d'argent. Voici les détails d'une expérience qui vérifie cette formule :

Potassium mis, $0^{gr},4038$, soit $10^{a},354$.

Calcul du volume de Az^2O employé :

Poids de mercure introduit dans le gazomètre, 4043^{gr}.

Pression dans le gazomètre...... $75,9 + 6,7 = 82^{c},6$

Température ambiante........................ $12^{o},5$

D'où volume de protoxyde introduit mesuré à 0° et 76 :

$$V = 0,000969 \frac{4043 \times 82,6}{1 + \frac{12,5}{273}} = 309^{cc},4$$

Gaz recueilli mesuré à 0° et 76........ $240^{cc},6$

Analyse de ce gaz : { Protoxyde d'azote..... 121,0 / Azote............... 119,6 }

Donc :

Protoxyde d'azote disparu, $309,6 - 121,0 = 188^{cc},6$, soit $8^{\text{molés}},45$

Azote dégagé................. $119^{cc},6$, soit $5^{\text{molés}},35$

La formule (3) montre que pour la quantité de potassium employée, $10^{a},354$, on aurait dû trouver :

Pour le protoxyde d'azote [1], 7,76 au lieu de 8,45;

Pour l'azote, 5,18 au lieu de 5,35.

Le rapport du protoxyde à l'azote est 1,57 au lieu de 1,50.

La formule (3) peut être vérifiée aussi par l'augmentation de poids du potassium pendant l'expérience. On a trouvé que $0^{gr},4038$ de potassium avait fixé $0^{gr},2384$ de matière, soit 59,04 du poids de potassium, au lieu de 59,61 qu'indique la formule (3).

Enfin, il existe une expérience qu'il est indispensable de faire pour vérifier ce que nous avons dit; elle consiste à vérifier l'équation (2) elle-même, en préparant à l'avance de l'amidure de potassium pur, exempt d'hydrate de potasse comme celui

[1] On doit faire remarquer que les analyses de mélanges de protoxyde d'azote et d'azote sont délicates à faire, et que l'on ne peut pas compter obtenir la même précision que dans les autres analyses de gaz.

que fournit la réaction (1), et en faisant agir sur ce corps du protoxyde d'azote. C'est l'expérience que nous allons rapporter maintenant.

De l'amidure de potassium a été obtenu en abandonnant à la décomposition spontanée une certaine quantité de potassammonium. Le potassammonium se décompose, en effet, lentement suivant la formule

$$Az^2H^6K^2 = 2AzH^2K + H^2.$$

Une solution ammoniacale de potassammonium a été préparée dans un tube assez large soudé à un tube à robinet et abandonnée à elle-même. De temps à autre on ouvrait un peu le robinet pour laisser partir de l'hydrogène et de l'ammoniac, afin d'éviter que la pression ne devienne trop grande. Au bout de trois jours, la liqueur était décolorée et le potassammonium transformé en amidure. On a mastiqué alors le tube de verre à robinet au tube de plomb de l'appareil à protoxyde d'azote, et on a opéré avec l'amidure dissous dans l'ammoniac liquéfié comme avec le potassammonium. On l'a refroidi vers — 70°, on a fait arriver du protoxyde d'azote qui a été absorbé sans dégagement d'azote; après l'expérience et une fois l'ammoniac chassé, on a déterminé l'augmentation de poids de la matière, on l'a dissoute dans l'eau, acidulée par l'acide azotique, et on l'a précipitée par l'azotate d'argent; le précipité d'azoture a été lavé à l'eau froide, séché dans le vide et pesé. Voici les nombres obtenus :

Amidure de potassium employé.	0gr,2739	valant 4mol,98
Augmentation de poids trouvée.	0gr,0656 au lieu de 0,0672	
Azoture d'argent précipité....	0gr,3760 au lieu de 0,3735,	valant 2mol,506

Ces diverses vérifications montrent donc qu'en agissant sur le potassammonium, le protoxyde d'azote le transforme d'abord en un mélange d'amidure de potassium et d'hydrate de potasse avec dégagement d'azote, et qu'un excès de ce gaz le transforme en hydrate de potasse et azoture de potassium Az^3K.

ACTION DU PROTOXYDE D'AZOTE SUR LE SODAMMONIUM. — L'action du sodium sur le protoxyde d'azote donne de la soude anhydre, du peroxyde de sodium, de l'azotite de sodium et de l'azote; cette réaction se produit vers le rouge sombre, c'est-à-dire à une température où le protoxyde d'azote éprouve un commencement de décomposition; il agit alors comme le ferait un mélange d'azote et d'oxygène.

Avec le sodammonium, le protoxyde d'azote agit tout différemment; comme avec le potassammonium, il donne, à une température où il n'est nullement décomposé, une réaction spéciale. Nous avons répété avec le sodammonium les expériences que nous avions faites avec le potassammonium, et elles ont conduit aux mêmes conclusions; aussi, sans entrer dans la même discussion que précédemment, nous nous contenterons de donner le détail de quelques expériences :

1° Augmentation de poids du métal alcalin :

Poids de sodium employé	$0^{gr},2516$, valant	$10^{a},939$
Augmentation de poids de la matière.	$0^{gr},1853$, soit	73,64 0/0.

La théorie [formule (1)] indique 71,74 0/0.

2° Volume d'azote dégagé :

Sodium employé	$0^{gr},6833$, valant	$29^{a},709$
Volume d'azote dégagé...........	$335^{cc},9$, »	$30^{a},100$

3° Volume de protoxyde d'azote disparu :

Sodium employé	$0^{gr},3550$, valant	$15^{a},435$
Volume de protoxyde d'azote disparu.	$192^{cc},4$, »	$8^{a},620$

4° Dosage d'ammoniac :

Sodium employé	$0^{gr},2516$, valant	$10^{a},939$
Ammoniac de l'amidure...........	$0^{gr},0831$, »	$4^{a},890$

Ces nombres montrent que, comme pour le potassammonium, le volume d'azote dégagé correspond sensiblement à la quantité de sodammonium mise en expérience; la petite différence constatée est de l'ordre des erreurs que comporte l'analyse d'un mélange d'azote et de protoxyde d'azote; le volume de protoxyde d'azote est un peu plus considérable que ne l'indique la formule (1); il est de 8,62 au lieu de 7,72, soit de 1,12 au lieu de 1. Ce fait a été observé pour le potassam-

monium, et nous avons vu comment il convenait de l'expliquer. Le poids de la matière fixée est voisin de celui qu'indique la théorie, mais un peu plus fort, comme pour le potassammonium. La quantité d'ammoniac trouvée est à peu près celle que prévoit la formule (1), mais un peu plus faible, 4,89 au lieu de 5,47, soit 0,894 au lieu de 1,00, comme pour le potassammonium.

On peut donc admettre, comme pour le corps précédent, que la réaction principale est exprimée par la formule

$$Az^2O + Az^2H^6Na^2 = AzH^2Na + NaOH + AzH^3 + Az^2,$$

mais qu'elle est accompagnée de l'action secondaire du protoxyde d'azote sur l'amidure formé

$$2AzH^2Na + Az^2O = Az^3Na + NaOH + AzH^3,$$

de telle sorte que lorsqu'on fait agir sur le sodammonium le protoxyde d'azote jusqu'à refus, c'est la réaction suivante qui se produit :

$$3Az^2O + 2Az^2H^6Na^2 = Az^3Na + 3NaOH + 3AzH^3 + 2Az^2.$$

Il y a seulement lieu de faire ici, pour le sodammonium, une remarque que nous n'avions pas eu à faire avec le potassammonium. Il résulte, en effet, de mes recherches sur l'action de l'oxygène sur le sodammonium que le premier produit de l'oxydation est le composé AzH^3Na^2O, qui possède la même composition que le mélange $AzH^2Na + NaOH$. Or, les diverses déterminations qui m'ont permis d'admettre la formule (1) comme représentant l'action principale du protoxyde d'azote sur le sodammonium, ne permettent pas de décider si l'on a, dans le tube où l'expérience est faite, le composé AzH^3Na^2O ou le mélange $AzH^2Na + NaOH$; mais l'action ultérieure du protoxyde d'azote, qui donne avec la matière de l'azoture Az^3Na, permet de décider la question. En effet, le protoxyde d'azote est sans action sur l'hydrate d'oxyde de disodammonium, tandis qu'il transforme l'amidure en azoture. Il n'y avait pas eu lieu

d'examiner ce point particulier à propos du potassammonium, puisque le premier composé d'oxydation de ce corps ne contient pas d'ammoniac : c'est le bioxyde K^2O^2.

En résumé, l'action du protoxyde d'azote sur les ammoniums alcalins et sur les amidures correspondants se produit à une basse température, à une température où ce gaz n'est pas décomposé ; en outre, il se comporte dans ces réactions autrement qu'un mélange d'oxygène et d'azote. Ce sont là, je crois, les deux seuls exemples que l'on ait de ce mode d'action du protoxyde d'azote.

Cette étude montre aussi que l'on peut obtenir à de très basses températures les azotures alcalins dérivant de l'acide azothydrique par l'action du protoxyde d'azote sur les amidures correspondants.

Action du bioxyde d'azote sur le sodammonium et le potassammonium.

Action du bioxyde d'azote sur le potassammonium. — L'action du bioxyde d'azote sur le potassammonium a été étudiée autrefois, et l'on a constaté que lorsqu'on chauffait le métal alcalin dans une atmosphère de bioxyde d'azote, il s'enflammait en donnant des oxydes et de l'azotite de potassium et mettant de l'azote en liberté, en se comportant, en un mot, comme un mélange d'azote et d'oxygène. MM. Sabatier et Senderens (1) ont repris dernièrement l'étude de l'action des métaux sur le bioxyde d'azote, et montré qu'avec certains métaux provenant de la réduction des oxydes par l'hydrogène, le bioxyde d'azote peut agir entre 150 et 200°, c'est-à-dire à des températures où l'on ne peut admettre qu'il soit dissocié ; ils ont constaté, de plus, que le métal était oxydé, avec mise en liberté de l'azote corres-

(1) *Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. CXIV, p. 1429 et 1476.

pondant, et que l'oxyde formé n'était pas le plus souvent celui que fournit la combustion du métal considéré dans l'oxygène. Dans ces expériences, le bioxyde d'azote agissait donc autrement qu'un mélange d'azote et d'oxygène, mais toujours en donnant un oxyde et en mettant en liberté de l'azote.

Dans les recherches que nous avons entreprises avec les ammoniums alcalins, nous sommes arrivés à des résultats très différents : nous avons fixé sur le métal alcalin le bioxyde d'azote et nous avons obtenu les hypoazotites correspondants.

Lorsqu'on fait passer du bioxyde d'azote dans du potassammonium dissous dans l'ammoniac liquéfié et refroidi vers — 60°, on constate que ce gaz est absorbé sans que de l'azote se dégage, que la couleur de l'ammonium alcalin disparaît peu à peu et qu'il se forme une matière d'un blanc rosé. Cette masse a une apparence gélatineuse tant qu'elle baigne dans l'ammoniac liquide ; lorsque celui-ci est évaporé, elle se présente sous la forme d'une poudre amorphe. La pesée du métal alcalin mis en expérience, le volume du bioxyde d'azote ayant réagi, l'augmentation de poids de la matière, montrent que le bioxyde d'azote se fixe sur le potassium, suivant la formule

$$AzO + K = AzOK,$$

en donnant un hypoazotite alcalin. En effet, si on dissout cette matière dans l'eau et si on traite la solution par l'azotate d'argent, on obtient un précipité jaune d'hypoazotite d'argent.

Voici les détails d'une expérience :

Poids de potassium employé, $0^{gr},2206$, valant $5^{a},656$.
Poids de mercure versé dans le gazomètre, $P = 1755^{gr}$.
Pression dans le gazomètre, $H = 76^{c},6 + 9^{c},7 = 86,3$.
Température ambiante, 24°.

De ces nombres on conclut, pour le volume du gaz sorti du gazomètre mesuré à 0° et 76^{c},

$$V = 0,000969 \frac{1755 \times 86,3}{1 + \frac{24}{273}} = 134^{cc},9.$$

Une partie de ce gaz n'a pas été absorbée, car on en a retrouvé

11cc,6 (mesurés à 76c,6, température 24°, et saturés de vapeur d'eau : tension = 2c,2) qui valent, à 0° et 76, 10cc,3.

Le volume de gaz ayant réagi est donc

$$134,9 - 10,3 = 124^{cc},6, \text{ soit } 5^{\text{moléc}},587 \text{ au lieu de } 5,656.$$

Par conséquent, le rapport $\frac{K}{AzO} = 1,010$ au lieu de 1,000.

Voyons l'augmentation du poids de la matière.

Comme la masse retient toujours un peu d'ammoniac, on a fait le vide dans le tube à l'aide d'une trompe de Sprengel, et l'on a recueilli 25cc,2 d'ammoniac (la capacité du tube était de 15 centimètres cubes). On a fermé le tube à la lampe, et l'on a trouvé pour l'augmentation de poids de la matière :

Augmentation de poids observée.........	0gr,1602
Correction pour les 15cc de gaz ammoniac.	0gr,0105
Augmentation de poids corrigée.....	0gr,1707

Or, les 124cc,6 de bioxyde d'azote pèsent 0gr,1673.

En prenant pour poids de la matière 0gr,1707 + 0gr,2206, soit 0gr,3913,
» pour poids du potassium................. 0gr,2206,
» pour poids du bioxyde d'azote............ 0gr,1673,
on arrive à la composition suivante :

	KAzO	
	Calculé	Trouvé
	—	—
Potassium......	56,52	56,38
Bioxyde d'azote.	43,48	42,76
	100,00	99,14

Quand on fait arriver de l'eau sur ce corps, il se produit une réaction assez vive avec dégagement de protoxyde d'azote; quelquefois les trois quarts du protoxyde d'azote de l'hypoazotite se dégagent dans cette action, et la matière est transformée en hydrate de potasse.

Cet hypoazotite de potassium n'avait pu être obtenu jusqu'ici qu'en dissolution; il se décomposait quand on voulait le faire cristalliser. On peut dissoudre sans décomposition l'hypoazotite de potassium en introduisant un peu d'eau dans le tube où se trouve ce composé et en laissant la vapeur d'eau agir sur ce corps; la matière tombe bientôt en déliquescence; on peut

alors la traiter par un excès d'eau sans avoir mis en liberté de protoxyde d'azote.

ACTION DU BIOXYDE D'AZOTE SUR LE SODAMMONIUM. — L'action du bioxyde d'azote sur le sodium a été étudiée autrefois; elle donne naissance à de la soude anhydre, à des oxydes de sodium, à de l'azotite de sodium, et de l'azote est mis en liberté. Avec le sodammonium, j'ai obtenu, au contraire, une réaction spéciale correspondant à celle que le potassammonium avait fournie. Le bioxyde d'azote est absorbé sans dégagement d'azote quand on le fait passer dans une solution de sodammonium dissous dans l'ammoniac liquide refroidi vers — 60°, et on obtient une matière d'aspect gélatineux, d'un blanc rosé, lorsque, après la décoloration du sodammonium, on a évaporé l'excès d'ammoniac. Il s'est produit la réaction

$$AzO + Na = AzONa.$$

Voici maintenant le détail d'une expérience :

Poids de sodium employé, $0^{gr},3144$, valant $13^{a},669$.
Poids de mercure versé dans le gazomètre, $P = 4300^{gr}$.
Pression dans le gazomètre, $H = 75,9 + 9,8 = 85,7$.
Température ambiante, 21°.

De ces nombres on conclut, pour le volume du gaz sorti du gazomètre mesuré à 0° et 76^{c},

$$V = 0,000969 \frac{4300 \times 85,7}{1 + \frac{21}{273}} = 331^{cc},58.$$

Une partie de ce gaz n'a pas été absorbée, car on en a retrouvé $25^{cc},08$ (mesurés à 0° et 760).

Le volume du gaz ayant réagi est donc de

$331,58 - 25,08 = 306,5$, soit $13^{mcl\acute{e}c},587$ au lieu de 13,669.

Par conséquent, le rapport $\frac{Na}{AzO} = 1,006$ au lieu de 1,000.

Voyons l'augmentation de poids de la matière.

On a fait le vide dans le tube à l'aide d'une trompe de Sprengel pour enlever la petite quantité d'ammoniac que la matière retient toujours. La capacité du tube était de $20^{cc},3$, et l'on a recueilli $58^{cc},3$

de gaz ammoniac. Le tube en verre a alors été fermé à la lampe, et l'on a déterminé l'augmentation de poids qu'il avait éprouvée, en tenant compte de ce que, dans la dernière pesée il est vide de gaz, tandis que dans les autres il était plein d'ammoniac à la pression atmosphérique.

Augmentation de poids observée.........	$0^{gr},4016$
Correction pour les $20^{cc},3$ de gaz ammoniac.	$0^{gr},0144$
Augmentation de poids corrigée......	$0^{gr},4160$

Or, les $306^{cc},5$ de bioxyde d'azote pèsent $0^{gr},4116$.

En prenant pour poids de la matière $0^{gr},3144 + 0^{gr},4160$, soit $0^{gr},7304$,
» pour poids du sodium.................. $0^{gr},3144$,
» pour poids du bioxyde d'azote........... $0^{gr},4116$,
on arrive à la composition suivante :

	AzONa	
	Calculé	Trouvé
Sodium........	43,40	43,05
Bioxyde d'azote.	56,60	56,30
	100,00	99,35

On a pris une certaine quantité de la matière ainsi obtenue ($0^{gr},530$) et on l'a précipitée par l'azotate d'argent; on a obtenu un précipité jaune d'hypoazotite d'argent pesant 1,3607 au lieu de 1,380.

Quand on chauffe l'hypoazotite de sodium dans le vide, il déflagre en donnant surtout du protoxyde d'azote, de l'azote et de l'ammoniac, si tout ce gaz n'a pas été expulsé au préalable. La matière qui reste dans le tube est fortement alcaline, et on peut constater qu'elle contient de l'azotite de sodium.

Dans ces expériences, le bioxyde d'azote agit donc non seulement à une température inférieure à celle de sa décomposition, non seulement autrement qu'un mélange d'azote et d'oxygène, mais il agit encore à la fois par son azote et son oxygène, en donnant des hypoazotites alcalins d'une pureté assez grande, et que l'on n'avait pu obtenir jusqu'ici à l'état solide par suite de leur réaction énergique sur l'eau.

Action de l'oxyde de carbone sur le potassammonium et le sodammonium.

Action de l'oxyde de carbone sur le potassium. — Divers auteurs ont décrit une combinaison d'oxyde de carbone et de potassium que l'on obtient sous forme d'une poudre noire, souvent explosible, dans la préparation industrielle du potassium. Liebig a constaté le premier que le potassium chauffé dans un courant d'oxyde de carbone se combine à ce gaz en donnant le composé KCO. Le composé a une couleur grise, d'après cet auteur (1); il est identique, d'après lui, à la substance noire que l'on obtient dans la préparation du potassium. Cette substance, traitée par l'eau, donne une solution rouge virant peu à peu au jaune au contact de l'air; par l'évaporation, on en obtient un sel jaune appelé, en raison de sa couleur, croconate de potassium, dont la formule est $K^2C^5O^5$, d'après Liebig. Depuis, ce composé a été étudié par Lerch (2), qui le décrit comme un composé noir (2), et par sir Benjamin Brodie (3), qui l'a obtenu avec une couleur rouge. Les propriétés de ce composé sont aussi très variables, d'après les auteurs; l'action de l'eau est très violente, d'après Brodie; peu violente, d'après Liebig. La combinaison s'enflamme à l'air lorsqu'on la chauffe, d'après le même auteur. Enfin, Nietzky et Beuckiser (4), qui ont étudié ce corps beaucoup plus récemment en le préparant comme Liebig et les chimistes précédents, le décrivent comme n'étant pas explosible, mais le devenant à un très haut point lorsqu'il a été exposé à l'air humide. Les divers chimistes qui se sont occupés de ce composé ne sont d'accord que sur sa composition centésimale, qui correspond à la formule KCO. Nietzki et Beuckiser, en étudiant les propriétés de la dissolution de ce corps, sont arrivés à cette conclusion que ce corps est de

(1) Liebig, *Ann. de chimie et de physique*, 2e série, t. LXVI, p. 324.
(2) Lerch, *Ann. der Chem. und Pharm.*, t. CXXIV, p. 20.
(3) Brodie, *Quarterly Journ. of chem. Soc.*, XII, p. 269.
(4) Nietzky et Beuckiser, *Deuts. chem. Gesell.*, 1886, XVIII, p. 1883.

l'hexhydroxylbenzole dans lequel tout l'hydrogène est remplacé par du potassium; sa forme est donc $K^6C^6O^6$. Depuis ces recherches et tout récemment, M. Mond ([1]) a prouvé l'existence d'autres carbonyles métalliques en découvrant le nickel-tétracarbonyle, et M Berthelot ([2]) a montré l'existence du fercarbonyle.

Action de l'oxyde de carbone sur le potassammonium. — Lorsqu'on fait arriver dans du potassammonium dissous dans de l'ammoniac liquéfié et refroidi vers — 50°, de façon que la tension de vapeur de ce dissolvant soit petite, de l'oxyde de carbone pur et sec, on voit la coloration mordorée que possèdent les solutions concentrées de potassammonium disparaître et faire place à la coloration bleue des solutions étendues; puis, avec une netteté parfaite, le virage de la couleur se fait, la liqueur bleue devient d'un blanc rosé; l'action est alors terminée. En laissant l'appareil revenir à la température ordinaire, l'ammoniac liquide, dans lequel le nouveau corps se trouvait en suspension à l'état de précipité gélatineux, se dégage, et l'on obtient une poudre d'un blanc rose. La formule est KCO, comme le montrent les deux analyses suivantes, où le potassium mis en expérience a été pesé et où l'oxyde de carbone a été dosé d'après le volume de gaz employé (I) ou d'après l'augmentation de poids du potassium (II).

	Calculé	Trouvé I	Trouvé II
CO....	41,73	41,03	41,24
K.....	58,27	58,97	58,76
	100,00	100,00	100,00

L'aspect de la substance ainsi obtenue diffère beaucoup des matières noires ou rouges décrites par les auteurs; cependant, si on l'abandonne à elle-même en tube scellé, sa couleur

([1]) Mond, *Journ. chem. Soc.*, LVII, p. 749, année 1890, et *The Nature*, 7 juill. 1892.

([2]) Berthelot, *Comptes rendus*, 1891, t. CXII, p. 1343.

devient plus foncée sans cependant devenir noire; mais ses propriétés sont encore plus différentes. Tandis que les corps noirs dont il a été parlé sont préparés vers 100°, le produit que j'ai obtenu détone à cette température. Ce composé détone encore lorsqu'on laisse rentrer une trace d'air, ou une goutte d'eau, ou une trace d'acide carbonique, dans le tube qui le contient. Les produits dégagés pendant ces décompositions brusques sont à peu près les mêmes que lorsque la détonation est produite par l'action de la chaleur; l'oxygène, l'air, l'eau, l'acide carbonique semblent agir en portant une petite quantité de la matière à une température où toute la masse se décompose brusquement. J'ai surtout étudié les produits de la détonation du composé analogue formé par le sodium; les résultats obtenus sont exposés un peu plus loin.

On peut cependant dissoudre le corps dans l'eau sans le faire détoner; pour cela, une fois le composé obtenu, on fait le vide dans le tube pour enlever l'ammoniac qui l'emplissait sous la pression atmosphérique, et, à l'aide d'un robinet soudé à l'appareil, on introduit un peu d'eau, de façon que celle-ci ne vienne pas toucher le potassium carbonyle; elle agit seulement par sa vapeur. En quelques heures, le composé de potassium est entré en déliquescence sans qu'aucun gaz se soit dégagé; sa couleur est rapidement devenue brune au contact de la vapeur d'eau; à la fin, la solution est jaune. Je n'ai pas étudié jusqu'ici les réactions de la dissolution ainsi obtenue.

Action de l'oxyde de carbone sur le sodium. — On n'a pas obtenu avec le sodium de composé analogue à celui que Liebig, le premier, a signalé pour le potassium. Le sodium fondu ne paraît pas se combiner à l'oxyde de carbone.

Action de l'oxyde de carbone sur le sodammonium. — L'oxyde de carbone est parfaitement absorbé par le sodammonium lorsqu'on fait arriver ce gaz dans une dissolution de cet ammonium alcalin faite dans l'ammoniac liquéfié. La couleur du sodammonium disparaît peu à peu pendant cette action, et

il reste un composé blanc teinté de lilas dont la composition répond à la formule NaCO, comme le montrent les analyses suivantes :

	Calculé	Trouvé I	II	III	IV
CO...	54,90	55,06	54,71	56,07	55,62
Na...	45,10	44,94	45,29	43,93	44,38
	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Ce composé détone, comme le composé de potassium décrit précédemment, sous l'influence de petites quantités d'air ou d'eau; une température de 90° suffit à produire son explosion. Lorsqu'on chauffe ce corps, sa couleur devient plus foncée; aucun gaz ne se dégage avant le moment de l'explosion. Un choc peut aussi le faire détoner, quoique plus difficilement : ayant enfermé à l'avance, dans le tube où je faisais l'expérience, de petites boules de verre, j'ai déterminé l'explosion de la matière et la rupture du tube en agitant vivement celui-ci. Bien que ces décompositions brusques ne produisent que des explosions sans danger avec les quantités de matière que j'employais ($0^{gr},5$ environ), cependant le tube est presque toujours brisé quand on produit la détonation par l'action de la chaleur, et la matière est projetée en formant une belle gerbe pyrophorique; si, dans un tube long de plusieurs décimètres, on fait détoner une petite quantité de cette substance placée à une extrémité, on voit une flamme se produire à l'intérieur du tube, et le reste de la matière placé à l'autre extrémité détone en même temps. Après plusieurs essais infructueux, j'ai réussi cependant à éviter la rupture de l'appareil. La décomposition brusque du corps sous l'influence de la chaleur peut être représentée par la formule

$$4NaCO = Co^3Na^2 + Na^2O + 3C.$$

On constate, en effet, qu'il ne se dégage que peu de gaz pendant l'explosion; il provient surtout de la décomposition par le charbon de la petite quantité d'ammoniac condensé par

la matière pulvérulente; il se forme en même temps un peu de cyanure de sodium. Mais la formule précédente représente bien la réaction principale, car pour 4 molécules de sodium carbonyle mis en expérience, j'ai trouvé qu'il y avait $0^{molée},9977$ de carbonate de sodium formé (d'après le volume d'acide carbonique dégagé en traitant le contenu du tube après l'explosion par de l'acide chlorhydrique étendu et $3^{s},005$ d'un carbone amorphe très difficile à laver).

Lorsqu'on fait tomber une goutte d'eau sur ce corps, tout le tube s'emplit d'une flamme rouge au moment de la détonation. Dans une expérience où le tube n'a pas été brisé, j'ai trouvé qu'il s'était dégagé une petite quantité de gaz (20 centimètres cubes pour $0^{gr},5515$ de matière) contenant 86 0/0 d'hydrogène et 14 0/0 d'oxyde de carbone; il y a en même temps mise en liberté de carbone et formation de carbonate de sodium. Comme pour le composé analogue formé par le potassium, l'eau peut dissoudre la matière sans explosion quand on la fait agir lentement à l'état de vapeur; dans ces conditions, le sodium carbonyle est devenu rouge brique, puis rouge brun foncé, enfin d'un noir violacé. Après quelques jours, toute la matière était transformée en un liquide visqueux, rouge foncé, sans trace de matière insoluble et sans aucun dégagement de gaz. Ce liquide, traité par un acide, ne dégageait pas d'acide carbonique. Je n'ai pas encore étudié les réactions de la dissolution ainsi obtenue.

En résumé, l'action de l'oxyde de carbone sur les ammoniums alcalins m'a donné deux composés de couleur et de propriétés très différentes de celles que l'on connaissait pour le potassium carbonyle de Liebig. Tous les faits observés indiquent que le composé de Liebig doit être un composé polymère de celui que j'ai obtenu.

Action du phosphure d'hydrogène sur le potassammonium et le sodammonium.

Action du phosphure d'hydrogène sur le potassammonium. — Quand on fait arriver du phosphure d'hydrogène dans le potassammonium dissous dans de l'ammoniac liquéfié, on constate qu'une réaction se produit ; le phosphure d'hydrogène disparaît peu à peu en même temps que de l'hydrogène se dégage. Dans le tube où se fait l'expérience, on voit en même temps se former un liquide qui ne se mêle pas à la dissolution ammoniacale d'ammonium alcalin, mais qui dissout cependant une petite quantité de ce corps. Lorsque la réaction est presque terminée, le potassammonium qui reste nage, sous forme de gouttelettes qui paraissent huileuses, au-dessus de l'autre liquide. Puis, lorsque la réaction est terminée, ces dernières gouttelettes ont disparu et on a un liquide très réfringent rappelant, à ce point de vue, le sulfure de carbone ; si on laisse alors partir l'ammoniac en excès, il se dépose de fines aiguilles d'un corps blanc qui a pour composition PhH^2K : c'est un composé analogue à l'amidure de potassium AzH^2K, et que l'on peut appeler par analogie phosphidure de potassium. Ce composé, qui n'avait pas encore été obtenu, bien que l'amidure soit connu depuis Gay-Lussac, se trouve préparé dans ces expériences à un grand degré de pureté, comme le montrent les deux analyses suivantes :

Première analyse.

Poids de potassium employé, $0^{gr},2925$, valant $7^{a},480$.
Poids de mercure versé dans le gazomètre, 2253^{gr}.
Pression dans le gazomètre, $76,2 + 7,8 = 84^{c},0$.
Température ambiante, 11°.

De ces nombres on conclut, pour le volume du gaz sorti du gazomètre mesuré à 0° et 76,

$$V = 0,000969 \frac{2253 \times 84}{1 + \frac{11}{273}} = 176^{cc},28.$$

Une partie de ce gaz n'a pas été absorbée, car on en a retrouvé $6^{cc},0$ (ramenés à 0° et 760) mélangés à $81^{cc},9$ d'hydrogène (ramenés à 0° et 760). Ces $81^{cc},9$ d'hydrogène représentent à peu près le tiers de l'hydrogène contenu dans 170,28 de phosphure; exactement, 85,14.

Le volume du gaz ayant réagi est donc de $176,28 - 6,0 = 170,28$, soit $7^{m},611$ au lieu de 7,480. Ces 170,28 pesaient $0^{gr},2588$, et le poids correspondant de PhH^3 était $0,2588 \times \frac{33}{34} = 0,2512$.

Par conséquent, le rapport $\frac{K}{PhH^3} = 0,983$ au lieu de 1,000.

Quant à l'augmentation de poids de la matière, elle a été trouvée égale à $0^{gr};2564$.

Le poids de la matière était donc $0,2925 + 0,2564 = 0^{gr},5489$; elle contenait un poids de potassium de .... $0^{gr},2925$, et, d'après le volume de phosphure d'hydrogène, un poids de PhH^3 de .... $0^{gr},2512$.

On peut, avec ces nombres, calculer la composition centésimale de la matière. Voici les nombres trouvés, rapprochés de ceux qu'indique la théorie, en admettant la formule PhH^3K :

	PhH^3K	
	Calculé	Trouvé
K......	54,16	53,29
PhH^3...	45,84	45,77
	100,00	99,06

On peut aussi calculer les résultats autrement, en tenant compte de l'hydrogène dégagé. En effet, la matière contenait

Le potassium mis, soit		0,2925	ou $7^{a},480$
Le phosphure d'hydrogène employé, soit 0,2588...	Phosphore.	0,2360	$7^{a},613$
	Hydrogène.	0,0228	soit 0,0154 ou $15^{a},400$
Moins l'hydrogène parti (poids de $81^{cc},9$ d'hydrogène)............		0.0074	

Avec ces nombres, on peut calculer les proportions centésimales que voici, en divisant toutes ces quantités par 0,5489, poids de matière trouvé :

	PhH^2K	
	Calculé	Trouvé
K.....	54,16	53,29
Ph....	43,06	43,00
H.....	2,78	2,80
	100,00	99,09

Remarquons enfin que, d'après ces nombres, on trouve les rapports

$$0,995 \text{ au lieu de } 1,000 \text{ pour } \frac{K}{Ph},$$

$$2,02 \text{ au lieu de } 2,00 \text{ pour } \frac{H}{Ph}.$$

Deuxième analyse.

Poids de potassium employé, $0^{gr},1556$ ou $3^a,990$.
Poids de mercure versé dans le gazomètre, 1510^{gr}.
Pression dans le gazomètre, $77,1 + 6,8 = 83^c,9$.
Température ambiante, $12^o,5$.

De ces nombres on conclut, pour le volume du gaz sorti du gazomètre mesuré à 0° et 76,

$$V = 0,000969 \frac{1510 \times 83,9}{1 + \frac{12,5}{273}} = 117^{cc},38.$$

Une partie de ce gaz n'a pas été absorbée, car on en a retrouvé $25^{cc},2$ (ramenés à 0° et 76) mélangés à $45^{cc},5$ d'hydrogène (ramenés à 0° et 76). Ces $45^{cc},5$ d'hydrogène représentent à peu près le tiers de l'hydrogène contenu dans les $92^{cc},2$ de phosphure (la théorie indique qu'on devrait en avoir trouvé 46,1).

Le volume du gaz ayant réagi est donc de $117,4 - 25,2 = 92,2$, soit $4^m,13$ au lieu de $3^m,99$. Ces $92^{cc},2$ pesaient $0^{gr},1401$, et le poids correspondant de PhH^3 fixé était de $0^{gr},1401 \times \frac{33}{34} = 0^{gr},1359$.

Quant à l'augmentation de poids de la matière, elle a été trouvée égale à 0,1311.

Le poids de la matière était donc de $0^{gr},1556 + 0^{gr},1311 = 0^{gr},2867$
elle contenait un poids de potassium de .... $0^{gr},1556$
et, d'après le volume de phosphure d'hydrogène, un poids de PhH^3 de .... $0^{gr},1359$

On peut, avec ces nombres, calculer la composition centésimale de la matière. Voici les nombres trouvés :

	PhH^2K Calculé	PhH^2K Trouvé
K......	54,16	54,27
PhH^2...	45,84	47,40
	100,00	101,67

On peut aussi calculer les résultats autrement en tenant compte de l'hydrogène dégagé. En effet, la matière contenait

Le potassium mis, soit			0,1556 ou 3^{a},99
Le phosphure d'hydrogène employé, soit	Phosphore		0,1277 ou 4^{a},11
	Hydrogène. 0,0124	soit	0,0083 ou 8^{a},30
Moins l'hydrogène parti (poids de 45,5 d'hydrogène)	0,0041		

Avec ces nombres, on peut calculer les proportions centésimales que voici, en divisant ces quantités par 0^{gr},2867, poids de matière trouvé :

	PhH^2K Calculé	PhH^2K Trouvé
K......	54,16	54,27
Ph.....	43,06	44,54
H......	2,78	2,89
	100,00	101,70

Remarquons enfin que, d'après ces nombres, on trouve les rapports :

$$0{,}971 \text{ au lieu de } 1{,}00 \text{ pour } \frac{K}{Ph},$$

$$2{,}02 \text{ au lieu de } 2{,}00 \text{ pour } \frac{H}{Ph}.$$

ACTION DU PHOSPHURE D'HYDROGÈNE SUR LE SODAMMONIUM. — Lorsqu'on fait agir du phosphure d'hydrogène sur une solution de sodammonium faite dans l'ammoniac liquéfié, on observe

tout d'abord les mêmes phénomènes qu'avec le potassammonium : disparition du phosphure d'hydrogène, mise en liberté d'une quantité d'hydrogène qui correspond à la formation d'un phosphidure de formule PhH^2Na. On voit aussi, vers la fin de l'expérience, des gouttes de sodammonium avec leur couleur mordorée flotter à la surface d'un liquide incolore réfringent, et ayant à cause de cela l'apparence du sulfure de carbone; ce liquide se prend en masse lorsqu'on le refroidit. Si on laisse alors partir l'ammoniac en maintenant le tube à 0°, on n'obtient pas, comme dans le cas du potassium, une masse solide cristallisée. La matière est encore liquide; elle contient à la fois le phosphidure formé, comme les résultats ci-dessous le montrent et en même temps de l'ammoniac. Le tube ayant dégagé tout, l'ammoniac qu'il pouvait perdre à 0° sous la pression atmosphérique, on l'a pesé après quarante-huit heures de séjour dans la glace; puis on l'a laissé revenir à la température ambiante (13°); il a perdu une nouvelle quantité d'ammoniac que l'on a déterminée par une nouvelle pesée. On l'a alors chauffé à 65°; la matière a cristallisé et a perdu une nouvelle quantité de gaz ammoniac que l'on a encore déterminée par pesée. Entre 65 et 69°, il a commencé à se dégager un peu de phosphure d'hydrogène ($0^{cc},3$); on a cessé de chauffer. Voici les diverses quantités d'ammoniac parties :

Entre 0 et 13...	$0^{gr},1439$
Entre 13 et 65...	$0^{gr},2221$
	$0^{gr},3660$

Soit $21^{m},53$ pour $7^{m},5$ de phosphidure de sodium.

Je ne puis dire jusqu'à présent si ce corps à 0° est une combinaison bien définie d'ammoniac et de phosphidure. Lorsqu'on fait le vide dans le tube, on peut enlever tout l'ammoniac contenu dans la matière et obtenir un corps blanc solide, un peu souillé par un corps jaunâtre $PhNa^3$, dont on ne peut entièrement éviter la formation quand on opère avec le sodammonium.

La composition de ce corps s'établit comme pour le phosphidure de potassium. Voici le résultat des analyses de diverses préparations de phosphidure de sodium :

CORPS	CALCULÉ		TROUVÉ					
			I		II		III	
	en centièmes	en atomes	en centièmes	en atomes	en centièmes	en atomes	en centièmes	en atomes
Na	41,07	1	40,34	0,970	40,62	0,985	42,09	1,038
Ph	55,36	1	56,05	1,000	55,59	1,000	54,62	1,000
H	3,57	2	3,61	2,003	3,79	2,122	3,29	1,877
	100,00		100,00		100,00		100,00	

Tels sont les premiers résultats de mes recherches sur l'action des gaz sur le potassammonium et le sodammonium. Ils suffisent déjà pour montrer que les ammoniums alcalins agissent sur un grand nombre de corps à des températures comprises entre 0° et — 78°, c'est-à-dire dans des conditions précieuses, puisqu'à ces températures le verre n'est pas attaqué par ces composés et que l'on peut ainsi obtenir des produits plus purs, exempts de silice en particulier. Ce n'est d'ailleurs pas le seul avantage de cette méthode; elle permet, en effet, d'obtenir des composés instables que l'on n'avait pu obtenir directement avec les métaux alcalins fondus. Tels sont le trioxyde de sodium, les hypoazotites alcalins, les combinaisons non polymérisées d'oxyde de carbone et de sodium ou de potassium, et enfin les phosphidures alcalins.

CONTRIBUTION

A

L'ÉTUDE DE L'ÉTAGE TONGRIEN

DANS LE DÉPARTEMENT DE LA GIRONDE

PAR M. E. FALLOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

L'étage tongrien, tel qu'on le conçoit généralement dans son acception la plus large ([1]), comprend dans le département de la Gironde : 1° à la base, une mollasse sableuse grisâtre ou gris verdâtre désignée généralement sous le nom de Mollasse du Fronsadais, et reposant sur un système d'argiles que j'ai appelées *argiles infra-mollassiques* ([2]); 2° un calcaire lacustre dit calcaire de Castillon et de Civrac, dont la présence est inconstante; 3° un système d'argiles renfermant *Ostrea longirostris*, Lk., et *Ostrea* cf. *cyathula*, Lk., et formant la base de l'assise suivante; 4° le calcaire à Astéries; 5° la Mollasse inférieure de l'Agenais, qui est (*pro parte* tout au moins), comme l'a indiqué Tournouër ([3]), un faciès contemporain du calcaire à Astéries et développé vers l'Est ([4]).

([1]) Je donne ici le nom de Tongrien à toutes les assises comprises entre l'Éocène supérieur et l'Aquitanien; il comprend donc le Tongrien et le Rupélien des auteurs belges. M. de Lapparent a divisé le Tongrien dans son sens large en Sannoisien (Tongrien des géologues belges) et Stampien (*Traité de géologie*, 3e édition); je garderai pour ma part les divisions adoptées précédemment, Infra-Tongrien et Tongrien, en faisant remarquer que si un étage méritait le nom de *Burdigalien,* c'était bien cet ensemble-là, à cause de son grand développement à Bordeaux dont il constitue le sous-sol et la région environnante, et non celui auquel M. Depéret a cru devoir enlever le nom de Langhien sous lequel il était généralement connu.

([2]) Voyez : *Notes sur l'Oligocène inférieur* (*Procès-verbaux de la Société Linnéenne de Bordeaux,* séances des 1er et 15 juin 1887) et *Esquisse géologique du département de la Gironde* in *Feuille des Jeunes Naturalistes,* Paris, 1889.

([3]) Voyez notamment *C. R. Ac. Sc.,* 1865, p. 198; *Bull. Soc. Géol. de France,* 2e série, t. XXIV, p. 484 et suiv., et surtout *Ibid.,* t. XXVI, p. 983 et suiv.

([4]) Vers l'Ouest, c'est-à-dire dans les vallées du Bordelais, on ne rencontre sur

Dans le présent travail, je laisserai complètement de côté cette dernière assise, que je n'ai pas étudiée suffisamment, et je ne m'occuperai que des précédentes, en insistant presque uniquement sur le calcaire à Astéries et sur ses faciès à fossiles déterminables.

1° Mollasse du Fronsadais et Argiles infra-mollassiques.

La Mollasse du Fronsadais repose généralement, comme je le disais plus haut, sur un système d'argiles que l'on peut voir bien représenté dans le tertre de Fronsac, et que j'ai appelées *argiles infra-mollassiques*. C'est dans de petits bancs lacustres situés dans leur intérieur que MM. Potier et Vasseur ont indiqué la présence de Limnées, de Planorbes et enfin du ***Melanopsis mansiana***, espèce des marnes supra-gypseuses de Pantin [1], et c'est au-dessous de ces calcaires qu'ils ont constaté, dans les argiles susdites, la présence de l'*Anomia girondica*, Math., considérée jusqu'alors comme caractéristique de l'Éocène supérieur. Ces auteurs ont fait entrer tout ce système d'argiles dans l'Infra-Tongrien, avec la Mollasse du Fronsadais à la partie supérieure.

Bien que je n'aie pas étudié d'une façon spéciale cette question qui me paraît assez complexe, je ferai remarquer que les argiles infra-mollassiques sans fossiles, telles qu'on les voit le plus souvent, n'existent pas toujours, et que l'on observe quelquefois les couches à Anomies typiques du Blayais surmontées directement par la Mollasse du Fronsadais. Ainsi, à la Roque-de-Tau, par exemple, en suivant la route qui mène à Gauriac, on voit les couches sableuses et gréseuses à Anomies, si bien développées dans la coupe du bois de Barbe, passer en quelque

---

le calcaire à Astéries que des argiles verdâtres en général assez minces, avec concrétions calcaires; elles représentent probablement une partie de cette Mollasse inférieure de l'Agenais.

[1] Les formations infra-tongriennes du bassin de la Gironde (*Procès-verbaux Soc. Linn. de Bordeaux,* 18 juillet 1888).

sorte graduellement à une assise assez mince de sables argileux qui représentent évidemment la Mollasse du Fronsadais, et qui précèdent immédiatement le calcaire à Astéries. Ce fait vient à l'appui de la manière de voir qui consiste à faire des couches à Anomies l'équivalent des argiles infra-mollassiques, le plus souvent sans fossiles, de la vallée de la Dordogne, etc.; mais cela ne prouverait pas que ce système doive rentrer dans la partie inférieure de l'Infra-Tongrien, que M. de Lapparent désigne aujourd'hui sous le nom tout au moins inutile de *Sannoisien;* il pourrait tout aussi bien être attribué à la fin de l'Éocène supérieur.

Il existe d'autres faits qui semblent tout à fait probants en ce qui concerne leur classement définitif. M. Benoist a signalé une faune tongrienne dans les couches à Anomies du Meynieu, près Vertheuil (1) : *Pectunculus angusticostatus,* Lk., *Diastoma Grateloupi,* d'Orb., *Cerithium bidentatum,* Grat., *C. plicatum,* Brug., *Echinolampas Blainvillei,* Ag., etc.

Dans une note plus récente (2), le même auteur cite dans les argiles à Anomies qui forment la base du Puy-de-Lansac, près Bourg, et qui sont sous-jacentes à des sables mollassiques, les fossiles suivants : *Cerithium Charpentieri,* Bast., *C. plicatum,* Brug., *Diastoma Grateloupi,* d'Orb. Ce fait viendrait donc corroborer l'opinion de M. Vasseur, qui consiste à placer les couches à Anomies à la base de l'Oligocène, c'est-à-dire de l'Infra-Tongrien. Je ferai cependant observer que dans ces localités la Mollasse du Fronsadais n'est pas nette, dans le Médoc et le Bourgeais surtout, et qu'il est très possible que les couches susdites représentent, au moins en partie, la Mollasse du Fronsadais (3). Cette dernière, d'origine probablement fluviatile dans

---

(1) *Description géologique et paléontologique des communes de Saint-Estèphe et Vertheuil (Actes Soc. Linn.,* 1885).

(2) *Procès-verbaux Soc. Linn. de Bordeaux,* 21 mai 1890.

(3) La grande coupe publiée par MM. Benoist et Billiot dans les *Actes de la Soc. Linn. de Bordeaux* (t. XLIII, 1889) viendrait à l'appui de cette manière de voir; pour eux, la Mollasse du Fronsadais serait en quelque sorte remplacée dans la région située entre Cars et Bourg, par une masse de couches à Anomies.

l'Est, deviendrait sans doute un dépôt d'estuaire ou de lagune dans l'Ouest, vers le Médoc surtout, ce qui expliquerait peut-être son aspect plus argileux d'une part et, d'autre part, la présence de mollusques marins (1) et d'algues marines *(Melobesia)*.

Quoi qu'il en soit, tous ces faits ont besoin d'être étudiés avec le plus grand soin, et il est fort difficile, au milieu de l'intrication des faciès sableux et argileux des assises inférieures au calcaire à Astéries, de démêler ce qui doit appartenir à la Mollasse du Fronsadais ou aux assises sous-jacentes (argiles à Anomies ou argiles infra-mollassiques). De toute façon, il semble bien qu'il y a eu dans la région un passage insensible de l'Éocène à l'Oligocène, et que ce passage s'est fait par l'intermédiaire d'argiles renfermant ou non des *Anomia girondica*. Pendant toute cette époque de transition éocène-tongrienne, la région voisine de la mer actuelle devait être occupée par des sortes de lagunes où se sont déposées les susdites argiles, et c'est dans ces lagunes que venait sans doute se jeter le grand cours d'eau qui a déposé la Mollasse du Fronsadais.

La Mollasse du Fronsadais se voit avec ses caractères les plus typiques, non seulement le long de la vallée de la Dordogne, mais aussi le long de la vallée de l'Isle et de celle de la Dronne. Une des régions où elle est le plus développée, c'est celle qui est comprise entre la Dronne et le Lary, au nord de Coutras. Il n'y a là aucune trace de terrain éocène, et la Mollasse repose directement sur la Craie, ainsi que j'ai pu m'en convaincre *de visu*, après plusieurs explorations dans les environs de La Clotte, Cercoux et Montguyon. C'est à La Clotte, dans une des carrières placées immédiatement au sud du village, que j'ai pu constater ce fait.

Dans toute cette partie méridionale de la Charente-Inférieure, le terrain crétacé se termine par une série de calcaires blanc jaunâtre, en bancs plus ou moins irréguliers, tantôt compacts et très durs, tantôt pulvérulents, qui appartiennent à la partie

(1) M. Vasseur a signalé à Artigues et à Vertheuil une couche calcaire à fossiles tongriens qui serait à la partie supérieure de la Mollasse.

inférieure de l'étage danien classique, c'est-à-dire au Maestrichtien ou Dordonien.

Ces calcaires nous ont fourni de nombreux fossiles, parmi lesquels il faut citer :

Nautilus de grande taille.
Trigona spinosa, Park.
Arca royana, d'Orb.
Janira substriatocostata, d'Orb.
— *quinquecostata,* d'Orb.
Ostrea caderensis, Coq.
— *larva,* Lamk.
— *sp. ind.*
Hemiaster nasutulus, Sorign. (1).
Diploctenium cordatum, Goldf.
Orbitoides media, d'Arch.

On peut retrouver à peu près les mêmes espèces dans les affleurements situés près du Lary, près du Grand-Moulin, et dans les grandes carrières de Valin. Dans une excursion récente, nous avons rencontré dans ce dernier point *Inoceramus regularis,* d'Orb., des *Cyclolites* et en général une faune remarquable de Gastéropodes, de Pélécypodes et de Polypiers, malheureusement à l'état de moules intérieurs et peu susceptibles d'une détermination rigoureuse.

Je ferai remarquer en passant que cette Craie a en général des caractères qui se rapprochent des caractères littoraux de celle de Royan ; j'ajouterai cependant que ces caractères sont moins accentués : les Rudistes, d'une part, sont peu abondants et non déterminables, et, d'autre part, les bancs d'*Ostrea vesicularis,* Lk. (2), si développés dans les falaises de Royan et de

(1) Dans une note parue dans les *Procès-verbaux Soc. Linn. de Bordeaux* (séance du 18 juin 1890), M. L. Reyt, qui rendait compte d'une de nos excursions dans la région, avait indiqué dans ces couches l'*Hemiaster prunella,* Desor, espèce de Maestricht; mais, ainsi que me l'a fait observer M. Arnaud, c'est plutôt à une variété globuleuse de l'*Hemiaster nasutulus* que nous avons affaire.

(2) M. Reyt y a trouvé cette espèce de très petite taille; elle n'y forme pas de bancs.

Saint-Georges-de-Didonne, manquent jusqu'ici dans les affleurements que nous venons de décrire.

Cette Craie de La Clotte, dernier affleurement que nous connaissions vers le Sud dans la Charente-Inférieure, devait évidemment se relier avec celle qui forme les affleurements que nous avons récemment décrits dans la Gironde (Villagrains, Landiras) et dans les Landes (Roquefort). La Craie de Roquefort notamment a souvent une grande analogie de structure avec elle; mais les fossiles à aspect pyrénéen (grandes *Orbitoïdes, Hemipneustes pyrenaicus,* Héb.) s'y montrent déjà, tandis que nous ne les avons pas rencontrés à La Clotte et dans les localités circonvoisines. Sous ce rapport, le petit affleurement de Landiras (Moulin de Peyron) nous semble former le trait d'union entre les deux régions charentaise et landaise. A Landiras, en effet, nous avons récolté le *Diploctenium cordatum,* si abondant à Valin, etc., et nous avons trouvé un mauvais exemplaire de l'*Hemipneustes pyrenaicus* (1). La distance qui sépare les deux localités que je viens de citer en dernier lieu est d'environ 80 kilomètres à vol d'oiseau. A La Clotte, le Crétacé supérieur doit atteindre environ 60 mètres d'altitude; à Landiras, il est environ à 40 mètres. Cette dénivellation, insignifiante du reste, s'explique très facilement par le léger plongement que les couches crétacées nous ont présenté à La Clotte : ce plongement doit être environ de 3° à 4°.

Entre les deux points, il y a un hiatus considérable, une surface d'effondrement qui a été remplie par les terrains tertiaires et les formations de recouvrement quaternaires.

Ces formations tertiaires doivent probablement offrir dans la profondeur une succession complète, depuis les assises éocènes les plus inférieures jusqu'à l'Oligocène; les sondages divers de la région sont là pour le prouver, mais sur le bord septentrional

(1) A La Clotte nous avons trouvé un *Echinoconus* de forme ovalaire et un peu surbaissée qui nous a rappelé, mais sans qu'on puisse l'identifier avec lui, la forme de l'*Echinoconus Raulini*, d'Orb., espèce propre à la partie de la Craie de Villagrains qui forme le passage du Campanien au Maëstrichtien.

du bassin on ne rencontre jusqu'ici, à notre su, que l'Oligocène (Blayais excepté).

Il ne semble pas qu'il y ait de discordance de stratification réelle entre le Crétacé supérieur et la Mollasse à la Clotte. Celle-ci plonge elle-même très peu vers le Sud, comme on peut s'en apercevoir en montant la côte qui mène de Coutras à Lagorce, mais ce fait n'a rien du tout d'extraordinaire. Il arrive très fréquemment, dans certains bassins, que les assises tertiaires semblent reposer en concordance sur les assises crétacées, même lorsqu'il y a une lacune considérable entre les deux formations. Le bassin de Londres offre sous ce rapport un très bel exemple : les couches éocènes de Thanet paraissent être en concordance avec le Crétacé supérieur constitué par des assises qui sont loin de représenter le dernier terme de la formation. On ne connaît pas là, en effet, de couche crétacée plus récente que le Sénonien supérieur : le Danien semble manquer tout entier. Nous pourrions du reste multiplier ces exemples.

Dans le point où nous avons été assez heureux pour voir le contact du Crétacé supérieur et de la Mollasse du Fronsadais, à La Clotte, celle-ci ne présentait qu'un lambeau en voie de glissement sur le front de la carrière. Elle offrait sa constitution la plus typique de sable quartzeux mélangé d'argile, le tout d'une couleur gris verdâtre absolument caractéristique.

On sait que, d'une façon générale, la Mollasse du Fronsadais ne présente pas de fossiles. Je ne parle pas des végétaux indiqués par M. Vasseur et retrouvés par nous entre Cercoux et le Pas-de-Lary dans des argiles qui en dépendent. On ne peut guère citer d'une façon positive dans la Mollasse que des débris de Tortues (ossements et fragments de carapace), appartenant probablement au genre *Trionyx*, provenant de la Grave (commune de Bonzac) et déposés dans les vitrines du Muséum de Bordeaux (1). Il est probable que ces débris viennent à peu

(1) On y voit aussi des débris de Tortues provenant de couches argileuses jaune verdâtre trouvés à Listrac, près Rauzan ; il est probable qu'il s'agit ici des argiles infra-mollassiques.

près du point où a été rencontré le fameux *Palæotherium girondicum*, Blainv., de la Grave. Ce dernier, d'après M. Vasseur, aurait été trouvé à la base des couches franchement sableuses [1]; en tous cas, il était dans des argiles vertes dont un échantillon a été conservé au Muséum de Bordeaux, qui possède également un fragment de mâchoire de *Paloplotherium annectens*, Owen, donné par Delbos et étiqueté comme provenant du domaine de la Grave, sans indication de couche. Le nom d'argiles à *Palæotherium* conviendrait donc assez bien pour les argiles infra-mollassiques *dans la région septentrionale et orientale de la Gironde,* où les fossiles marins tels que les Anomies n'existent pas ou n'ont pas été trouvées jusqu'ici du moins.

2° Calcaire d'eau douce de Castillon et de Civrac.

Le Calcaire de Castillon et de Civrac est une formation inconstante qui est surtout développée dans l'Entre-deux-Mers et dans le Médoc. Entre ces deux régions, il manque généralement ou bien il est absolument rudimentaire ou remplacé par des argiles, comme on peut le voir dans les environs de Fronsac. C'est près de Saint-Hippolyte, entre Saint-Émilion et Castillon, que le calcaire d'eau douce apparaît au milieu d'argiles verdâtres supérieures à la Mollasse du Fronsadais [2]. De là il va se développant de plus en plus vers l'Est, où il finit par atteindre une vingtaine de mètres d'épaisseur.

Il est généralement blanchâtre, souvent crayeux, et présente des couches siliceuses extrêmement développées, ainsi qu'on peut le voir soit aux environs de Sainte-Foy, soit dans l'inté-

---

(1) L'argile à *Palæotherium* ne serait donc pas supérieure à la Mollasse du Fronsadais comme M. Mayer-Eymar l'indique dans un tableau récent (*B. S. G. F.*, 3e série, t. XXI.)

(2) Voyez E. Fallot, *Procès-verbaux Soc. Linn. de Bordeaux* (séance du 15 juin 1887); voyez aussi Delbos, *Recherches sur l'âge de la formation d'eau douce sur la partie orientale du bassin de la Gironde.* Paris, 1847.

rieur de l'Entre-deux-Mers. Ces silex sont généralement formés par de l'opale; leur couleur est blanc bleuâtre ou blanc jaunâtre. Quelquefois ils ont l'aspect porcelainé et présentent alors la variété à laquelle on a donné le nom de *cacholong*. Souvent la roche est tellement imprégnée de silice qu'elle est transformée en une véritable meulière.

La faune du calcaire de Castillon est très pauvre. Le seul fossile vraiment caractéristique que l'on y ait jamais rencontré est le ***Nystia Duchasteli***, Nyst, qui le fait paralléliser comme âge avec le calcaire de Brie. Le Muséum de Bordeaux possède un échantillon présentant quelques spécimens de cette espèce, dûment déterminée par Tournouër, et provenant des environs de l'église de Ruch, canton de Sauveterre-de-Guyenne.

Je citerai encore quelques Limnées, de forme assez allongée, rappelant *Limnæa longiscata*, Brong., et *Limnæa Larteti*, Noulet. Les exemplaires déposés au Muséum de Berdeaux viennent de la Baucamerie, près Saint-Émilion, où Delbos les a signalés; de Monségur, de Coutures, de Massugas (canton de Pellegrue), de Saint-Ferme, de Saint-Laurent-de-Servolles. On y rencontre aussi quelques Planorbes (la Baucamerie, Monségur) et des Cyclostomes (Ligneux, canton de Sainte-Foy).

On y trouve enfin quelques débris de végétaux. Nous avons ramassé plusieurs de ces débris dans des blocs rencontrés sur la route de Saint-Jean à Saint-Aubin-de-Blagnac; ils semblent se rapporter à des fruits de Dicotylédones.

3° Argiles à *Ostrea longirostris* et *O.* cf. *cyathula (O. girondica)*.

Ainsi qu'on peut le voir dans un grand nombre de coupes [1], le Calcaire à Astéries est généralement précédé par des argiles à Huîtres qui reposent soit sur le Calcaire de Castillon, soit sur la Mollasse du Fronsadais, par l'intermédiaire d'argiles plus ou

---

[1] Voyez Delbos, *loc. cit.;* E. Fallot, etc.

moins verdâtres que l'on peut observer aux environs de Fronsac, de Branne, etc. Ces argiles, précédant les couches à Huîtres et se liant avec elles, sont souvent remplies de Foraminifères (Milioles) et indiquent par conséquent une formation marine.

Aux environs de Sainte-Foy, ainsi qu'on peut le voir dans la coupe que j'ai donnée *(loc. cit.)*, les argiles à *Ostrea longirostris*, Lk., sont inférieures aux argiles à *O.* cf. *cyathula*. Au Mont-Aigu, sur les bords de l'Isle, à quelques kilomètres au nord de Libourne, on voit aussi quelques valves d'*Ostrea longirostris*, assez peu développées du reste, sous les petites huîtres plissées que j'ai désignées antérieurement sous le nom d'*Ostrea* cf. *cyathula*. Dans certains points, on ne rencontre guère que l'*Ostrea longirostris*, Lk., qui atteint quelquefois des dimensions considérables, jusqu'à 40-50 centimètres. La localité de Saint-Aubin-de-Blagnac présente des échantillons absolument remarquables à cet égard et bien différents de l'*Ostrea longirostris* des environs de Paris, qui n'offre généralement que des dimensions assez restreintes (15 centimètres environ au maximum d'après Deshayes).

La compagne habituelle de l'*Ostrea longirostris*, et qui a généralement été désignée sous le nom d'*Ostrea cyathula* par les stratigraphes, présente des difficultés de détermination considérables. MM. Raulin et Delbos, dans un travail sur les *Ostrea* des terrains tertiaires de l'Aquitaine (1), ne citent *Ostrea cyathula*, Lk., que dans le calcaire à Astéries à Tizac-de-Curton. Parmi les nombreux échantillons que j'ai étudiés, soit dans les argiles à Huîtres, soit dans le calcaire à Astéries, je n'ai guère rencontré qu'un ou deux exemplaires que je crois devoir rapporter à *O. cyathula*, Lk., et encore avec quelque doute. Le plus typique provient d'un point situé entre Dieulivol et Vignole. Ce qui m'engage à lui donner le nom d'*O. cyathula*, c'est sa forme assez excavée d'une part, et, d'autre part, c'est le petit nombre de côtes qu'il présente (une vingtaine visibles). MM. Raulin et Delbos indiquent comme trait caractéristique de

(1) *Bull. Soc. Géol. France*, 2e série, t. XII, p. 1144.

l'*Ostrea cyathula* le chiffre de 25 côtes environ. Je considère cette forme comme extrêmement rare, du moins à ma connaissance, dans la région girondine. La petite huître que l'on rencontre le plus communément dans les argiles situées à la base du calcaire à Astéries a des côtes beaucoup plus nombreuses (45-50 côtes d'après MM. Raulin et Delbos), et c'est ce caractère qui a engagé les auteurs susnommés à la rapporter à *O. virgala*, Goldf. (1). Cette opinion a été adoptée par M. Benoist, notamment dans son *Esquisse géologique des terrains tertiaires du Sud-Ouest de la France* (2). Ayant repris l'étude de cette question et peu satisfait des indications et de la planche de Goldfuss, je me suis adressé à mes collègues de Belgique dans l'espoir de me procurer quelques échantillons bien typiques de l'espèce de Goldfuss. A ce propos, M. le professeur Dewalque, de l'Université de Liège, a bien voulu m'écrire une lettre dont je transcris ici le passage suivant :

« Goldfuss indique l'*O. virgata* à Gretz et à Tongres, dans le Brabant. Au lieu de Gretz, il faut sans doute lire Grez, village du Brabant, à une lieue et demie de Wavre, dans le Bruxellien. Quant à Tongres, cette petite ville appartient au Limbourg, non au Brabant.

» En 1843, Nyst décrivit *O. virgata,* Goldf. (*Coq. et Pol. fossiles de Belg.*, p. 323.) Après avoir cité cette espèce dans huit localités classiques du Bruxellien, il l'indique aussi à Berg et à Vliermael dans le Limbourg. Nyst ne fait aucune différence de gisement, mais nous savons aujourd'hui que les sables de ces deux localités sont du Tongrien inférieur *(notre Tongrien).* Nyst ajoute que cette coquille, très commune dans les environs de Bruxelles, se trouve pêle-mêle avec l'*O. cymbula* dont elle nous semble n'être qu'une variété plus aplatie.

» En 1868, d'Omalius (*Précis de Géologie,* p. 604) donne une *Liste des fossiles des sables calcarifères de Bruxelles extraite d'un travail de MM. Nyst et Lehon.* Nous y voyons

(1) *Petref. Germaniæ,* pl. LXXVI.
(2) *Journal d'histoire naturelle de Bordeaux et du Sud-Ouest,* 1888.

figurer *O. virgata*, Goldf., avec *O. cariosa*, Desh., *O. flabellula*, Lk., et *O. gigantica*, Brander. Il n'est pas question de cette espèce dans le Tongrien.

» La même année (1868), Nyst nous remettait, pour notre *Prodrome d'une description géologique de la Belgique*, la liste des fossiles du système bruxellien et du Laekenien. Nous y voyons *Ostrea cymbula*, Lk. (*O. virgata*, Nyst), commune dans le Bruxellien. La liste des fossiles du Tongrien que Bosquet nous a fournie pour le même ouvrage ne renferme aucune indication relative à l'espèce qui nous occupe.

» Je crois devoir conclure que Goldfuss a réuni sous le nom d'*O. virgata* des échantillons éocènes provenant de Grez et des échantillons oligocènes de Tongres. Les premiers se rapportent à *O. cymbula*, Lk. Les seconds ne peuvent être que des jeunes d'*O. ventilabrum*. Le nom d'*O. virgata* doit être rayé de la nomenclature. »

En présence de cette note si documentée, je crois devoir adopter l'opinion de M. Dewalque; l'*O. virgata* du Tongrien de la Gironde devra donc porter un nom nouveau, à moins qu'on ne veuille la considérer comme une variété de l'*Ostrea cyathula*, Lk. A ce propos, je ferai remarquer qu'il existe deux formes assez distinctes parmi les huîtres à petites côtes de l'assise que je décris : une forme de petite taille (A) rappelant assez celle de l'*O. cyathula*, Lk., et une de plus grande taille (B) allant jusqu'à 70 millimètres de longueur avec côtes émoussées sur les côtés du test. Cette deuxième forme (B) est très différente de l'*O. cyathula*, Lk.; elle s'en distingue par son allongement antéro-postérieur, par son crochet allongé et son canal assez long, par le nombre des côtes, qui est supérieur. J'en possède de bons échantillons venant des environs de Port-Sainte-Foy; le Muséum d'histoire naturelle de Bordeaux en renferme aussi quelques-unes, surtout une assez typique, de Saint-André-du-Garn.

Quant à la première forme (A), c'est la plus fréquente et de beaucoup. Bien qu'assez variable d'aspect et de dimensions,

elle se distingue en général assez bien de l'*Ostrea cyathula,* Lk., par les caractères suivants : par sa valve gauche *moins excavée,* par sa longueur qui dépasse presque toujours sa largeur, quelquefois même d'un tiers; par ses plis plus fins, plus accentués, plus nombreux (1) que dans l'*O. cyathula;* par son crochet généralement plus long et plus déjeté en arrière. Je crois donc qu'il y a lieu de considérer cette forme comme une espèce nouvelle ou en tous cas comme une variété très spéciale de l'*O. cyathula.* Le nom de *girondica* lui conviendrait parfaitement. Un ou deux échantillons venant du Mont-Aigu, près Libourne, forment cependant la transition entre l'*O. cyathula,* Lk., de Montmartre et du Mont-Valérien, et l'*O. girondica* des argiles à Huîtres de la Gironde (2).

J'ajouterai que j'ai pu comparer les espèces de la Gironde avec des échantillons d'*Ostrea ventilabrum,* Goldf., de diverses tailles qui m'ont été gracieusement envoyés par M. Mourlon, et que l'espèce girondine est très différente de l'espèce si développée dans les couches tongriennes de Belgique. Par contre, l'espèce que M. Benoist a indiquée au Meynieu, près Vertheuil, sous le nom d'*O. medulensis,* me paraît n'être

---

(1) Le nombre des plis est variable; beaucoup en ont environ 40; d'autres, comme certains échantillons venant d'Haux et intercalés dans la collection Benoist au Muséum de Bordeaux, dépassent certainement 50. MM. Raulin et Delbos indiquent 45-50 plis.

Chez les *O. cyathula,* Lk. que j'ai vues, le nombre des côtes ne dépasse guère 20-25.

(2) A ce sujet je ferai remarquer que M. Mayer-Eymar (*Bull. Soc. géol.,* 3e série, t. XXI, p. 21 et suiv.) indique comme variété méridionale de l'*O. cyathula,* l'*Ostrea fimbriata,* Grat., qui s'en distinguerait par ses côtes plus nombreuses, étroites et élevées et plus ou moins crénelées. Peut-être s'agit-il ici de celle que j'appelle *girondica,* mais je ne crois pas devoir cependant modifier le nom que je lui donne, car *O. fimbriata,* Grat., n'a jamais été publiée que je sache et se rapporte, d'après M. Raulin et Delbos (*loc. cit.*), à une espèce qu'ils ne citent qu'à l'Herté, près Gonsse (Landes), et à la Rouquette (Dordogne). Cette espèce aurait 60 plis environ. Du reste rien n'est plus difficile à déterminer que ce groupe du genre *Ostrea.* Lorsqu'on suit avec soin les espèces désignées sous le nom d'*O. cyathula,* Lk., *O. virgata,* R. et D., *O. producta,* R. et D., *O. digitalina,* Eichw., on se heurte à des difficultés extrêmes, et c'est plutôt le niveau stratigraphique que les caractères paléontologiques qui détermine le choix de la dénomination adoptée.

qu'une variété de l'*O. ventilabrum,* dont elle a tous les caractères, sauf la taille; l'espèce belge est en effet plus grande.

Pour terminer ce qui a trait à la faune des argiles à Huîtres, j'ajouterai que le Muséum de Bordeaux possède un échantillon d'*Ostrea* de grande taille, de forme généralement arrondie, sauf vers le crochet où la coquille se rétrécit légèrement. Cette forme, qui rappelle jusqu'à un certain point l'*Ostrea callifera,* Lamk., si abondante à la base des couches tongriennes dans le bassin de Mayence, provient de Dernaucos, commune de Saint-Sulpice-de-Guilleragues. Enfin, on rencontre encore dans les argiles à Huîtres des Anomies de petite taille qui sont probablement différentes de celles des couches à Anomies qui font le passage entre l'Éocène et le Tongrien et que l'on désigne généralement sous le nom d'*Anomia girondica,* Math.

4° Calcaire à Astéries.

Le calcaire à Astéries est l'assise la plus importante du Tongrien dans la région; c'est celle que je me propose d'étudier ici avec le plus de détails.

Cette formation a attiré l'attention de tous ceux qui se sont occupés de la géologie du Sud-Ouest. D'abord assimilé par tous les anciens auteurs, Brongniart, Deshayes, Des Moulins (1), au calcaire grossier éocène des environs de Paris, le calcaire à Astéries, connu depuis Jouannet (2) sous le nom de *calcaire de Bourg,* fut longtemps confondu avec les calcaires marins plus inférieurs des environs de Blaye. C'est Des Moulins qui, le premier, établit la séparation du calcaire de Bourg de celui de Blaye (3). Dufrénoy (4), qui s'est servi des listes de fossiles

(1) Pour ce qui concerne l'historique de cette question, on peut consulter Delbos, *Recherches sur l'âge de la formation d'eau douce sur la partie orientale du bassin de la Gironde*. Paris, 1847.

(2) *Actes Soc. Linn. Bordeaux,* t. IV, p. 171 et suiv., 1830.

(3) Delbos, *loc. cit.*

(4) *Mémoires pour servir à la description géologique de la France,* t. III, 1836.

communiquées par Des Moulins, fait encore la même erreur que ses devanciers, et cependant il donne, d'une part, la liste des fossiles du calcaire grossier de Blaye et Plassac et de la rive gauche de la Gironde depuis Pauillac jusqu'à la mer, et, d'autre part, celle des fossiles du calcaire grossier de Saint-Macaire, Langon et Virelade. Loin d'être frappé des dissemblances de faune, il cite à Langon le *Cerithium giganteum*, le *Cerithium lapidum*, ce qui était une erreur, et conclut à l'analogie avec le calcaire grossier de Paris.

Néanmoins, l'opinion consistant à séparer le calcaire de Bourg de celui de Blaye fut bientôt adoptée par tout le monde, et notamment par de Collegno dans sa classification des terrains tertiaires du département de la Gironde (1843); mais ce dernier auteur eut le tort de le considérer comme inférieur à la Mollasse du Fronsadais.

Delbos, dans son travail si remarquable sur les formations d'eau douce de la partie orientale du bassin de la Gironde, le décrit avec soin, et, frappé de l'abondance des osselets d'*Asterias (Crenaster) levis*, Des M., qu'il renferme parfois, il lui donne le nom de *calcaire à Astéries*, qu'il a conservé jusqu'à nos jours. Il établit sa position sur la Mollasse du Fronsadais, partout où on le rencontre, et tout en le maintenant, au moins provisoirement, dans l'Éocène, comme ses prédécesseurs Dufrénoy et de Collegno, il est frappé des rapprochements que l'on peut établir entre la faune du calcaire à Astéries et celle des marnes supérieures au gypse dans le bassin de Paris (marnes jaunes à *Cyrena convexa*, marnes à Huîtres), c'est-à-dire des couches que l'on place maintenant à la base de l'Oligocène. Il indique même que le calcaire à Astéries présente déjà des fossiles des faluns.

M. Raulin, dans sa thèse (1) et en général dans tous les travaux sur la région qui ont suivi, crut devoir faire une distinction entre le calcaire de Bourg, qu'il considère comme éocène,

(1) *Nouvel Essai d'une classification des terrains tertiaires de l'Aquitaine*, 1848.

et le calcaire de Saint-Macaire, qu'il regarde comme miocène. Cette opinion a été combattue par Delbos, par Tournouër, par M. Matheron et par M. Linder (1). Ces auteurs ont démontré l'identité des deux formations et ont établi le synchronisme du calcaire à Astéries avec les assises tongriennes du bassin de Paris notamment.

Le Calcaire à Astéries s'étend depuis le Médoc jusqu'à l'extrémité orientale du département de la Gironde, qu'il ne dépasse guère (2). Peu développé dans le Médoc et dans le Blayais, il forme en général le faîte des coteaux qui dominent la Dordogne depuis son embouchure dans la Gironde jusqu'au delà de Sainte-Foy-la-Grande; il recouvre presque tous les sommets de l'Entre-deux-Mers, et forme par conséquent les falaises qui dominent la Garonne sur sa rive droite, excepté toutefois entre Cadillac et Langon, où il est remplacé par les assises de l'Aquitanien; sur la rive gauche du fleuve, on le rencontre sous la ville de Bordeaux et vers l'embouchure de toutes les vallées du Bordelais; enfin, il constitue le soubassement de toutes les formations du Bazadais (3).

Ainsi développé, le calcaire à Astéries se présente avec des épaisseurs extrêmement variables, allant depuis quelques mètres ou même moins, jusqu'à plus de 60 mètres. Sur les coteaux de la rive droite de la Dordogne, il est en effet rudimentaire, et cela par suite des ablations, des érosions qu'il a subies, tandis qu'il peut acquérir 48 mètres d'épaisseur à Lormont, 60 aux environs de Langoiran, de Saint-Seurin-de Bourg, etc. (4).

Bien qu'il soit très variable dans sa constitution lithologique, il est exploité partout, soit pour la construction, soit pour la fabrication de la chaux. On peut voir ces grandes exploitations

(1) Voyez notamment Linder, *Actes Soc. Linn. de Bordeaux*, t. XXVI, p. 624, et t. XXI, p. LXII et suiv., et Tournouër, *Bull. Soc. Géol.*, 2e série, t. XIX.

(2) D'après Tournouër il se termine en coin à Beaupuy (Lot-et-Garonne) dans les Mollasses inférieures de l'Agenais.

(3) Voyez surtout Degrange-Touzin, *Notes sur le Bazadais.*, in *Actes Soc. Linn. de Bordeaux*, t. XLII, 1888.

(4) Linder, *Actes Soc. Linn.*, t. XXIX, p. LXII et suiv.

notamment à Bourg, Saint-Émilion, Cenon, La Tresne, Citon-Cenac, Langoiran, Langon, Saint-Macaire, Saint-Morillon, etc. Anciennement, il constituait la seule pierre à bâtir employée à Bordeaux et dans la région, mais une pierre souvent peu résistante, se délitant très facilement à l'air; on lui préfère de beaucoup celle d'Angoulême qui appartient aux assises de l'Angoumien à *Radiolites lombricalis*, d'Orb. (Crétacé supérieur).

J'ai dit que sa constitution lithologique était très variable. En effet, il est tantôt assez compact, comme on le voit dans certains points (Saint-Morillon, Saint-Macaire), tantôt grumeleux (Cenon), tantôt crayeux, tantôt argileux ou sableux, quelquefois d'aspect mollassique comme cela peut se constater dans les couches supérieures aux environs de Langon, de Monségur et dans le Bazadais. Il peut présenter des bancs bien réglés (Langoiran, par exemple), ou bien des lits très irréguliers. Souvent il est entremêlé d'assises argileuses ou marneuses, quelquefois même plus ou moins ligniteuses.

Pour se donner une idée de la variabilité des aspects du calcaire à Astéries et des difficultés que l'on éprouve lorsqu'on veut le diviser en niveaux stratigraphiques distincts, il suffit de visiter les carrières de Cenon. Dans la carrière Roussange, appartenant aujourd'hui à M. Rüédy et située sur la route de Paris au bas de la côte, on voit d'abord, à la base, une série de marnes plus ou moins dures, grises, sans fossiles, surmontées d'un banc argileux vert peu épais. Au-dessus viennent de nouvelles marnes dures, remplies de Polypiers, à peu près identiques aux précédentes, lesquelles sont recouvertes par une couche brunâtre ou noirâtre feuilletée de quelques centimètres d'épaisseur; cette nouvelle couche contient de nombreuses particules charbonneuses et renferme des débris de Polypiers analogues aux précédents, de Bivalves *(Anomia, Cytherea?)* et de Gastéropodes indéterminables.

Cet ensemble constitue un système inférieur qui est recouvert par une série de marnes grisâtres ou blanchâtres avec lits noirâtres intercalés. On y trouve le *Goniocardium Matheroni*,

Desh., et des Milioles extrêmement abondantes. Enfin, tout le haut de la carrière est occupé par un calcaire jaunâtre se délitant très facilement, pétri de fossiles soit à l'état de moules intérieurs, soit à l'état d'empreintes. Nous y avons surtout observé *Turbo Parkinsoni*, Bast., *Cardita Benoisti*, Tourn., *Goniocardium Matheroni*, Desh., des *Melobesia*, des fragments de côtes d'*Halitherium*, etc.

Si on passe maintenant à la grande carrière, en ce moment abandonnée, qui est située un peu plus à l'est en allant vers Cenon, on s'aperçoit de suite qu'il est très difficile, sinon impossible, de paralléliser exactement les couches qu'on y rencontre avec celles de la carrière précédente. En haut, ce sont bien les calcaires jaunâtres typiques, en bancs plus ou moins compacts ou plus ou moins grumeleux, du calcaire à Astéries, avec côtes d'*Halitherium*, *Scutella striatula*, M. de Serres, *Trochus submonilifer*, d'Orb., *Lithodomus gaasensis*, May., *Venus Aglauræ*, Brong., et nombreux polypiers, etc., à l'état de moules intérieurs généralement, le tout ayant environ 12-15 mètres d'épaisseur et rappelant tout le système supérieur de la carrière Roussange. Au-dessous vient une série d'argiles grises, charbonneuses, en feuillets de $1^{m},50$ à 2 mètres d'épaisseur totale, avec banc de calcaire peu épais intercalé. Dans ces couches charbonneuses, nous avons trouvé de nombreux débris de coquilles, surtout des *Pecten*, des opercules de *Turbo* et, ce qui est intéressant, le *Pectunculus angusticostatus*, Lk., avec le test. Ces couches surmontent de nouveaux calcaires jaunes, grumeleux, analogues aux précédents, avec *Turbo Parkinsoni*, Bast., *Venus Aglauræ*, Brong., *Melobosia*, etc., recouvrant tous un système de marnes dures pétries de Milioles, dont ils sont séparés par un nouveau lit plus ou moins charbonneux.

On ne voit pas dans cette carrière les couches plus inférieures.

J'ai dit plus haut que l'on ne pouvait paralléliser exactement les assises d'une carrière à l'autre; il est tout aussi difficile de retrouver, dans les coupes visibles actuellement, la reproduc-

tion exacte de la section donnée autrefois par M. Benoist (1). Ce dernier avait cru alors devoir rapporter les couches argileuses inférieures de Cenon au Calcaire de Saint-Estèphe (Éocène supérieur); plus tard (2), il les plaça dans le Tongrien, en considérant comme appartenant au calcaire de Castillon et de Civrac la partie supérieure d'un banc d'argile verte à nodules calcaires placée au bas d'une des carrières, et dans laquelle il avait trouvé *une Bythinia* et quelques Potamides. Je n'ai point retrouvé cette couche dans les explorations que j'ai faites dernièrement; mais je possède des échantillons de cette argile ramassés antérieurement, avec nombreux débris de Cérithes indéterminables. En regardant attentivement cette argile, on peut y voir des Milioles, ce qui fait que je ne puis l'assimiler au calcaire de Castillon et de Civrac, qui est d'eau douce (3). Je n'ai observé, jusqu'ici du moins, à la base des carrières de Cenon, aucun fait qui me permette d'indiquer cette assise en ces points, comme M. Linder a cru devoir l'admettre (4).

Il est probable que l'argile verte en question n'est qu'un accident dans une série d'argiles qui représentent d'une façon très vraisemblable les couches à *Ostrea longirostris* et *girondica,* qui existent un peu partout à la base du calcaire à Astéries, et qui manquent à la base des coteaux de Cenon (5). Il est naturel de penser que ces argiles de la base du coteau de Cenon correspondent aux argiles vertes à concrétions blanches et aux argiles à Foraminifères que j'ai signalées, avec M. Croizier, à la base du calcaire à Astéries de Bourdieu (coupe prise entre Fronsac et Roulet, assises *e* et *f* (6), et qui semblent passer latéralement aux argiles à *Ostrea* cf. *cyathula,* situées au-dessous de Roulet

(1) *Actes Soc. Linn.,* t. XXXI, p. L, 1877.
(2) *Ibid.,* t. XXXV, p. I, 1881.
(3) J'ai également un échantillon identique aux précédents, mais sans concrétions calcaires, qui contient un bel exemplaire d'*Anomia* avec de très nombreuses Milioles.
(4) Carte géologique détaillée de la France, feuille de Bordeaux.
(5) Du moins je ne les y ai jamais vues; le Muséum de Bordeaux contient cependant quelques échantillons d'*Ostra girondica* avec l'étiquette Cenon.
(6) *Procès-verbaux Soc. Linn. Bordeaux,* t. XL, p. LVI, 1886.

(même coupe, *h'*). Elles doivent également correspondre aux argiles à Milioles que M. Reyt a indiquées aux environs de Saint-Aubin-de-Blagnac, et où il a déjà rencontré l'*Ostrea longirostris* (1), espèce si remarquable dans cette localité.

Si on fait abstraction des couches argileuses inférieures, si difficiles à classer (2), on peut dire que l'on voit à la base du calcaire à Astéries des assises plus ou moins marneuses à Miliolites, Polypiers, *Goniocardium Matheroni,* avec lits charbonneux intercalés, surmontées de couches calcaires jaunâtres, grumeleuses ou compactes, présentant alors le faciès typique avec la faune nombreuse et caractéristique de l'étage. C'est vers le haut des carrières qu'on a rencontré les *Nummulites vasca-ramondiformis, Boucheri, intermedia,* indiquées par M. Benoist (3). Elles seraient encore surmontées de bancs analogues aux précédents, et quant à la partie tout à fait supérieure du calcaire à Astéries, c'est plutôt du côté de Langon et du Bazadais qu'il faudrait surtout la rechercher.

En l'examinant dans les exploitations que l'on rencontre au delà du pont de Langon, sur la rive droite de la Garonne, on voit les assises supérieures formées d'une infinité de débris de Bryozoaires et de Bivalves, surtout de coquilles de Cardites (peut-être *Cardita Basteroti* Desh.) (4). Il a donc un aspect très différent de son type, et il semble passer insensiblement à des couches d'aspect mollassique que l'on voit à Violle, Verdelais, Saint-Macaire (5) et à Monségur, comme aussi dans le Bazadais (château de Budos, par exemple). Au-dessus viennent déjà des dépôts argileux où on a signalé dans plusieurs points des *Ostrea producta*? R. et D., et qui forment évidemment le passage avec la Mollasse inférieure de l'Agenais,

(1) *Ibid.*, t. XLII, p. LXXVI, 1890.

(2) D'après les indications que m'a fournies M. Billiot sur les sondages de la Bastide, ces argiles seraient supérieures à la Mollasse du Fronsadais.

(3) *Procès-verbaux Soc. Linn.*, séance du 2 mars 1887.

(4) Cette espèce est identique à la *Cardita Bazini,* Desh., des sables d'Ormoy. C'est aussi l'avis de M. Mayer-Eymar.

(5) Voyez Linder, *Actes Soc. Linn.,* t. XXVII, p. 500.

dont je ne parlerai pas ici [1]. Il est possible qu'il faille faire de toute cette partie supérieure du calcaire à Astéries une division à part, comme me l'écrivait M. Mayer-Eymar [2]; mais je ne sais pas encore où il faudrait placer la ligne de séparation entre les deux assises [3].

Faune du Calcaire à Astéries (faciès typique).

Malgré ces variations, la faune du calcaire à Astéries typique semble assez uniforme ; j'en donne ici un aperçu bien imparfait. Comme les fossiles y sont toujours à l'état de moules ou d'empreintes, sauf les Vertébrés, les Crustacés, quelques Bivalves *(Ostrea, Pecten)* et les Échinodermes, les déterminations sont souvent impossibles ou très approximatives, et il en résulte que, bien que fort riche, c'est une des faunes les plus mal connues de nos terrains tertiaires [4]. La liste ci-jointe a été

(1) Dans le département de la Gironde les couches que l'on peut rapporter à la Mollasse inférieure de l'Agenais reposent sur le calcaire à Astéries.

(2) M. Mayer vient de publier les idées qu'il m'avait exprimées, dans le *Bull. Soc. Géol.*, 3e série, t. XXI, p. 24. (Note ajoutée au moment de l'impression.) Il désigne ce sous-étage comprenant la partie supérieure du calcaire à Astéries sous le nom de *Langonin.*

(3) Certains fossiles, comme *Neritina Ferussaci*, Recluz, *Cerithium plicatum*, Brug., espèces qui abondent dans l'Aquitanien girondin, se trouveraient sur plusieurs points dans les couches supérieures du calcaire à Astéries. M. Mayer-Eymar cite aussi comme caractéristiques des couches supérieures, *Cerithium Charpentieri, Turritella Desmaresti, Cerithium calculosum, Lucina columbella, Lucina incrassata* et quelques autres espèces d'âge plus particulièrement miocène, telles que *Protoma cathedralis, Xenophora Deshayesi*, etc., que je n'y ai pas vues jusqu'ici au moins d'une façon déterminable. (Voyez *Bull. Soc. Géol.*, 3e série, t. XXI, p. 24.) Je dirai à ce sujet que j'ai trouvé la petite variété de *Lucina columbella* à Larrat (Gaas) et que le *Cerithium Charpentieri* ne me paraît pas cantonné dans les assises tout à fait supérieures, puisqu'il existe à Terre-Nègre. Quant au *Cerithium calculosum*, il est surtout abondant dans l'Aquitanien, mais il existe à Terre-Nègre, niveau qui semble assez inférieur, et dans les marnes bleues de Gaas. *Turritella Desmaresti*, indiquée aussi par M. Mayer-Eymar, est un fossile aquitanien et viendrait à l'appui de sa thèse. Les affinités de la faune de l'assise supérieure avec l'Aquitanien seraient évidemment le meilleur argument à faire valoir pour diviser le calcaire à Astéries en deux assises distinctes.

(4) J'étudierai dans un autre chapitre les faunes de quelques assises argileuses où tous les fossiles se trouvent avec le test; ce sont de beaucoup les plus intéressantes.

dressée surtout d'après les échantillons déposés au Muséum de Bordeaux et à la Faculté des Sciences :

Vertébrés.

Rhinocéros. Un fragment de mâchoire étiqueté *Rh. leptorhinus* (!), et qui est probablement celui qui a été mentionné par Delfortrie [1] sous le nom plus vraisemblable d'*Aceratherium incisivum*. Monségur.

Un fragment de mâchoire portant le nom de *Rh. megarhinus*, de Saint-Sulpice-de-Guilleragues.

Un fragment de mâchoire déterminé par Lartet comme étant le *Badactherium latidens*, Croizet.

Des dents provenant de Bourg et de Cubzac et un germe de dent de Sainte-Gemme, déterminé par M. Gaudry comme appartenant au genre *Rhinocéros*.

Anthracotherium magnum, Cuv. Dents. Saint-Sulpice-de-Guilleragues.

— *minimum*, n. sp. Dents. Pellegrue.

Hyopotamus leptorhynchus, Ag. Dent. Saint-Ferme.

— *bovinus*, Owen. Deux dents. Saint-Sulpice-de-Guilleragues.

Paloplotherium, sp.? Dents provenant de Sainte-Gemme et de Monségur.

Dremotherium, sp.? Fragment de mâchoire déterminé par M. Gaudry et provenant de Saint-Ferme.

Halitherium Cuvieri, Kaup. Fragments de mâchoires ou dents provenant de Monségur, Béguey, Saint-Sulpice-de-Guilleragues, Saint-Aubin-de-Blagnac (la Hage), Saint-Macaire, Saint-Germain-du-Puch, La Tresne, Saint-Ferme, etc. ; un grand nombre de côtes, provenant de Monségur, Saint-Sulpice-de-Guilleragues, Cenon ; des vertèbres, de Bourg, Cérons, Rauzan, Monségur, Saint-Sulpice-de-Guilleragues ; des os des membres, de Saint-Émilion, Rauzan, Saint-Sulpice, et parmi eux un fémur sur lequel M. Flot a attiré tout particulièrement l'attention [2].

---

[1] Je fais les plus expresses réserves au sujet des déterminations de ces Vertébrés terrestres, qui auraient besoin d'être revisées avec soin, comme aussi au sujet de leur gisement. Tous les échantillons que je cite viennent de la collection Delfortrie, déposée au Muséum de Bordeaux ; ils portent tous la mention *Calcaire à Astéries* sans aucune indication de niveau. Je n'ai de renseignements à ce sujet que sur un seul, le *Badactherium latidens*, qui proviendrait d'une couche sableuse à *Ostrea* et *Trionyx*, reposant sur le calcaire à Astéries. Il s'agit probablement là de couches qui font le passage avec la Mollasse inférieure de l'Agenais dans laquelle il faut peut-être les ranger. Quant aux autres échantillons, un ou deux semblent avoir une gangue qui peut être du calcaire à Astéries ; les autres sont complètement détachés. (Voyez, du reste, Delfortrie, *Actes Soc. Lin.*, t. XXVI, p. 104, 1866, et Tournouër, *C. R. Acad. Sc.*, 1865, qui cite une partie de ces Vertébrés.)

[2] M. Flot rapporte à *H. Schinzi* ce fémur, qui provient de Saint-Sulpice-de-Guilleragues et qui avait été pris par Delfortrie pour un os pénial.

Halitherium Guettardi, Gerv. Dent venant de Langoiran (1).
Trionyx? de grande taille. Carapace provenant de Saint-Vivien de Monségur.
Carcharodon productus?, Ag. Dents provenant de Bourg.
— *angustidens,* Ag. Dents provenant de Bourg, Barsac, de Bordeaux (gare du Midi).
— *megalodon,* ? Ag. Bourg.
— *etruscus* ? Rauzan, Saint-Germain-du-Puch.
Galeocerdo latidens, Ag. Dents, Monségur.
— *aduncus,* Ag. Dents, Monségur.
Notidanus, Hemipristis, Oxyrhina, Lamna. Dents, Monségur.
Gymnodus, Sphenodus, Sphyrna, etc.

Crustacés.

Palæocarpilius aquitanicus, A. Edw. Espèce assez commune provenant de Béguey, La Lustre (Tauriac), Saint-Émilion (Pavie), Quinsac, Cenon, Marcamps, Saint-Sulpice-de-Guilleragues, Sainte-Gemme, Saint-Germain-du-Puch, Roquebrune, Monségur, Montignac.
Neptunus, sp. ind. Magnifiques échantillons venant de Monségur.
Lambrus priscus, A. Edw. Sainte-Gemme.
Lambrus, n. sp. Audrand (Monségur).
Oxyrhynchus, sp.
Portunus, n. sp. Monségur.
Xanthopsis. Monségur, Saint-Sulpice-de-Guilleragues.
Syphax, n. sp. Monségur.
Calappa restricta, A. Edw. Cenon.
Anaglyptus Delfortriei, A. Edw. Monségur.

Cette faune carcinologique, étudiée par M. Milne-Edwards, est remarquablement riche.

Mollusques (2).

Aturia Basteroti, Ben. Type figuré : Monségur; autres localités : Saint-Maixant, Rions, La Réole, C.D.
Scaphander cenonensis, Ben. (in coll.) Cenon, C.B.

---

(1) Delfortrie en signale deux crânes à Monségur.
Pour tout ce qui a trait aux Siréniens, voy. Delfortrie, *Actes Soc. Lin.*, t. XXVIII, 1871.
(2) C.B. signifie collection Benoist; C.D., collection départementale, toutes deux au Muséum de Bordeaux; C.F., collection de la Faculté des Sciences.
L'astérisque indique la présence des espèces dans les environs de Dax, (couches de Gaas).

Cylichna Ferussaci, Ben. (in coll.). Cenon, Bourg, C.B.
Acera aquitanica, Ben. (in coll.). Cenon.
* *Conus,* sp. ind. (*C. Grateloupi* ?, d'Orb.). Cenon, Langoiran, Barsac, C.D.
Marginella subovulata, Ben. (in coll.). Rigalet, C.B.
* *Volutilithes subambigua,* d'Orb. Puisseguin, C.D.
* *Cynodonta subpugillaris,* d'Orb. Loc. inc., C.B.
Turbinella ?, ind. de grande taille. Terre-Nègre, Beguey, C.D.
Fusus ?, ind. Monségur, Beguey, Verdelais, C.D.
Cassis, sp. ind. (cf. *mamillaris,* Grat.). Cenon, Cadillac, Saint-Macaire, C.D.
Typhis intermedius, Bell. Bourg, C.B.
Cypraea, sp. ind. Cenon, C.D.
* *Cerithium Charpentieri,* Bast. Langoiran, Floirac, C.D.
* — *plicatum,* Brug. Loc. inc., C.D.
* — *bidentatum,* Grat. Cenon, C.B.
* — *subterebellum,* d'Orb. = *terebellum,* Grat., Vertheuil, C.B. (1).
* *Diastoma Grateloupi,* d'Orb., diverses localités, C.D.
* *Turritella strangulata,* Grat. ? Floirac, C.D.
Rissoina, sp. ind. Bourg, C.B.
Calyptraea, sp. ind. Cenon, Beguey, C.B. et C.D.
Hipponyx, sp. ind. Sans loc., C.D.
Xenophora, sp. ind. Blanquefort, Rimons, Marcamps, C.D.
* *Natica retusa,* May. Bourg, Cenon, C.B.
* *Ampullina (Megatylotus) crassatina,* Desh. Bourg, Cenon, Roque-de-Tau, Sainte-Gemme, Langoiran, Saint-Macaire, etc. (toutes les collections).
Natica, sp. ind. (N. *compressa* ?, Bast.).
* *Deshayesia neritoides,* d'Orb. = *Naticella neritoides,* Grat. Cenon, C.B.
Eulima, sp. ind. Bourg, C.B.
Phasianella, sp. ind. Cenon, Bourg, C.B.
— sp. ind. (plus petite). Cenon, C.B.
* *Turbo Parkinsoni,* Bast. Toutes les localités et toutes les collections.
* *Trochus submonilifer,* d'Orb. Cenon, Bourg, C.B.
* — *elegantissimus,* d'Orb. (*elegans,* Grat.). Saillans, Monségur, Cenon, C.D., C.B.
* *Delphinula hellica,* d'Orb. Cenon, C.B.
Fissurella, sp. ind. Bourg, C.B.
Gastrochaena Dufrenoyi, Ben., type figuré. Cenon, C.B.
Teredo Artiguei, Ben., type figuré. Cenon, Bourg, C.B.
Cultellus cenonensis, Ben., type figuré. Cenon, C.B.
Clavagella cenonensis, Ben., type figuré. Cenon, C.D., C.B.

---

(1) Il y a lieu d'ajouter très probablement à ces Cérites quelques autres espèces telles que *C. calculosum,* Bast.; *C. gibberosum,* Grat.

Solecurtus tenuistriatus, Ben., type figuré. Cenon, C.B.
Septaria primigenia, Ben., type figuré. Cérons, C.D. et C.B.
Panopaea mucronata, Ben. (in coll.). Saint-Macaire, Langoiran, C.D. et C.B.
Pholadomya Puschi, Goldf. Monségur, C.B.
Psammobia Phillipi, Ben. (in coll.). Floirac, C.B.
Tellina Grateloupi, (Ben. in coll.). Cenon, C.B.
— *Basteroti*, Desh. Cenon, C.B.
* *Cardium aquitanicum*, May. Saint-Émilion, C.B.
Chama, sp. ind. Bourg, C.B.
* *Goniocardium Matheroni*, Desh. Cenon, Saillans, C.B.
Lucina Delbosi, d'Orb. Cenon, Bourg, Le Haillan, Saint-Morillon, Saint-Germain-du-Puch, C.B., C.D.
* *Venus Aglaurae*, Brong. Bouliac, Cenon, C.F. et C.D.
Crassatella cf. *tumida* (1), Lamk. Cenon, Floirac, C.D. et C.B.; Paillet, C.F.
Cardita Benoisti, Tourn. Cenon.
Arca scabrosa, Nyst. Cenon, C.B.
Mytilus, sp. ind. Bourg, Camiran, C.B., C.D.
Modiola (Lithodomus?) cordata, Lk. Cadillac, C.D.
* *Lithodomus gaasensis*, May. Cadillac, Cenon, Saint-Émilion (Pavie), C.D.
Pinna, sp. ind. Loc.? C.D.
Vulsella, sp. ind. Cenon, C.B.
Pecten Billaudeli, Des M. (avec le test). Cenon et autres localités, C.B., C.D.
Pecten sp., diverses formes avec test. Cenon, La Tresne, Bourg, C.B.
* *Lima garansiana*, May. Cenon, C.B.; Bourg, C.D.
* — *aquensis*, May. Bourg, C.B.
Spondylus, sp. ind. Bourg, C.B.
Anomia girondica, Math. Le Tremble, C.B.
— *striata*, Brocchi (?). Bouliac, C.B.
Ostrea (girondica), n. sp. Monségur, Saint-Albert, C.D.
* — *rudicula*, Raul. et Delb. Monségur, Saint-Albert, C.B., C.D.
— sp. (cf. *rudicula*, R. et D.). Saint-André-du-Garn, C.D.
— *vulsellaeformis* (Ben. in coll.). Saint-Émilion, C.B.
* — *Martinsii*, d'Arch. Baron, C.B.; Bourg, C.D.

Échinodermes.

Scutella striatula, M. de Serres. Toutes les localités et toutes les collections.
Amphiope Agassizi, Des M. Sainte-Gemme (plaque avec nombreux exemplaires), Gennas, près Pellegrue, C.D.

---

(1) C'est probablement celle que M. Benoist appelle *pseudotumida*, in *Descr. Saint-Estèphe et Vertheuil*, p. 49.

* *Echinolampas Blainvillei,* Ag. Le Haillan, Saint-Émilion (Pavie), C.D.; Quinsac, Haux, C.F.
— sp. Camiran, C.D.
* *Echinocyamus piriformis,* Ag. Saint-Émilion (Pavie), La Rivière, C.D., Cenon, Bouliac, C.F.
Brissus dilatatus, Desor. Rions, coll. Des Moulins; Barade (com. de Doulezon), coll. Des Moulins; La Tresne (Tournouër).
* *Periaster Arnaudi,* Tourn. Lormont, coll. Des Moulins; Saint-Michel près Libourne (Tournouër).
Agassizia Souverbiei, Cott. Saint-Émilion (Pavie), C.D.; Saint-Michel près Libourne (Tournouër).
Nucleolites Delfortriei, Cott. Saint-Émilion, C.D.; Monségur (Tournouër).
Echinarachnius? porpita, Des M.; Bouliac, Cambes, coll. Des Moulins.
Schizaster, sp. Cenon? coll. Des Moulins.
Cœlopleurus Delbosi, Desor. Saint-Émilion (Pavie), Roque-de-Tau, C.D.

Tournouër cite en outre [1]:

Hemiaster cor., Desor. Bourg, coll. Muséum Paris.
Periaster burdigalensis, Tourn. La Souys, coll. Tournouër.
Euspatangus Jouanneti, Cott. Terre-Nègre, coll. Des Moulins; Quinsac (Tournouër).
— *Tournouëri,* Cott. Roque-de-Tau (Tournouër).
Crenaster lævis, Des M. Nombreuses localités (toutes les collections.)

Polypiers.

Nombreux échantillons, non déterminés, provenant de toutes les localités (toutes les collections).

Foraminifères.

* *Nummulites intermedia,* d'Arch. Cenon?, Chemin d'Eysines (d'après M. Benoist), Madère, près Bordeaux [2]. Citée par Tournouër à Meilhan (Lot-et-Garonne).
— *vasca,* Joly et Leym. Cenon, chemin d'Eysines (d'ap. M. Benoist), Madère.
* — *Fichteli,* Micht. Cenon? chemin d'Eysines (d'après M. Benoist).
— *Boucheri,* de la H. Cenon, chemin d'Eysines (d'après M. Benoist).

---

[1] Échinodermes du calcaire à Astéries, *Actes Soc. Lin.,* t. XXVII.

[2] La présence des *N. intermedia* et *vasca* dans les couches situées entre Madère et Sarcignan, près Bordeaux, vient d'être découverte par un des étudiants de la Faculté des sciences, M. Pitard.

Amphistegina, sp. Cenon, etc.
Hemistegina, sp. Cenon, etc.

Telle est, résumée d'une façon bien imparfaite et forcément *très incomplète* (1), la faune du calcaire à Astéries à faciès typique. J'ai dit plus haut qu'une étude plus approfondie était rendue à peu près impossible par l'état de conservation des Mollusques, qui sont, à part de rares exceptions, sous forme de moules intérieurs ou d'empreintes. Pour arriver à les déterminer, il faudrait faire des moulages, ce qui est long et fastidieux et n'a point été fait d'une façon suivie, malgré les essais de M. Benoist.

Faciès argileux à fossiles bien conservés.

Cependant, dans les couches argileuses ou charbonneuses intercalées dans le calcaire, on trouve quelquefois, outre les *Pecten* et les *Ostrea*, des Mollusques bien conservés; ainsi, on peut citer à Cenon, d'après la collection Benoist, un Trochus avec test, *Trochus cenonensis*, Ben. in coll., espèce allongée, d'assez grande taille, qui proviendrait d'une des couches charbonneuses de la localité. Je n'ai pas retrouvé jusqu'ici cette espèce.

Le Muséum de Bordeaux possède aussi quelques fossiles avec le test donnés par M. Fayard et provenant de la côte de Pavie, à Saint-Émilion (2):

Turbo Parkinsoni, Bast.
Turbo modestus, Fuchs?.
Trochus, n. sp. (*cenonensis*, Ben.)
Pecten Billaudeli, Des M.
Ostrea girondica, n. sp.
Anomia, sp. ind.

(1) Voyez aussi pour la faune du calcaire à Astéries, Benoist, *Descr. géol. des comm. de Saint-Estèphe et Vertheuil*, p. 63.

(2) Dans une excursion récente, j'ai vainement cherché, avec M. Reyt, à retrouver ce niveau fossilifère; je n'ai pu rencontrer, dans une mince couche d'argile jaunâtre intercalée dans le calcaire à Astéries, au-dessous de Pavie, dans le versant qui regarde Saint-Émilion, que le *Pecten Billaudeli* et l'*Echinocyamus piriformis*.

Il faut ajouter comme trouvés dans la même localité quelques Échinides intéressants :

Scutella striatula, M. de Serres.
Scutellina ?.
Echinolampas Blainvillei, Ag.
Nucleolites Delefortriei, Cott.
Agassizia Souverbiei, Cott.
Cœlopleurus Delbosi, Des.
Echinocyamus piriformis, Ag.
Schizaster Des Moulinsi, Cott. (1).

Mais à côté de ces faits intéressants, assez rares du reste, il faut citer tout spécialement deux niveaux remarquables par la bonne conservation des fossiles *avec leur test :* les couches de Terre-Nègre et la zone fossilifère de Madère-Sarcignan, près Bordeaux.

Couches de Terre-Nègre.

L'assise la plus intéressante au point de vue de la belle conservation de la faune, dans le calcaire à Astéries, est sans contredit celle que l'on peut désigner sous le nom de couches de Terre-Nègre.

Ces couches, argileuses ou argilo-sableuses, ce qui leur a fait donner quelquefois le nom de *faluns,* tirent leur appellation d'un quartier de Bordeaux situé au nord-ouest de la ville, et elles s'étendent sur les parties de la commune de Caudéran placées au voisinage. Dans tous les sondages faits dans cette région pour les puits, pour les égouts, on ne tarde pas à rencontrer la couche susdite, à une petite profondeur, le plus souvent à quelques mètres au-dessous du sol sous un mince dépôt quaternaire, et on peut y recueillir un certain nombre d'espèces intéressantes, avec leur test parfaitement conservé.

---

(1) Cette espèce est indiquée par M. Cotteau comme appartenant à l'Éocène moyen. L'échantillon du Muséum de Bordeaux ne vient sûrement pas de ce niveau, puisqu'il est étiqueté Saint-Émilion (côte de Pavie).

Depuis Dufrénoy (1), qui a le premier, si je ne me trompe, signalé ces coquilles, d'après la liste des fossiles qui lui avait été communiquée par Des Moulins (2), les auteurs qui se sont occupés successivement de la faune du calcaire à Astéries, ont indiqué cette particularité, mais aucun que je sache n'a donné de liste détaillée des fossiles que l'on peut rencontrer dans les assises de Terre-Nègre. C'est cette lacune que je me propose de combler, grâce surtout aux collections du Muséum de Bordeaux placées sous ma direction. Auparavant, j'ajouterai quelques indications dues à M. Benoist (3). D'après cet auteur, la couche de Terre-Nègre, sous forme de sable très argileux, généralement bleu noirâtre aux environs du boulevard de Caudéran, reposerait dans ce quartier sur des calcaires argileux à Polypiers (d'après M. Benoist, *Cladocora manipulatum*, Edw. et H.) que l'on retrouve à Cenon. L'auteur y cite seulement *Pectunculus angusticostatus*, Lk., *Cardita Benoisti*, Tourn., *Turbo Parknsioni*, Bast., *Cerithium Charpentieri*, Bast. Dans les sondages de la rue de la Chartreuse, le sable coquillier serait jaunâtre et reposerait sur un sable calcarifère agglutiné blanc. On y rencontre les mêmes espèces qu'à Terre-Nègre; il cite en dehors d'elles *Turritella strangulata*, Grat., *Crassatella girondica*, Ben. (4).

Enfin, ces couches sableuses fossilifères seraient généralement recouvertes par des bancs de calcaire coquillier à *Scutella striatula*.

---

(1) *Mémoire sur les terrains tertiaires du bassin du Midi de la France*, p. 35, 1836.

(2) La liste publiée par Dufrénoy contient une vingtaine d'espèces « reconnues à Terre-Nègre, sous l'hôpital Richelieu et sous le jardin botanique ». Je ne la transcris pas ici parce que les déterminations sont en grande partie erronées ou de forme trop archaïque, si je puis ainsi dire.

(3) *Procès-verbaux Soc. Lin. Bord.*, t. XXXVI, p. xxv.

Voyez aussi Bial, *P.-v. Soc. Lin.*, t. XXXIX, p. XLII; dans un puits situé entre le cours Judaïque et la rue d'Arès, le falun de Terre-Nègre à *Delphinula scobina* serait à sept mètres de profondeur, au-dessous de cinq mètres de calcaire à Astéries.

(4) Dans la collection Benoist, *Crassatella girondica* est identique à celle que Tournouër a étiquetée *burdigalina*; c'est ce dernier nom qui doit être conservé.

Ces indications stratigraphiques posées, voici les détails paléontologiques que j'ai pu recueillir sur les assises de Terre-Nègre, en étudiant les fossiles déposés au Muséum et non déterminés jusqu'ici :

A. — *LISTE DES FOSSILES DES COUCHES DE TERRE-NÈGRE*
recueillis en 1873 dans un puits foré à Caudéran, 42, rue de Mexico.

* *Conus Grateloupi,* d'Orb.
* *Cypraea splendens*?, Grat.
* *Voluta subambigua,* d'Orb.
* *Semifusus æqualis,* Micht.
* *Cerithium Charpentieri,* Bast.
* — *calculosum,* Bast.
* — *bidentatum,* Grat.
— *submelanoides,* Micht.
* *Diastoma Grateloupi,* d'Orb.
* *Turritella strangulata,* Grat.
* *Turbo Parkinsoni,* Bast.
* *Trochus labarum,* Bast.
Trochus, sp. A. (cf. *Bucklandi*).
* *Delphinula scobina,* Brong. (Grat.).
* *Ampullina angustata,* Grat.
Cardita Omaliusi, Nyst.
Cardita Benoisti, Tourn.
Crassatella, sp. A.
Cytherea, sp. (cf. *erycina*), en débris.
* *Cytherea splendida,* Mer.
Tellina, sp. ind.
Pectunculus angusticostatus, Lk.
Scutella striatula?, M. de Serres.

B. — *LISTE DES FOSSILES DES COUCHES DE TERRE-NÈGRE*
recueillis à 7 mètres de profondeur au lieu dit Cardoze, commune de Caudéran, à l'angle de la rue Verte et du chemin de la Remonte (1880).

* *Cerithium Charpentieri,* Bast.
* *Turbo Parkinsoni,* Bast.
* *Delphinula scobina,* Grat.
Lucina Delbosi, d'Orb.
* *Cytherea splendida,* Mer.
Pectunculus angusticostatus, Lamk.
Echinolampas Blainvillei?, Ag., en débris.

C. — *LISTE DES FOSSILES DES COUCHES DE TERRE-NÈGRE*

recueillis route de Saint-Médard, en face du Parc-Bordelais, à 6 mètres de profondeur (1886).

Bulla, sp. ind.
Pleurotoma (cf. *recticosta*, Bell.).
* *Drillia crassinoda,* Des M.
* *Pollia Bellardii,* Ben. (in coll.)
Erato, sp. ind.
Eulima, sp. ind.
Rissoa bicarinata? (Ben. in coll.).
Rissoa, sp.
Rissoina aquensis, Grat.
— sp.
* *Cerithium calculosum,* Bast.
— *submelanoides,* Micht.
— *sublamellosum,* d'Orb. (C. *lamellosum,* var. α Bast.)?
* — *pullum,* May.
* — *rissoinoides,* May.
— cf. *subtrochleare,* d'Orb.
Triforis, sp. ind.
* *Turritella strangulata* (jeune), Grat.
* *Turbo Anthonii,* Grat., très commun.
* — *Parkinsoni,* Bast. (test et opercules).
— *modestus*?, Fuchs.
Trochus, sp. A (cf. *Bucklandi,* Bast.).
* *Delphinula hellica,* d'Orb.
* — *scobina,* Brong. (Grat.).
Cardium, sp. ind.
Cardita Omaliusi, Nyst.
— sp. ind.
* *Crassatella burdigalina,* Tourn., en débris.
* — sp. A.
* *Cytherea Sismondai*?. May.
Arca barbata, Lin.
Pectunculus angusticostatus, Lk.
Echinocyamus piriformis, Ag.
Polypiers.

En dehors de ces gisements, dont j'ai étudié la faune avec soin, on peut voir encore au Muséum de Bordeaux de beaux exemplaires de *Turbo Parkinsoni,* Bast., et de *Pectunculus angusticostatus,* Lamk., provenant d'un puits foré chez M. Bermond, boulevard de Caudéran, en 1868, et de grands échantillons de *Cerithium Charpentieri,* Bast.; ces Cérithes

ont été ramassés, lors du forage d'un puits en 1888, rue de Marseille, entre le cours Judaïque et le chemin d'Arès, par M. Cabanne, qui a aussi recueilli les espèces citées dans les listes B et C.

Je signalerai encore comme fossiles des couches de Terre-Nègre, en dehors des espèces précitées et sans indication précise de gisement (1) :

* *Bayania semidecussata,* Lk., C.B.
Rissoa turbinata (Ben. in coll.), C.B.
Calyptraea, sp. ind., C.B.
Cerithium (Bittium) sublima, d'Orb., C.B.
* *Trochus,* n. sp. (*turgidulus,* Brocc., in Bast.), C.D.
* *Trochus elegantissimus,* d'Orb. (*elegans,* Grat.), C.D.
Phasianella, sp. ind., C.B.
Fissurella, sp. ind., C.B.
Corbula longirostris, Desh., C.B.
— *subpisum,* d'Orb., C.B.
Venus Aglaurae (jeune), Brong., C.B.
* — *praecursor,* May., C.B.
* *Lucina columbella* jeune, Lk., C.B.
— *Heberti,* Desh. (étiquetée Bordeaux, sans localité), C.B.
Nucula, sp. ind., C.B. et C.D.
Limopsis aquitanica (Ben. in coll.), C.B. et C.D.
Crania abnormis, Defr., C.D.
Thecidea, sp. ind., C.D.

A cette liste, j'ajouterai *Ostrea subgigantea,* Raul. et Delb., espèce très intéressante, rappelant beaucoup *Ostrea gigantea,* de Biarritz (couches du Phare), trouvée à 6 mètres de profondeur dans le jardin de Saint-Bruno, d'après Des Moulins. Enfin, on peut citer de Terre-Nègre quelques Échinides :

Euspatangus Jouanneti, Cott. (2).
Runa decemfissa, Des M.
— *Comptoni,* Ag.

(1) Les espèces indiquées dans cette liste et dans celle de la faune typique du calcaire à Astéries ont été déterminées en partie par M. Benoist.

(2) Dans la collection de Des Moulins, déposée au Muséum de Bordeaux, je trouve un Échinide étiqueté *Euspatagus ornatus,* de Terre-Nègre. Il est probable que cette espèce n'est autre chose qu'*E. Jouanneti,* Cott. (Voyez à ce sujet Tournouër, *Recensement des Échinodermes du calcaire à Astéries, Actes Soc. Lin.,* t. XXVII, 1870.)

Echinarachnius ? porpita, Des M.
Echinolampas Blainvillei, Ag., var. *depressa*, Tourn.

Mais j'ignore si ces espèces viennent bien toutes de la couche coquillière elle-même. Il en serait ainsi cependant pour *Runa Comptoni*, *Echinolampas Blainvillei*.

Ces listes relatives à la faune de Terre-Nègre comprennent ensemble une soixantaine d'espèces, sans compter les Échinides, les Polypiers; on pourrait encore y ajouter un certain nombre de petites espèces de Gastéropodes et de Lamellibranches, trop minimes pour être déterminées. C'est donc une faune assez riche, en tous cas fort intéressante, et indiquant en général plutôt les couches inférieures du calcaire à Astéries, sans qu'on puisse l'assimiler comme niveau — *si tant est qu'il soit unique*, ce dont on peut douter en l'absence d'indications stratigraphiques précises. — à une zone déterminée de la coupe de Cenon, par exemple, comme on a tenté de le faire.

Couches de Madère-Sarcignan.

M. Benoist a signalé d'une façon très succincte (1) un niveau argileux fossilifère dans les carrières de Sarcignan, près du Pont-de-la-Maye. C'est, plus exactement, à droite de la route qui mène du moulin de Madère vers Sarcignan que l'on trouve ce gisement, ainsi que j'ai pu m'en assurer moi-même. Là, dans de grandes exploitations faites en vue de la fabrication de la chaux surtout, on voit le calcaire à Astéries typique avec côtes d'*Halitherium*, *Cerithium Charpentieri*, *Turbo Parkinsoni*, *Lucina Delbosi*, *Pectunculus angusticostatus*, le tout sous forme de moules ou d'empreintes, *Scutella striatula*, *Echinolampas Blainvillei*, etc., présenter à sa partie supérieure un petit niveau argileux, blanchâtre, dans lequel on rencontre une faune de coquilles bien conservées *avec le test*.

(1) *Procès-verbaux Soc. Lin. Bord.*, t. XLIV, p. XLIV.

M. Benoist y a cité une cinquantaine d'espèces *(loc. cit.)*. Nous en avons trouvé également une trentaine, M. Reyt et moi, dont plusieurs n'ont pas été indiquées par M. Benoist. Voici la liste approximative des espèces que nous avons recueillies :

* *Drillia crassinoda*, Des M.
Triforis, sp. ind.
Cerithium submelanoïdes, Micht. [1].
* — *pullum* ?, May.
* — *subtrochleare*, d'Orb.
* — *sublamellosum*, d'Orb. ? var.
* — *subangulosum*, d'Orb.
* — *rissoinoides*, May.
* *Diastoma Grateloupi*, d'Orb.
Rissoina (*R. elegans*, Grat. ?)
* *Turritella strangulata*, jeune? Grat. et deux autres espèces.
Natica, sp. ind.
Pyramidella (*P. striatella*, Grat. ?)
Phasianella (*Ph. spirata* ?, Grat.).
* *Turbo multicarinatus*, Grat.
Nombreux opercules de *Turbo*.
* *Delphinula scobina*, Grat.
Fissurella (*F. clypeata*, Grat. ?).
Dentalium, sp.
Corbula, sp. ind.
* *Cardium*, sp. ind.
— sp. (aff. *aquitanicum*, May).
Crassatella, sp. (espèce de Terre-Nègre).
Cardita Omaliusi ?, Nyst.
Lucina, sp. (cf. *aliformis*, Mayer).
* *Lucina columbella*, Lk.
Pectunculus angusticostatus, Lk.
Arca clathrata, Bast.
* — *barbata*, Lin.
Pecten Billaudeli, Des M.
Ostrea, sp. ind.

La position stratigraphique de cette couche fossilifère au-dessus de couches à *Scutella striatula*, etc., indiquerait un niveau supérieur à celui de Terre-Nègre. Cette opinion serait

(1) Non *pseudomelanoïdes*, comme l'indique M. Benoist.

confirmée par le fait de la découverte en ce point des *Nummulites intermedia* et *vasca,* que j'ai relatée plus haut, et qui semblent indiquer un niveau déjà élevé dans le calcaire à Astéries (1).

Quoi qu'il en soit à cet égard, cette faune offre les plus grandes analogies avec celle de Terre-Nègre et aussi avec celle de Gaas, dont elle possède des formes bien caractéristiques, telles que *Drillia crassinoda, Diastoma Grateloupi, Turbo multicarinatus, Delphinula scobina,* etc. Comme fait particulier, je signalerai l'abondance de la *Lucina columbella,* Lk., sous la forme d'une petite variété très commune dans l'Aquitanien; j'ai trouvé la même à Gaas, dans la marnière de Larrat. Quant aux *Arca clathrata* et *barbata,* elles indiquent aussi au premier abord un niveau assez élevé, puisqu'on les rencontre à Mérignac et même plus haut, mais je me hâte d'ajouter qu'*Arca barbata* existe à Gaas et à Terre-Nègre.

Je ne puis donner ici une critique détaillée des faunes que je viens de signaler et dont j'ai dressé des listes provisoires. Je me propose de le faire plus tard avec détails, en publiant quelques espèces qui me paraissent nouvelles ou incomplètement connues. Ce sera l'objet d'une note supplémentaire.

En attendant, je crois indispensable de rechercher quelles sont les assises que l'on peut assimiler à nos formations tongriennes de la Gironde et les relations que l'on peut arriver à découvrir entre elles et celles des autres régions voisines ou éloignées de l'Europe.

Des relations qui existent entre le Tongrien de la Gironde et celui des autres régions de l'Europe.

Bassin de l'Aquitaine. — Le calcaire à Astéries disparaît au Sud, à l'entrée des vallées du Bordelais et dans le Bazadais. Pour le retrouver, il faut aller jusqu'à Roquefort (Landes), où

(1) M. Pitard y a trouvé aussi *Cardita Basteroti,* Desh., ce qui confirme cette iopnion, et des *Septifer* sp. *(Note ajoutée pendant l'impression.)*

nous l'avons signalé pour la première fois (1), soit dans la ville même, soit au moulin de Batan, avec son faciès girondin de calcaire grumeleux blanc jaunâtre. Il est surmonté, à Batan, par un grès à *Nummulites intermedia* et *Fichteli,* et il présente déjà des formes plus spéciales à la région de Dax, telles que le *Cerithium ocirrhoe,* d'Orb. On peut donc regarder le lambeau de Roquefort comme le trait d'union entre le faciès girondin du Tongrien marin et le faciès généralement argileux ou calcaréo-argileux des environs de Dax (Lesperon, Gaas), et de la partie méridionale du département des Landes.

De toutes ces localités, la plus connue est Gaas, dont il a été tant de fois fait mention, surtout dans les travaux de Grateloup (2), Delbos (3), Tournouër (4), Mayer-Eymar, etc. Il suffit de comparer les listes de fossiles de Gaas avec celles du calcaire à Astéries, surtout des faluns de Terre-Nègre, pour être absolument convaincu qu'on a affaire à des couches de même âge. Si l'on se reporte aux listes que j'ai données — et elles sont fort incomplètes — on voit qu'on peut citer comme communes un grand nombre d'espèces : j'ai eu soin de les désigner par un astérisque et peut-être en ai-je oublié? Si étendue que soit cette liste, je suis convaincu qu'elle pourrait être considérablement augmentée.

Bien plus, la Stratigraphie s'accorde avec la Paléontologie pour rendre les rapprochements plus évidents encore : ainsi à la carrière d'Espibos (Lesbarritz) près Gaas, on voit les *Nummulites Fichteli et intermedia* former un niveau au-dessus des argiles à *Natica crassatina* (5), comme on l'observe dans le calcaire à Astéries des environs de Bordeaux.

---

(1) E. Fallot et L. Reyt, *Actes Soc. Lin.*, t. XLIV (17 juin 1891).

(2) *Conchyliologie fossile des terrains tertiaires du bassin de l'Adour*. Bordeaux, 1840.

(3) *Essai d'une description géologique du bassin de l'Adour*, 1854.

(4) *Note sur la présence des Nummulites dans l'étage à* Natica crassatina *du bassin de l'Adour*. (*Bull. Soc. Géol.*, 2e série, t. XX, p. 6?9.)

(5) Je ne m'explique pas comment dans un tableau récent M. Mayer met cette assise à Nummulites au-dessous des couches à *Natica crassatina*. Comme Tournouër, j'ai constaté dans le chemin qui mène de la métairie à la carrière d'Espibos qu'elle était *au-dessus*.

Aussi j'adopte complètement les opinions de Delbos et de Tournouër qui considèrent les deux formations comme contemporaines et je rejette complètement celle qui est exprimée par M. de Lapparent dans son *Traité de Géologie* (3e édition). On voit en effet qu'il place les Marnes de Gaas dans le Sannoisien (Infrà-tongrien) et le calcaire à Astéries au-dessus, dans le Stampien. Présentées ainsi, les relations qui existent entre les deux assises sont inexactes. Pour moi comme pour tous les auteurs qui ont étudié cette question (Delbos, Tournouër, etc.), les Marnes de Gaas sont un faciès contemporain du calcaire à Astéries (1) ou tout au moins de la plus grande partie de cette assise; tout au plus pourrait-on se demander au premier abord si la partie tout à fait supérieure du calcaire à Astéries, je veux parler de celle qui se voit aux environs de Langon, a son équivalent à Gaas (2). M. Mayer-Eymar croit qu'elle est représentée par les marnes sableuses de la métairie du Tartas à Gaas (3). Pour moi, ce n'est pas dans les marnes de Gaas — au moins dans la partie visible — qu'il faut chercher l'équivalent des assises infrà-tongriennes, mais peut-être déjà dans les couches tout à fait supérieures de Biarritz, c'est-à-dire dans les grès argileux à *Operculina, Pholadomya Puschi* et *Nummulites intermedia* de la Chambre d'Amour (4) et plus probablement encore dans des argiles grises qui existent dans la partie Sud-Ouest du département des Landes aux environs de Saint-Geours-de-Maremne et qui renferment, outre la *Pholadomya Puschi* de grande taille et une faune de *Pecten* extrêmement remarquable non encore

---

(1) J'y joins les argiles à *Ostrea longirostris* et *girondica* n. sp.

(2) Tournouër était même d'avis que les couches de Gaas correspondent aux parties supérieures du calcaire à Astéries (voy. *Bul. Soc. Géol.*, 3e série, t. III, p. 484).

(3) Il donne la *Cardita Basteroti* = *C. Bazini* comme caractéristique de ce niveau supérieur; je l'ai trouvée à Larrat avec *Turbo Parkinsoni* et d'autres coquilles qu'on voit un peu à tous les niveaux.

(4) Voy. *Compte rendu d'une excursion à Dax et à Biarritz*, *P.-V. Soc. Linn.* 15 mai 1889, et Mayer-Eymar, *Bull. Soc. Géol. Fr.* 3e série, t. XXI.

décrite, l'*Echinolampas Blainvillei* (1), espèce caractéristique du Tongrien marin de la Gironde. Les argiles susdites renferment également un grand nombre de dents de poissons. Je suis tenté de croire, bien que je n'aie point de renseignements sur leur position stratigraphique exacte, mais en tenant compte de leur faune et de leur situation géographique, que ces couches si intéressantes forment un intermédiaire entre les assises de la Chambre d'Amour (partie terminale Nord des falaises de Biarritz) et les Marnes de Gaas. Elles seraient peut-être l'équivalent marin des couches fluviatiles ou lacustres inférieures au calcaire à Astéries dans la Gironde (Mollasse du Fronsadais, calcaire de Castillon).

Je croirais donc volontiers que la mer tongrienne a envahi d'abord et surtout le bassin de l'Aquitaine par le Sud-Ouest, qu'elle s'est étendue ensuite vers le Nord et qu'elle a déposé des couches à faciès de plus en plus littoral à mesure qu'on va dans cette direction; les assises à *O. longirostris*, etc., formaient donc vers le Nord le rivage de cette mer, dont le maximum de profondeur qui n'a jamais dû être très grand était vers le Sud.

Il y a donc eu là une phase positive bien marquée correspondant à un envahissement lent, progressif, du bassin de l'Aquitaine par une mer qui, dans sa partie septentrionale, est venue déposer ses sédiments sur l'emplacement d'un ancien estuaire ou de lagunes comblées par le dépôt de la Mollasse du Fronsadais, et de lacs ayant donné lieu à la formation du calcaire de Castillon et de Civrac. Si l'envahissement a débuté surtout par le Sud, je ne m'oppose pas à admettre qu'à un moment donné il ait pu se produire également par toute la région occidentale, et je ne doute pas que le Médoc et peut-être le Blayais n'aient été eux-mêmes plus ou moins en communication avec la mer de l'époque infra-tongrienne (Anomies, etc); mais ce n'était pas évidemment une mer aussi nettement accu-

(1) Ces échantillons d'Échinides appartiennent, comme les *Pholadomya* et les *Pecten*, à la collection Wattebled déposée à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

sée que celle qui a déposé les assises de la portion méridionale du Bassin (Biarritz-Dax).

Le retrait de la mer tongrienne a été probablement lent, — comme son invasion, — puisque des couches sableuses à *Ostrea (girondica?)* lient souvent le calcaire à Astéries à la formation d'eau douce qui le suit ou qui le remplace dans l'Est et le Sud-Est du département de la Gironde, et surtout dans le Lot-et-Garonne (Mollasse inférieure de l'Agenais). Je ne connais pas ces dernières formations dans les Landes.

Régions septentrionales. — *Bassin de Rennes.* — L'assise avec laquelle le calcaire à Astéries a le plus d'analogie en France, en dehors du bassin de l'Aquitaine, c'est certainement celle qui est développée à Saint-Jacques et à la Chausserie, près de Rennes (Ille-et-Vilaine). Tournouër (1) a cité dans les calcaires de ces localités *Natica crassatina*, Desh., *Voluta subambigua,* d'Orb., *Natica angustata,* Grat. (*Delbosi,* Héb.), *Melania (Diastoma) Grateloupi,* d'Orb., *Cerithium plicatum,* Brug., *C. trochleare,* Lk., *Cardita Bazini,* Desh. *(C. Basteroti)*, *Cytherea splendida,* Mer., *Lucina Thierensi*, Héb., etc., qui suffisent pour affirmer non seulement un synchronisme, mais en même temps l'existence de relations géographiques très directes entre les deux bassins. Comme l'a fait remarquer l'auteur, il y avait peut-être des rapports plus directs entre le bassin de Rennes et celui de l'Aquitaine, qu'entre le bassin de Rennes et le bassin de Paris.

Bassin de Paris. — Le parallélisme entre les couches tongriennes du bassin de l'Aquitaine et celles du bassin de Paris est établi depuis fort longtemps et je crois inutile d'y revenir. Je ferai cependant remarquer que les espèces marines communes entre les deux régions sont assez peu nombreuses. On peut citer *Cerithium plicatum,* Brug., *C. trochleare,* Lk., et quelques autres, *Ampullina (Megatylotus) crassatina*, Desh., *Diastoma Grateloupi*, d'Orb., *Baya-*

(1) Voy. *Bull. Soc. Géol. de France,* 2e série, t. XXV, p. 374, t. XXIX, p. 481, et 3e série, t. III, p. 464.

nia semidecussata, Lk., *Turritella planospira,* Nyst., *Cytherea splendida,* Mer., *Cardita Bazini* (1), Desh., *Pectunculus angusticostatus,* Lk., *Ostrea longirostris,* Lk., et quelques autres mollusques (*Venus Lœwyi,* Stan. Meunier p. ex. est peut-être une variété de *Venus Aglauræ*) (2).

Belgique et Angleterre. — Je ne dirai rien de l'Angleterre où les marnes supérieures de Bembridge seules peuvent présenter une ou deux espèces communes avec le Tongrien de l'Aquitaine. Quant à la Belgique, j'indique surtout le rapprochement que l'on peut faire entre le calcaire à Astéries et les sables de Vieux-Jonc, Klein-Spauwen. Les espèces communes sont peu nombreuses (*Cerithium plicatum, Cytherea splendida, Cardita Omaliusi,* notamment); j'ajouterai *O. ventilabrum,* var. (*O. medulensis,* Ben.) du Meynieu, espèce dont le type se voit dans les couches inférieures du Limbourg (Tongrien, *sensu stricto,* des géologues belges). Les argiles rupéliennes et les sables du Bolderberg représenteraient la partie supérieure du Tongrien (surtout le calcaire à Astéries supérieur et la Mollasse inférieure de l'Agenais *pro parte,* du moins celle qui est supérieure au calcaire à Astéries, cas général dans la Gironde.

Bassin de Mayence. — Ce bassin, que j'ai visité en 1891, offre peu de rapports avec celui de l'Aquitaine.

Le Tongrien y débute par le sable marin reposant sur un conglomérat permien. La faune du sable marin comparée avec celle du calcaire à Astéries ne nous donne guère comme espèces communes parmi les mollusques (3) que *Cerithium plicatum, Natica crassatina, Cytherea splendida, Cardita Omaliusi, Pectunculus angusticostatus* et peut-être *Ostrea cyathula* (4). C'en est assez cependant pour croire qu'il corres-

(1) Cette espèce est importante pour paralléliser les dépôts supérieurs du calcaire à Astéries avec l'horizon d'Ormoy.

(2) Cossmann et Lambert. — *Terrain oligocène marin des environs d'Étampes.*

(3) Quant aux vertébrés, on peut signaler le *Carcharodon angustidens,* Ag., l'*Anthracotherium magnum,* Cuv., et l'*Halitherium Schinzi,* Kaup.

(4) Certaines formes de la Gironde rappellent la variété figurée par Sandberger (*Mainzer Becken,* pl. XXXIV).

pond à une bonne partie du calcaire à Astéries, notamment aux couches inférieures. L'argile à *Septaria* qui vient au-dessus est une formation très spéciale aux régions septentrionales, ne renfermant guère que des Foraminifères et des débris de poissons *(Amphisyle, Meletta),* et il est par conséquent difficile de la comparer avec nos formations; je crois cependant qu'il faut la considérer comme synchronique de la partie supérieure du calcaire à Astéries et de la Mollasse inférieure de l'Agenais *pro parte* (1).

Les sables d'Elsheim qui viennent au-dessus de l'argile à *Septaria* ont une faune marine tongrienne à laquelle vient se mêler une faune saumâtre et d'eau douce aquitanienne. Il en est de même dans les vraies marnes à Cyrènes et il en résulte que ces couches forment très nettement le passage entre le Tongrien et l'Aquitanien. Il est bien certain que là la limite est fort difficile à placer et *purement artificielle,* à cause de la continuité des dépôts. Dans une note récente, j'ai opiné avec une grande réserve pour mettre ces dernières couches à la base de l'Aquitanien (2), parce qu'il me semblait qu'elles indiquent en quelque sorte des conditions géologiques nouvelles qui vont amener dans le bassin de Mayence un régime lacustre qui durera jusqu'au début de la période langhienne. La question n'a du reste pas une très grande importance.

Je laisse de côté les relations avec les couches de l'Allemagne du Nord, en dehors du bassin de Mayence; elles sont du reste très analogues à celles-ci. Je ne dirai rien non plus des faunes tongriennes marines de la Haute-Alsace, des environs de Bâle (Laufen, Delémont) et du Jura suisse; elles ont toujours quelques espèces communes, mais les rapprochements qu'on peut faire avec toutes ces régions du Nord sont trop peu importants pour qu'on y insiste.

Régions méditerranéennes. — Il n'en est pas de même des

(1) Même remarque que plus haut.

(2) *Comptes rendus Soc. Géol. de France,* séance du 18 décembre 1893.

régions méditerranéennes où le Tongrien est très développé, surtout en Italie, en Hongrie, et aussi dans la Russie méridionale et la Transcaucasie, enfin en Égypte et en Kabylie. Je me bornerai à dire quelques mots de celui de l'Italie qui offre d'étroites relations avec celui du bassin de l'Aquitaine (1).

Dans ses ouvrages sur la région de l'Italie septentrionale (2), M. Sacco indique dans l'Oligocène quatre étages : le Sestien, le Tongrien, le Stampien et l'Aquitanien. Les trois premiers, surtout le Tongrien et le Stampien, se rapportent à notre Tongrien. Le Sestien serait formé de marnes arénacées à *Num. Fichteli, vasca, Boucheri,* le Tongrien de couches à *Num. Fichteli* et *intermedia,* avec faune très riche de Mollusques, ainsi que j'ai pu le voir dans les superbes collections du Musée paléontologique de l'Université de Turin ; le Stampien, de marnes peu cohérentes, dans lesquelles l'auteur ne cite pour ainsi dire pas de fossiles.

La faune du Tongrien est particulièrement intéressante. On peut y citer parmi les Mollusques, comme espèces communes avec le calcaire à Astéries ou les marnes de Gaas : *Arca scabrosa,* Nyst., *Pectunculus angusticostatus,* Lk., *Cardita Basteroti,* Desh., *Turbo Parkinsoni,* Bast., *Turritella strangulata,* Grat., *Natica crassatina,* Desh., *Cerithium submelanoïdes,* Micht., *C. Charpentieri,* Bast., *C. Ocirrhoe,* d'Orb., *Potamides margaritaceus,* Brocch., *Potamides plicatus,* Brug., *Strombus auriculatus,* Grat., etc.

M. Mayer-Eymar (3) indique à Santa Giustina, près Savone, une faune tongrienne remarquablement typique où l'on peut signaler comme espèces communes avec notre calcaire à

(1) Je laisserai de côté les couches tongriennes marines des Alpes (Bavière, Suisse, Savoie, Basses-Alpes), qui sont encore insuffisamment connues, surtout dans leurs relations stratigraphiques ; néanmoins la faune des Déserts, près de Chambéry, celle des environs de Barrême, ont des analogies avec les faunes de Bordeaux et de Gaas.

(2) *Il bacino terziario, etc., del Piemonte,* Turin, 1889-90 et *L'Apennino settentrionale* (parte centrale). *Boll. Soc. Geol. ital.,* t. X, 1892.

(3) *Bull. Soc. Géol.,* 3e série, t. XXI, p. 20.

Astéries : *Ostrea rudicula,* R. et D., *Ostrea cyathula,* Lk., var. *fimbriata,* Grat., *Cytherea splendida,* Mer., *Ampullina crassatina,* Desh., *Bayania semidecussata,* Lk., *Cerithium Charpentieri,* Bast., *C. bidentatum,* Grat., *C. lamellosum,* var. *aquitanicum* May. (1), *C. plicatum,* Brug., *Nummulites Fichteli,* Micht., *N. intermedia,* d'Arch., etc. (2).

Il y a donc là de très grandes analogies que nous retrouvons dans le Vicentin où elles ont été signalées depuis longtemps (3).

Les couches de Montecchio Maggiore rapportées à l'Infràtongrien (4) renferment déjà quelques espèces de nos assises de Gaas ou de Bordeaux, des *Cerithium* du groupe des *C. Charpentieri, plicatum, trochleare, Cytherea splendida;* Mer.); mais nous ne connaissons pas encore assez nos équivalents marins des couches fluviatiles ou lacustres du Fronsadais et de l'Entre-deux-Mers pour pouvoir les comparer utilement avec les assises synchroniques des autres régions. C'est surtout avec celles qui viennent au-dessus de Montecchio Maggiore, avec celles de Castel Gomberto, Gambugliano, c'est-à-dire avec le Tongrien type, que nous pouvons faire des rapprochements utiles. On peut citer comme formes communes : *Bayania semidecussata,* Lk., *Cerithium plicatum,* Lk., *C. trochleare,* Lk., *C. Charpentieri,* Bast., *C. margaritaceum,* Brocchi., *Natica crassatina,* Desh., *N. angustata,* Grat. (*Delbosi,* Héb.), *Strombus auriculatus,* Grat., *Cytherea splendida,* Mer., *Venus Aglaurae,* Brong., etc., et peut-être quelques autres espèces (5). Les couches qui viennent au-dessus (Schio) sont rapportées par M. Munier à l'Aquitanien, par M. Mayer au Tongrien supérieur.

---

(1) C'est peut-être le *Sublamellosum,* d'Orb., ou une de ses variétés.

(2) L'auteur précité attribue les calcaires à Nullipores d'Acqui au Tongrien supérieur.

(3) Voyez les ouvrages de Bayan, Brongniart, Hébert et Munier-Chalmas, Tournouër, etc.

(4) Munier, *Étude sur le Vicentin* (thèse), p. 67 et suiv., 1891.

(5) L'étude des Polypiers serait très intéressante à entreprendre à cet égard.

CONCLUSIONS.

Les faits que je viens de citer tendent à prouver qu'une faune tongrienne très riche existe aussi bien dans la Gironde que dans les Landes; que les faunes du calcaire à Astéries des environs de Bordeaux sont contemporaines de celles des marnes et calcaires tongriens des environs de Dax (couches de Gaas, etc.), ainsi que le prouve surtout l'étude des faciès argileux à coquilles bien conservées du calcaire à Astéries (Bordeaux-Terre-Nègre, etc.); qu'il n'y a aucune raison de superposer les assises de la Gironde aux assises des Landes, comme on a tenté de le faire; enfin, qu'il y a eu à cette époque des relations importantes entre le bassin de l'Aquitaine et celui de la Méditerranée. Cette communication avait-elle lieu dans les régions sous-pyrénéennes ou existait-elle plus au Sud? C'est ce que je ne rechercherai pas ici. Je n'ai du reste aucun fait propre à éclaicir la question. Je rappellerai cependant qu'on a signalé à Malte des assises oligocènes à *Orbitoides Mantelli*, identiques à celles de la Floride et des Antilles, et qu'une communication entre l'Atlantique et la Méditerranée avait lieu probablement par le sud de l'Espagne, puisque M. Mac Pherson a trouvé ces mêmes couches aux environs de Séville. Cette époque était évidemment très voisine de celle qui a vu se déposer les assises dont je viens de m'occuper dans le Sud-Ouest; mais je ne puis cependant la synchroniser d'une manière précise avec elle ou avec l'une quelconque de ses divisions. Je renverrai du reste le lecteur au remarquable ouvrage de M. Suess *(Antlitz der Erde)*, où il pourra trouver quelques renseignements à cet égard.

Quoi qu'il en soit, il était intéressant de constater avec des

documents nouveaux que nos faunes tongriennes de la Gironde èt des Landes, si ressemblantes entre elles, ont beaucoup plus d'analogie avec les faunes méditerranéennes qu'avec celles du bassin de Paris ou de l'Europe septentrionale.

Le tableau ci-joint est destiné à mettre en lumière les remarques sur le synchronisme des couches tongriennes que j'ai été amené à exposer dans le cours de cette étude.

17 avril 1894.

Tableau synchronique des dépôts tongriens dans quelques régions de l'Europe.

	BASSIN DE L'AQUITAINE — NORD (Gironde)	BASSIN DE L'AQUITAINE — SUD (Landes, Basses-Pyrénées)	BASSIN DE PARIS	BASSIN DE MAYENCE	ITALIE SEPTENTRIONALE
Tongrien (sup. / inf.)	sup. : Mollasse inférieure de l'Agenais *pro parte* et Calcaire à Astéries (partie supérieure). Niveau fossilifère de Madère-Sarcignan. inf. : Calcaire à Astéries (partie inférieure). Argiles à *Ostrea girondica* et *longirostris*; argiles à Milioles.	Formation argileuse de Gaas (Landes) et calcaires de Lesperon.	Sables de Fontainebleau : Sables d'Ormoy. Sables de Pierrefitte. Sables de Morigny et de Jeurres. Couches à *Ostrea cyathula* et *longirostris*.	Argile à Septaria. Sable marin d'Alzey et de Weinheim.	Couches tongriennes de l'Apennin septentrional (Santa Giustina) et couches de Castel-Gomberto, etc. (Vicentin).
Infra-Tongrien et couches de passage à l'Éocène.	Calcaire lacustre de Castillon et de Civrac (non constant). Mollasse du Fronsadais. Argiles et marnes infra-mollassiques avec Anomies à l'O. sans fossiles ou avec *Palæotherium* vers le N. et l'E.	Argiles grises de Saint-Geours? Grès et argiles supérieurs de Biarritz (Chambre d'Amour).	Calcaire de Brie. Marnes vertes. Marnes à *Cyrena convexa*. Marnes supragypseuses.	Manque.	Couches de Montecchio Maggiore (Vicentin) et couches infér^res à *Nummulites Fichteli* de la Ligurie (Section de M. Sacco).

L'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE
SA MESURE (1)

PAR M. PIONCHON,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

I

Définition de l'énergie électrique.

Pour qu'un circuit conducteur soit le siège d'un courant électrique, il faut qu'il comprenne :

Soit une machine électrique à frottement en activité;

Soit une machine électrique à influence en activité;

Soit une pile voltaïque;

Soit une pile thermoélectrique;

Soit un appareil tel qu'une machine électromagnétique capable de faire varier les relations d'un champ magnétique avec la totalité ou une partie du circuit;

Soit, plus généralement, un groupe formé d'un nombre quelconque d'appareils tels que ceux qui viennent d'être énumérés, à condition toutefois que ce groupe ne soit pas composé de deux parties produisant des effets égaux et contraires.

Si l'entretien d'un courant dans un circuit est dû à une

(1) Leçon de clôture de la première année du cours d'Électricité industrielle institué à la Faculté des sciences par la Société des Amis de l'Université de Bordeaux. — La fondation de ce cours est due à l'initiative de M. Lespiault, qui ne cessait de préconiser l'union intime de la science et de l'industrie, le partage de l'activité des Facultés entre les recherches de science pure et les études pratiques, comme un des moyens les plus certains d'affirmer l'existence, d'assurer la prospérité, d'étendre l'influence des établissements d'enseignement supérieur. Aussi ai-je cru bon, tout en acquittant une dette personnelle de reconnaissance, de donner place dans ce recueil à un travail qui rappelât le côté pratique offert désormais, conformément au vœu de l'auteur de ces vues si sages et si élevées, par l'enseignement de la phy ique à la Faculté des sciences.

machine électrique quelconque, c'est au prix d'une dépense d'énergie mécanique.

S'il est dû à une pile voltaïque, c'est au prix d'une dépense d'énergie chimique.

S'il est dû, enfin, à une pile thermométrique, c'est au prix d'une dépense d'énergie calorifique.

Dans tous les cas, par conséquent, envisagé dans son ensemble, un circuit qui est le siège d'un courant électrique est un système qui effectue une consommation visible d'énergie.

Mais en même temps qu'il est le théâtre d'opérations qui consomment de l'énergie, le circuit considéré est le siège de phénomènes qui en dégagent. En effet, chacune de ses parties éprouve, par le fait du passage du courant, un échauffement plus ou moins considérable, et produit par conséquent de l'énergie calorifique; certaines parties, en outre, peuvent éprouver des décompositions chimiques et fournir par conséquent de l'énergie chimique; d'autres, enfin, peuvent engendrer des mouvements et fournir par suite de l'énergie mécanique.

La chaleur dégagée dans l'ensemble d'un circuit, l'énergie représentée par les décompositions chimiques effectuées en même temps, enfin l'énergie mécanique correspondant aux mouvements qui peuvent en outre se produire, forment un total d'énergie restituée compensant exactement l'énergie absorbée.

Si donc on désigne par $\mathcal{A}$ la somme d'énergie visible (mécanique, chimique ou calorifique) absorbée par un circuit électrique, et par $\mathfrak{D}$ la somme d'énergie visible dégagée corrélativement, on a l'équation

$$\mathfrak{D} = \mathcal{A}.$$

Si, au lieu d'envisager un circuit dans son ensemble, on en considère une partie seulement, on y voit toujours de l'énergie dégagée, au moins sous la forme calorifique; on y voit parfois en même temps de l'énergie consommée, mais on ne trouve pas entre l'une et l'autre la relation d'égalité qui a lieu pour le circuit tout entier.

Soit d l'énergie visible dégagée dans une portion c d'un circuit électrique. Soit a l'énergie visible absorbée. On n'a plus ici $d = a$, mais, suivant les cas,

$$d > a$$

ou

$$d < a.$$

Soit, par exemple, un fil homogène traversé par un courant. Il s'échauffe; il dégage donc une certaine quantité d d'énergie calorifique. Il ne reçoit, d'autre part, aucune énergie visible. On a donc dans ce cas

$$d > a,$$

puisque $a = 0$.

Soit, en second lieu, une portion de circuit comprenant un moteur électrique. Il s'y produit à la fois de l'énergie mécanique et de l'énergie calorifique. D'ailleurs aucune énergie visible n'y est absorbée. On a donc encore ici $a = 0$, et par suite

$$d > a.$$

Soit enfin une cuve où s'effectue une décomposition chimique et qui présente, dans le sens du courant, une chute de potentiel. Le liquide, étant échauffé comme conducteur en même temps que divisé en éléments comme composé chimique, se trouve le siège à la fois d'un dégagement de chaleur et d'une production d'énergie chimique. D'autre part, il peut y avoir de l'énergie calorifique ou chimique absorbée, suivant l'état sous lequel se présentent les produits de la décomposition, suivant les actions qu'ils peuvent exercer sur les électrodes ou le composé chimique lui-même. Mais la somme a de l'énergie absorbée, abstraction faite de toute action parasite, c'est-à-dire indépendante du passage du courant, est inférieure à la somme d de l'énergie calorifique et de l'énergie chimique dégagées. On a donc encore dans ce cas

$$d > a.$$

Des exemples de l'inégalité inverse

$$D < A$$

sont offerts par les portions de circuits qui comprennent des générateurs électriques.

Une pile, par exemple, dégage de la chaleur à la fois comme chaîne conductrice et comme siège de réactions chimiques, et consomme, d'autre part, de l'énergie chimique; mais l'énergie calorifique dégagée D est inférieure à l'énergie chimique absorbée A.

Une machine électromagnétique dégage de la chaleur par le fait de l'échauffement des conducteurs qu'elle renferme, et consomme d'autre part de l'énergie mécanique; mais l'énergie calorifique dégagée D est inférieure à l'énergie mécanique absorbée A.

Comment devons-nous interpréter les inégalités dont nous venons de constater l'existence?

En premier lieu, que signifie l'inégalité

$$d > a?$$

Elle exprime que la portion de circuit à laquelle elle se rapporte émet au dehors plus d'énergie visible qu'elle n'en reçoit.

D'où provient alors l'excédent

$$d - a?$$

Si nous ne voulons pas admettre que de l'énergie visible puisse être créée de rien; si nous avons foi en la généralité de la remarque, toujours faite jusqu'ici, que toute énergie émise par un appareil n'est que la manifestation d'une énergie reçue par lui, d'autre part, sous la même forme ou sous une forme différente, nous dirons que cet excédent est la manifestation, sous forme visible, d'une énergie équivalente reçue par la portion de circuit considérée sous une forme particulière, invisible; et nous donnerons à ce mode spécial d'énergie, dû

évidemment aux conditions électriques du système, le nom d'*énergie électrique*.

D'autre part, que signifie l'inégalité inverse

$$D < A$$

que présentent toujours certaines portions de tout circuit électrique?

Elle exprime que ces parties de circuit dégagent moins d'énergie visible qu'elles n'en absorbent.

Mais alors que devient l'excédent

$$A - D?$$

Si nous ne voulons pas admettre qu'il soit anéanti; si nous sommes persuadés que de l'énergie, cessant d'exister sous une certaine forme, existe nécessairement en quantité équivalente sous une autre forme, nous dirons que cet excédent est la représentation, sous la forme invisible d'*énergie électrique*, d'une quantité équivalente d'énergie visible (mécanique, chimique ou calorifique) reçue par la portion de circuit considérée.

Nous sommes donc ainsi obligatoirement amenés à concevoir, sous le nom d'*énergie électrique*, une forme d'énergie particulière, invisible, pouvant provenir d'une quelconque et se transformer inversement en une quelconque des formes visibles d'énergie.

La considération de cette énergie électrique est la conséquence nécessaire de l'extension aux portions de circuit parcourues par des courants du principe de la conservation de l'énergie.

Pour une portion de circuit qui présente l'inégalité

$$d > a,$$

on écrira donc, en appelant u l'énergie électrique *absorbée :*

$$d = a + u.$$

Pour une portion de circuit qui présente l'inégalité

$$D < A,$$

on écrira, en appelant U l'énergie électrique *produite :*

$$D = A - U.$$

Considérons alors deux parties d'un circuit complémentaires l'une de l'autre, c'est-à-dire telles que leur ensemble forme le circuit tout entier. Ajoutons membre à membre les équations

$$d = a + u,$$
$$D = A - U,$$

qui leur correspondent. Nous aurons, en appelant $\mathfrak{D}$ l'énergie visible totale dégagée, et $\mathcal{A}$ l'énergie visible totale absorbée :

$$\mathfrak{D} = \mathcal{A} + u - U.$$

Mais entre $\mathfrak{D}$ et $\mathcal{A}$ existe, comme nous l'avons vu, l'égalité

$$\mathfrak{D} = \mathcal{A}.$$

De là résulte la relation

$$u = U.$$

En d'autres termes, si l'on considère deux parties d'un circuit complémentaires l'une de l'autre, l'énergie électrique absorbée par l'une est égale à l'énergie électrique engendrée par l'autre.

II

Évaluation de l'énergie électrique.

Voyons maintenant comment peut être faite, par des mesures électriques, l'évaluation de cette énergie.

L'évaluation de l'énergie électrique absorbée par une portion de circuit est facile lorsque cette portion de circuit est constituée par un conducteur homogène *c* dans lequel le seul effet

résultant du passage du courant est un dégagement de chaleur d. On a alors, en effet,

$$u = d.$$

D'expériences faites par Joule il résulte que le dégagement de chaleur d, dont un conducteur est le siège dans ces conditions, est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel à la résistance r du conducteur, au carré I^2 de l'intensité du courant, à la durée T du passage du courant, et, par conséquent, proportionnel au produit

$$rI^2T.$$

Mais si V est la chute de potentiel que présente entre ses extrémités le conducteur considéré, on a

$$rI = V.$$

Le dégagement de chaleur est donc proportionnel au produit

$$VIT,$$

ou au produit

$$VQ,$$

puisque IT est l'expression de la quantité E d'électricité mise en jeu dans le temps T considéré.

Ainsi l'énergie calorifique dégagée par un conducteur homogène qui est le siège d'une chute de potentiel V est proportionnelle à cette chute et à la quantité d'électricité Q mise en jeu; en d'autres termes, elle est égale à VQ fois l'énergie qui serait dégagée pour une chute 1 par le passage d'une quantité d'électricité égale à 1.

L'énergie produite par le transport d'un coulomb à travers un conducteur présentant une chute de potentiel égale à 1 volt a été trouvée égale à la fraction

$$\frac{1}{9,8096} = 0,10193$$

d'un kilogrammètre, ou à la fraction

$$0,24$$

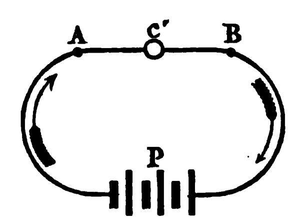
d'une petite calorie (¹).

On a donné à cette quantité d'énergie le nom de *Joule*.

Le passage de Q coulombs dans un conducteur homogène qui présente une chute de potentiel de V volts développe donc une quantité d'énergie calorifique égale à

$$VQ \text{ joules.}$$

Considérons maintenant une portion de circuit $Ac'B$



présentant, en même temps qu'un dégagement de chaleur, un dégagement d'énergie chimique ou d'énergie mécanique. Soit I l'intensité du courant que nous supposerons dû à l'action d'une pile P. Soit V′ la chute de potentiel existant entre les extrémités A et B de la partie c' du circuit considéré. Si u' est l'énergie électrique absorbée dans cette partie de circuit pendant un certain temps T, et si d' est la somme des énergies visibles dégagées pendant ce temps, on a

$$d' = u'.$$

Mais en désignant par D l'énergie visible dégagée et par A l'énergie visible absorbée pendant le temps T par la partie de circuit complémentaire de c', on a

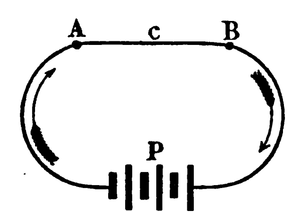
$$D = A - u',$$

d'où

$$u' = A - D.$$

(¹) Cette fraction est sensiblement la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° la température d'une masse d'air égale à 1 gramme.

Supprimons maintenant la partie $Ac'B$ du circuit et remplaçons-la par un conducteur homogène AcB dégageant uniquement de l'énergie calorifique et choisi de telle façon que l'intensité du courant prenne exactement la même valeur I que tout à l'heure



La grandeur des actions chimiques dont la pile est le siège dépendant uniquement de l'intensité du courant et du temps, l'énergie chimique absorbée par la pile aura, dans le temps T, la même valeur A que tout à l'heure. L'énergie dégagée par la partie BPA du circuit aura, dans le même temps, la même valeur D, car rien n'est changé dans le régime électrique des divers conducteurs qui la constituent. L'énergie électrique engendrée pendant le temps T en BPA et consommée pendant le même temps en AcB sera donc

$$u = A - D = u'.$$

Or, si V est la chute de potentiel existant actuellement entre A et B, on a, en vertu de la loi de Joule,

$$u = VQ \text{ joules.}$$

Donc

$$u' = VQ \text{ joules.}$$

Mais l'expérience montre que la valeur actuelle V de la chute de potentiel entre A et B est identique à la valeur V' que présentait cette chute lorsque se trouvait entre ces deux points la portion de circuit c' qui produisait à la fois de l'énergie calorifique et de l'énergie chimique ou mécanique. On a donc

$$u' = V'Q.$$

Ainsi, même lorsqu'une portion de circuit dégage de l'énergie visible sous plusieurs formes à la fois, l'énergie électrique absorbée est exprimée, comme dans le cas d'une portion dégageant uniquement de l'énergie calorifique, par le produit

$$VQ$$

de la chute de potentiel existant entre ses extrémités par la quantité d'électricité Q mise en jeu dans le temps considéré.

Cette expression est générale. Quel que soit l'appareil formant une partie quelconque d'un circuit électrique, s'il existe entre le point d'entrée et le point de sortie du courant une chute de potentiel V, le passage d'une quantité d'électricité Q dans cet appareil correspond à une absorption d'énergie électrique proportionnelle à

$$VQ.$$

Cette expression rappelle exactement celle de l'énergie résultant du passage d'une quantité d'eau Q dans un appareil hydraulique présentant entre le point d'entrée et le point de sortie du liquide une différence de niveau V. Aussi rappelle-t-on quelquefois cette analogie dans le langage en disant que d'un point à un autre d'un circuit une quantité d'électricité Q débitée par un courant éprouve une chute V.

Si V est la valeur numérique de la chute en volts, et Q la valeur numérique de la quantité d'électricité en coulombs, VQ est la valeur numérique de l'énergie électrique en *joules*.

On exprimera aisément cette énergie en kilogrammètres, en se rappelant qu'un joule vaut

$$0^{\text{kgm}},10193,$$

ou en calories, sachant qu'un joule vaut

0,24 petite calorie.

C'est le joule qui est l'unité pratique d'énergie électrique.

III

Récepteurs et générateurs d'énergie électrique.

Tout appareil qui consomme de l'énergie électrique et qui dégage en conséquence de l'énergie visible, soit uniquement sous la forme calorifique, soit à la fois sous la forme calorifique et la forme chimique, soit enfin à la fois sous la forme calorifique et la forme mécanique, constitue ce qu'on appelle un ***récepteur d'énergie électrique***, ou simplement un ***récepteur électrique***.

Entre le point d'entrée et le point de sortie du courant dans un récepteur électrique existe une chute de potentiel qu'on nomme ***différence de potentiel aux bornes du récepteur***. La valeur en est donnée par un voltmètre dont les fils sont reliés l'un au point d'entrée, l'autre au point de sortie du courant.

L'équation de l'énergie mise en jeu en un temps T dans un récepteur électrique est

$$d = u,$$

ou, si l'on met en évidence les deux parties C_a (chaleur) et x (énergie chimique ou mécanique), dont peut se composer d,

$$C_a + x = u.$$

Il est facile d'exprimer en joules l'énergie calorifique C_a dégagée en un temps T sous l'action d'un courant d'intensité égale à I ampères dans un appareil dont on connaît la résistance r en ohms. D'après la loi de Joule, l'expression de cette énergie est

$$rI^2T,$$

ou

$$rIQ.$$

L'expression de u étant d'ailleurs

$$vQ,$$

l'équation de l'énergie écrite sous la forme

$$rIQ + x = vQ$$

fera connaître la valeur en joules de l'énergie chimique ou mécanique x dégagée par le récepteur électrique pendant le passage d'une quantité d'électricité Q. On aura

$$x = (v - rI)Q.$$

Mais $v - rI$ est l'expression de la force électromotrice e de la portion de circuit constituée par le récepteur considéré. On a donc finalement

$$x = eQ.$$

Ainsi la valeur de l'énergie chimique ou mécanique dégagée par un récepteur électrique corrélativement au passage d'une quantité d'électricité Q est égale (en joules) au produit de la valeur (en volts) de la force électromotrice du récepteur par la valeur (en coulombs) de la quantité d'électricité mise en jeu.

On peut, par suite, définir la force électromotrice d'un récepteur électrique comme étant (en volts) numériquement égale à la valeur (en joules) de l'énergie chimique ou mécanique dégagée dans le récepteur par le passage d'un coulomb.

Cette force électromotrice se calcule à l'aide de la résistance r du récepteur, de l'intensité I du courant et de la différence de potentiel v aux bornes par la formule

$$e = v - rI.$$

Pour un récepteur purement thermique, on a $e = 0$, car alors $v = rI$.

Tout appareil qui *produit* de l'énergie électrique en consommant plus d'énergie qu'il n'en dégage, constitue ce

qu'on appelle un ***générateur d'énergie électrique***, ou simplement un ***générateur électrique***.

Entre le point d'entrée et le point de sortie du courant dans un générateur électrique, il existe un saut de potentiel V qu'on nomme ***différence de potentiel aux bornes du récepteur***. La valeur en est donnée par un voltmètre dont les fils sont reliés l'un au point d'entrée, l'autre au point de sortie du courant.

L'équation de l'énergie mise en jeu en un temps T dans un générateur électrique est

$$D = A - U.$$

Si l'énergie dégagée est due uniquement à l'échauffement par le courant des conducteurs qui constituent le générateur, on a, en désignant par R la somme de leurs résistances

$$D = RIQ,$$

et par suite, comme $U = VQ$,

$$RIQ = A - VQ.$$

L'énergie A absorbée par un générateur pour la mise en jeu d'une quantité d'électricité Q sera donc exprimée en joules par la formule

$$A = (RI + V)Q.$$

Mais $RI + V$ est l'expression de la force électromotrice E de la partie de circuit constituée par le générateur considéré. On a donc finalement

$$A = EQ.$$

Ainsi la valeur de l'énergie consommée par un générateur électrique pour mettre en jeu une quantité d'électricité Q est égale (en joules) au produit de la valeur (en volts) de la force électromotrice du générateur par la valeur (en coulombs) de la quantité d'électricité mise en jeu.

On peut, par suite, définir la force électromotrice d'un générateur électrique comme étant (en volts) numériquement égale

à la valeur (en joules) de l'énergie absorbée par le générateur pour la mise en jeu d'un coulomb.

Cette force électromotrice se calcule à l'aide de la résistance R du générateur, de l'intensité I du courant et de la différence V de potentiel aux bornes par la formule

$$E = RI + V.$$

Considérons un circuit $\mathcal{C}$ comprenant un récepteur électrique c et un générateur C. Des données relatives au récepteur on déduit

$$e = v - rI,$$

et des données relatives au générateur

$$E = RI + V,$$

d'où deux expressions équivalentes de l'intensité du courant :

$$I = \frac{v - e}{r} = \frac{E - V}{R}.$$

Mais si les bornes du récepteur sont en même temps celles du générateur, on a

$$v = V,$$

et par suite

$$I = \frac{E - e}{R + r} = \frac{E - e}{\mathfrak{R}},$$

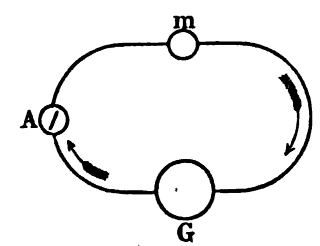
$\mathfrak{R}$ désignant la résistance totale du circuit.

On voit par là que la force électromotrice $\mathcal{E}$ à laquelle est due l'intensité I du courant dans le circuit est égale à la force électromotrice E du générateur *diminuée* de la force électromotrice e du récepteur.

La présence d'un récepteur en activité dans un circuit a donc pour effet de rendre la force électromotrice inférieure à la valeur qu'elle aurait par le fait seul du générateur, et par suite l'intensité du courant inférieure à ce qu'elle serait, pour la même résistance totale, par le fait seul du générateur. La

force électromotrice d'un récepteur en activité joue donc, par rapport à la force électromotrice du générateur, le rôle de force antagoniste. Aussi donne-t-on à la force électromotrice d'un récepteur le nom de *force électromotrice inverse,* ou *force contre-électromotrice.*

Pour le vérifier, plaçons dans le circuit d'un générateur G de force électromotrice constante E un moteur électrique *m*,



le circuit comprenant, en outre, un ampèremètre A faisant connaître à chaque instant l'intensité du courant.

Empêchons d'abord le moteur de tourner; il ne dégagera que de l'énergie calorifique, n'offrira, par conséquent, aucune force électromotrice inverse, et le courant aura une intensité I_0 exprimée par la formule

$$I_0 = \frac{E}{\mathfrak{R}}.$$

Laissons ensuite tourner le moteur; il produira, outre de l'énergie calorifique, de l'énergie mécanique; il offrira alors une force électromotrice inverse *e* et l'intensité du courant devra avoir une valeur I exprimée par

$$I = \frac{E - e}{\mathfrak{R}};$$

elle sera par conséquent inférieure à I_0.

C'est bien, en effet, ce que montre l'expérience. Dès que le moteur se met à tourner, on voit l'ampèremètre indiquer une intensité de courant inférieure à l'intensité primitive, et si le circuit renferme une lampe à incandescence, l'éclat de cette lampe manifeste une diminution notable.

Quant à la différence de potentiel aux bornes, elle est plus grande quand le récepteur travaille que lorsqu'il est inactif. On a, en effet, quand le moteur électrique est au repos :

$$v_0 = r\mathrm{I}_0 = \frac{r}{\mathfrak{R}}\mathrm{E},$$

et quand le moteur est en mouvement :

$$v = r\mathrm{I} + e = \frac{r}{\mathfrak{R}}\mathrm{E} + e\left(1 - \frac{r}{\mathfrak{R}}\right).$$

Or, cette dernière valeur surpasse la première de

$$e\left(1 - \frac{r}{\mathfrak{R}}\right).$$

IV

Puissance électrique.

Pour comparer entre eux des appareils destinés à mettre en œuvre de l'énergie, il faut avoir égard non seulement à la valeur absolue de l'énergie mise en jeu, mais encore au temps correspondant.

Un appareil est dit d'autant plus *puissant* qu'il met en jeu une quantité d'énergie plus grande dans un temps plus court. C'est donc par l'énergie mise en jeu dans l'unité de temps qu'on jugera de la *puissance* des appareils qui consomment ou produisent de l'énergie.

Envisageons à ce point de vue les récepteurs et les générateurs électriques.

L'unité pratique adoptée pour l'expression de la puissance des appareils électriques est la puissance correspondant à la mise en jeu d'une joule par seconde.

On a donné à cette unité de puissance le nom de *watt*.

Le watt est équivalent à une puissance de

0,10193 kilogrammètre par seconde,

ou de

0,00135 cheval vapeur.

Cette puissance étant un peu petite relativement aux puissances que l'on a à évaluer habituellement, on a pris comme unité secondaire usuelle la puissance de

1000 watts,

qu'on désigne sous le nom de *kilowatt*.

Un kilowatt équivaut à une puissance de

101,93 kilogrammètres par seconde,

ou encore à une puissance de

1,35 cheval vapeur.

Au watt se rattache une unité secondaire d'énergie, le *watt heure*, qui est l'énergie fournie par une puissance d'un watt pendant une heure, soit

3600 joules,

ou

366,84 kilogrammètrès.

Un *kilowatt heure* vaut par suite

3600000 joules

ou

366840 kilogrammètres.

L'énergie électrique consommée dans un récepteur qui présente aux bornes une différence de potentiel v et qui est traversé par un courant d'intensité I étant

$$v \frac{Q}{T} = vI \text{ joules par seconde,}$$

la puissance électrique correspondant vaudra

vI watts.

La puissance calorifique dégagée par ce récepteur, étant

$$rI \frac{Q}{T} = rI^2 \text{ joules par seconde,}$$

vaudra

$$rI^2 \text{ watts.}$$

Donc, la valeur w en watts de la puissance chimique ou mécanique dégagée par le récepteur considéré sera donnée par l'équation

$$rI^2 + w = vI,$$

d'où

$$w = (v - rI)I,$$

ou enfin

$$w = eI.$$

Ainsi la valeur de la puissance chimique ou mécanique dégagée par un récepteur électrique est égale (en watts) au produit de la valeur (en volts) de sa force électromotrice par la valeur (en ampères) de l'intensité du courant.

Considérons de même un générateur électrique.

La puissance électrique produite étant égale à

$$VI,$$

la puissance calorifique dégagée étant égale à

$$RI^2,$$

la valeur W en watts de la puissance consommée pour l'entretien du courant par ce générateur sera donnée par l'équation

$$RI^2 = W - RI,$$

d'où

$$W = (RI + V)I,$$

ou enfin

$$W = EI.$$

Ainsi la valeur de la puissance visible consommée par un générateur électrique est égale (en watts) au produit de la valeur (en volts) de sa force électromotrice par la valeur (en ampères) de l'intensité du courant.

En résumé :

Pour faire l'étude de l'efficacité d'un récepteur électrique, il sera nécessaire et suffisant de demander à des mesures électriques la connaissance des grandeurs suivantes :

résistance	r
intensité du courant	I
différence de potentiel aux bornes	v

On en déduira :

la force électromotrice inverse	$e = v - rI$
la puissance électrique consommée	$w_c = vI$
la puissance utile produite	$w_u = eI$
le rendement, c'est-à-dire le rapport de la puissance utile produite à la puissance électrique absorbée (1)	$\frac{w_u}{w_c} = \frac{e}{v}$

Pour faire l'étude de l'efficacité d'un générateur électrique, il sera nécessaire et suffisant de demander à des mesures électriques la connaissance des grandeurs suivantes :

résistance	R
intensité du courant	I
différence de potentiel aux bornes	V

On en déduira :

la force électromotrice	$E = RI + V$
la puissance électrique produite	$W_e = VI$
la puissance visible consommée	$W_c = EI$
le rendement, c'est-à-dire le rapport de la puissance électrique produite à la puissance visible consommée (2)	$\frac{W_e}{W_c} = \frac{V}{E}$

(1) On remarquera que ce rendement est toujours inférieur à 1, e étant toujours inférieure à v.

(2) On remarquera que ce rendement est toujours inférieur à 1, V étant toujours inférieure à E.

SUR
UN
PRODUIT D'OXYDATION INCOMPLÈTE
DE L'ALUMINIUM

PAR M. PIONCHON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

Sur un produit d'oxydation incomplète d'aluminium.

Si l'on place sur une petite tablette de charbon de cornue un fragment d'aluminium de quelques centigrammes et qu'on dirige sur lui le dard d'un chalumeau oxydrique (1), on voit successivement le métal passer par l'état friable que j'ai signalé dans une note antérieure (2), fondre, et finalement prendre l'aspect d'un corps quelconque porté à l'incandescence.

Mais si l'on continue à le chauffer en tenant tout près de sa surface la pointe du petit cône bleu que présente à sa naissance le dard du chalumeau, il arrive un moment où le fragment de métal brûle avec un éclat éblouissant. La combustion commence en un point, se propage de proche en proche, gagne bientôt toute la masse et dure quelques secondes pendant lesquelles le métal fondu semble venir sans cesse de l'intérieur de la masse pour brûler à la surface.

Lorsque cette brillante oxydation est terminée, on se trouve en présence, non pas, comme on aurait pu s'y attendre, d'une masse d'alumine blanche, mais d'une matière d'aspect gris

---

(1) J'emploie, pour faire cette expérience, le chalumeau à main de Desbassayns de Richemond.

(2) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 18 juillet 1892.

noir dans laquelle on n'aperçoit des traces d'alumine qu'en certains points de ses bords ou de sa surface inférieure [1].

En présence de ce résultat inattendu, mon premier soin a été de recommencer l'expérience en pesant l'aluminium employé et la matière obtenue. J'ai trouvé ainsi, comme l'indique le tableau suivant, que dans cette matière le rapport du poids d'oxygène au poids d'aluminium était toujours à peu près le même et voisin de 0,6.

POIDS d'aluminium employé	POIDS de matière grise obtenue	POIDS d'oxygène fixé	RAPPORT du poids d'oxygène au poids de métal
P	Q	$p = Q - P$	$\frac{p}{P}$
420,5	665,8	245,3	0,58
430,5	680,2	249,7	0,58
473,6	754	280,4	0,59
409,2	653,1	143,9	0,59
297,1	475,8	178,7	0,60
251	402,7	151,7	0,60
849,2	1369,2	520	0,61
2764,7	4453,1	1688,4	0,61
3252,4	5268,0	2015,6	0,62

Le rapport du poids de l'oxygène au poids de l'aluminium dans l'alumine étant égal à 0,888, la matière en question ne pouvait être constituée uniquement par de l'alumine. Mais on pouvait expliquer la composition indiquée très approximativement par les synthèses rapportées ci-dessus en supposant que cette matière était formée soit d'un mélange d'aluminium et d'alumine, soit d'un oxyde nouveau d'aluminium ayant une composition représentée par la formule AlO $\left(\frac{O}{Al} = \frac{8}{13,5} = 0,592\right)$, cet oxyde étant mêlé à des traces d'aluminium libre et d'alumine, soit enfin d'un oxyde de composition voisine mais un peu différente de celle qui correspondrait au rapport 0,592,

(1) En retournant le fragment on trouve parfois à sa partie inférieure une petite quantité de métal non brûlé: un coup de chalumeau en détermine aisément la combustion.

cet oxyde étant mêlé à une certaine quantité d'aluminium épargné par la combustion et aussi à une certaine quantité d'alumine.

Seule, l'étude quantitative d'une réaction chimique de la matière en question pouvait déterminer un choix entre ces trois hypothèses.

Tous les réactifs susceptibles d'agir sur l'aluminium, savoir : l'eau, les alcalis, les acides, ont manifesté une action sur la matière examinée; mais, dans tous les cas, l'attaque n'a été que partielle, et a laissé subsister un résidu insoluble.

Je me suis attaché tout particulièrement à l'examen de la réaction opérée avec l'acide chlorhydrique [1].

Cette réaction donne lieu à un dégagement d'hydrogène et à la formation de chlorure d'aluminium qui reste en dissolution. Il y a, d'autre part, un résidu insoluble.

Opérant sur une masse connue M de matière, j'ai déterminé la quantité H d'hydrogène dégagée, la quantité A d'alumine fournie par le chlorure d'aluminium de la liqueur, et enfin la masse R du résidu insoluble. La différence M — R donnait la quantité X de matière attaquée.

Voici, comme exemple, le résultat moyen d'une série d'expériences :

M	H	A	R	X	$\frac{H}{X}$	$\frac{A}{X}$
1370,8	21,842	545,8	999,2	371,6	0,0587	1,469

On voit tout de suite que la matière X enlevée à M par l'acide ne saurait être de l'aluminium, car un poids 371,6 d'aluminium en se dissolvant dans l'acide chlorhydrique donnerait non pas 21,842, mais 41,28 d'hydrogène. Ainsi, la première des hypothèses énoncées tout à l'heure doit être écartée.

---

[1] J'ai été aidé dans les nombreuses et délicates manipulations qu'a exigées cette étude par M. Croizier, capitaine d'artillerie de marine en retraite, hôte assidu des Laboratoires de la Faculté, au zèle et à l'habileté duquel je suis heureux de rendre ici un public hommage.

Pour découvrir la constitution de la matière X, considérons les rapports

$$\frac{H}{X} = 0{,}0587,$$

$$\frac{A}{X} = 1{,}469.$$

On voit qu'ils diffèrent respectivement très peu des rapports

$$\frac{H^2}{Al^2O} = \frac{2}{35} = 0{,}057$$

et

$$\frac{Al^2O^3}{Al^2O} = \frac{51}{35} = 1{,}457.$$

Il suit de là que la matière X enlevée à M par l'acide chlorhydrique aurait une composition très voisine de celle d'un oxyde d'aluminium représenté par la formule Al^2O. D'après le sens dans lequel les rapports trouvés diffèrent des rapports théoriques, cette matière serait formée de l'oxyde Al^2O mêlé à une petite quantité d'aluminium libre. La réaction obtenue avec l'acide chlorhydrique se composerait donc des deux réactions suivantes :

$$Al^2O + 3HCl = Al^2Cl^3 + HO + 2H,$$
$$Al^2 + 3HCl = Al^2Cl^3 + 3H.$$

Si cette hypothèse est juste, en déterminant la composition d'un mélange de Al^2O et de Al capable de fournir les quantités H et A d'hydrogène et d'alumine recueillies, on doit trouver un poids x d'oxyde Al^2O et un poids y d'aluminium tels que $x + y = X$.

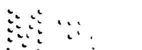
C'est en effet ce qui a lieu. Des équations

$$\frac{51}{35}x + \frac{51}{27}y = 545{,}8,$$

$$\frac{2}{35}x + \frac{3}{27}y = 21{,}842,$$

on tire

$$x = 359{,}030,$$
$$y = 11{,}934,$$



et la somme $x + y = 370,964$ est bien égale à $X = 371$.

Cette manière de voir est confirmée complètement par les expériences suivantes faites sur de plus grandes quantités de matière :

N^{os} des expériences	M	H	A	R	X	$\frac{H}{X}$	$\frac{A}{X}$
I	2064,1	34.351	835,7	1506,0	558,1		
II	2062,4	33,917	834,5	1501,6	560,8		
Moyenne $\frac{1}{2}$ (I + II)	2063,25	34,134	835,1	1503.8	559,45	0,061	1,49
III	2066,4	34,566	834,1	1506,5	559,9		
IV	2070,0	34,357	832,3	1512,9	557,1		
Moyenne $\frac{1}{2}$ (III + IV)	2068,2	34,461	833,2	1509,7	558,5	0,061	1,49

En interprétant ces résultats comme tout à l'heure, on trouve :

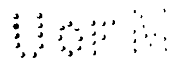
Pour la moyenne $\frac{1}{2}$ (I + II), $x = 524,18$, $y = 37,36$,
d'où $x + y = 561,54 = X$ à $\frac{1}{266^e}$ près par excès.
Pour la moyenne $\frac{1}{2}$ (III + IV), $x = 509,07$, $y = 48,33$,
d'où $x + y = 557,40 = X$ à $\frac{1}{500^e}$ près par défaut.

Il fallait découvrir, d'autre part, la nature du résidu.

Considérons pour cela l'ensemble des expériences III et IV qui ont été faites sur des prises de matière provenant d'une même combustion. Les masses totales des différentes substances en jeu ont été :

M	H	A	R	X	x	y
4136,4	68,923	1666,4	3019,4	1117,0	1018,15	96,66

Des pesées faites avant et après la combustion de l'aluminium il résulte que la quantité de matière 4136,4 devait contenir un poids d'oxygène à peu près égal à 1582. Or, de cet oxygène, on retrouve un poids $\frac{8}{35} \cdot 1018,15 = 232,8$ dans le poids 1018,15 d'oxyde Al^2O; le reste, soit $1582 - 232,8 = 1349,6$, appartient au résidu insoluble 3019,4. Le rapport $\frac{1349,6}{3019,4} = 0,479$ du poids de l'oxygène au poids total du résidu étant très



voisin du rapport $\frac{O^3}{Al^2O^3} = 0,47$, il est très probable que ce résidu est formé par de l'alumine. D'ailleurs, la densité de la matière a été trouvée égale à 4,01 [1]. Enfin, ce résidu s'est dissous entièrement dans le bisulfate de potasse au rouge, et la dissolution aqueuse de la fritte obtenue a fourni un précipité d'alumine de poids égal au poids de résidu employé.

En résumé, un poids 4136,4 de matière grise primitive aurait fourni d'après tous ces faits :

1018,15	d'oxyde	Al^2O,
96,66	d'aluminium	Al,
3019,4	d'alumine	Al^2O^3.

Le rapport

$$\frac{1018}{3019} = 0,33$$

étant égal au rapport

$$\frac{Al^2O}{2(Al^2O^3)} = 0,33,$$

on est finalement conduit, pour interpréter tous les résultats qui précèdent, à énoncer la proposition suivante :

De la combustion ménagée de l'aluminium effectuée au chalumeau oxhydrique résulte une matière gris noirâtre qui, à côté de petites quantités d'aluminium épargnées par la combustion et de traces d'alumine, présenterait un ***nouvel oxyde d'aluminium,*** auquel son mode d'attaque par l'acide chlorhydrique assignerait la composition représentée par la formule

$$Al^6O^7 = Al^2O, 2Al^2O^3,$$

et qui serait soit un mélange de Al^2O et de Al^2O^3, soit une combinaison.

Il semble y avoir là le point de départ d'un complément intéressant à l'étude chimique de l'aluminium.

---

(1) Ce chiffre représente précisément la densité indiquée dans les tables pour l'alumine fortement calcinée.

SUR LE MOUVEMENT

D'UN

CORPS DE FIGURE VARIABLE

PAR M. L. PICART.

ASTRONOME ADJOINT A L'OBSERVATOIRE DE BORDEAUX, CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

I. — Exposé du problème général.

La question que nous nous poserons d'abord est la suivante :

Étant donné un système matériel qui se déforme suivant une loi connue, déterminer son mouvement autour du centre de gravité supposé fixe.

On sait, depuis Euler, que si la terre était un solide de révolution tournant autour d'un axe qui ne coïncide pas avec son axe de figure, cet axe lui-même effectuerait autour du second une rotation dont la période est représentée en jours sidéraux par le rapport $\frac{A}{C-A}$, où C et A désignent les moments d'inertie principaux du solide. Cette période serait d'environ 305 jours. Or, les dernières observations astronomiques paraissent accuser une variation des latitudes qui aurait une période toute différente, environ 430 jours. On est donc conduit à chercher l'influence que le déplacement relatif de certaines parties du globe peut avoir sur le mouvement de l'ensemble.

Au surplus, l'importance astronomique de ce problème se trouve exposée magistralement, en même temps que les principaux résultats obtenus jusqu'à présent, dans le *Traité de mécanique céleste* de M. Tisserand (chapitres XXIX et XXX du deuxième volume.)

Une bibliographie détaillée de la question a été donnée dans le tome VII du *Bulletin astronomique* (1890, page 449). Nous y renverrons le lecteur.

II. — Équations générales.

Les équations d'Euler qui définissent le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe ne sont que la traduction analytique du théorème des moments des quantités de mouvement. Ce théorème, qui s'étend aux systèmes quelconques, peut s'énoncer ainsi :

Si l'on représente par un segment ayant son origine au point fixe l'axe du couple provenant du transport, suivant la méthode de Poinsot, des quantités de mouvement en ce point, la vitesse de l'extrémité de ce segment est représentée par l'axe du couple provenant du transport des forces extérieures au même point.

Nous nous proposons de l'employer à la recherche des équations du mouvement d'un système quelconque par rapport à trois axes mobiles rectangulaires se coupant au point fixe, et dont nous laisserons tout d'abord le mouvement indéterminé.

Désignons par Ox, Oy, Oz ces trois axes, et par p, q, r les projections de la rotation qui leur est imprimée. Soient f, g, h les projections de l'axe du couple des quantités de mouvement sur ces trois axes. La vitesse du point f, g, h est la résultante de la vitesse relative par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, et de la vitesse d'entraînement provenant de la rotation du système.

Ses projections sur trois droites fixes coïncidant à l'instant considéré avec Ox, Oy et Oz sont donc

$$\frac{df}{dt} + qh - rg, \quad \frac{dg}{dt} + rf - ph, \quad \frac{dh}{dt} + pg - qf.$$

Par suite, en désignant par L, M, N les projections de l'axe du couple provenant du transport des forces extérieures au point O, les équations du mouvement s'écriront :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{df}{dt} + qh - rg = \mathrm{L}, \\ \dfrac{dg}{dt} + rf - ph = \mathrm{M}, \\ \dfrac{dh}{dt} + pg - qf = \mathrm{N}. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de calculer les quantités f, g, h. Pour les obtenir sous une forme plus générale, nous envisagerons le mouvement comme provenant de la composition de plusieurs autres :

D'abord une rotation de tout le système, supposé solidifié, autour d'un axe quelconque; en second lieu un mouvement relatif de chacun des points par rapport au système ainsi entraîné.

Le couple des quantités de mouvement s'obtiendra en composant le couple qui provient de la rotation avec celui qui provient des mouvements relatifs.

Soient ϖ, χ, ρ les projections de la rotation sur les trois axes Ox, Oy, Oz. Soit

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 - 2\mathrm{D}yz - 2\mathrm{E}zx - 2\mathrm{F}xy = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O; les projections du couple des quantités de mouvement dues à la rotation ϖ, χ, ρ seront

$$\mathrm{A}\varpi - \mathrm{E}\rho - \mathrm{F}\chi, \quad \mathrm{B}\chi - \mathrm{F}\varpi - \mathrm{D}\rho, \quad \mathrm{C}\rho - \mathrm{D}\chi - \mathrm{E}\varpi.$$

Représentons pour un instant par α, β, γ les projections du couple du mouvement relatif; les équations (1) deviendront :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mathrm{A}\varpi - \mathrm{E}\rho - \mathrm{F}\chi + \alpha) + q(\mathrm{C}\rho - \mathrm{D}\chi - \mathrm{E}\varpi) - r(\mathrm{B}\chi - \mathrm{F}\varpi - \mathrm{D}\rho) \\ \qquad\qquad + q\gamma - r\beta = \mathrm{L}, \\ \dfrac{d}{dt}(\mathrm{B}\chi - \mathrm{F}\varpi - \mathrm{D}\rho + \beta) + r(\mathrm{A}\varpi - \mathrm{E}\rho - \mathrm{F}\chi) - p(\mathrm{C}\rho - \mathrm{D}\chi - \mathrm{E}\varpi) \\ \qquad\qquad + r\alpha - p\gamma = \mathrm{M}, \\ \dfrac{d}{dt}(\mathrm{C}\rho - \mathrm{D}\chi - \mathrm{E}\varpi + \gamma) + p(\mathrm{B}\chi - \mathrm{F}\varpi - \mathrm{D}\rho) - q(\mathrm{A}\varpi - \mathrm{E}\rho - \mathrm{F}\chi) \\ \qquad\qquad + p\beta - q\alpha = \mathrm{N}. \end{cases}$$

Le calcul des quantités α, β, γ, lorsqu'on connaît la déformation du système, serait en général assez difficile.

Si l'on suppose que la rotation ϖ, χ, ρ est la même que celle p, q, r qui est imprimée aux axes mobiles, on aura

$$\alpha = \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \quad \beta = \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right),$$
$$\gamma = \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

où m représente la masse de l'un quelconque des points du système.

Les équations (2) coïncident alors avec celles qu'a données Liouville *(Addition à la connaissance des temps pour 1859)*.

III. — Rotation moyenne.

Jusqu'à présent, nous avons laissé arbitraire la rotation ϖ, χ, ρ; en la choisissant d'une façon convenable, on peut simplifier les équations (2), et faire disparaître les termes en α, β, γ.

Il résulte en effet d'une remarque due à Poinsot qu'étant donné un système quelconque en mouvement autour d'un point fixe, on peut déterminer une rotation autour d'un axe passant par ce point telle que si cette rotation est communiquée au système supposé solidifié, l'axe du couple des quantités de mouvement qui en proviennent coïncide avec l'axe du couple provenant du mouvement réel.

Voici comment Poinsot définit géométriquement cette rotation : f, g, h étant les projections du couple, supposé connu, la direction de l'axe de rotation sera celle du diamètre conjugué du plan

$$fx + gy + hz = 0$$

par rapport à l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe.

La grandeur de la rotation, $\sqrt{\varpi^2 + \chi^2 + \rho^2}$, sera donnée par la formule

$$\sqrt{\varpi^2 + \chi^2 + \rho^2} = \sqrt{f^2 + g^2 + h^2}\, l\delta,$$

où l représente la longueur du rayon vecteur de l'ellipsoïde dirigé suivant la droite précédemment définie, et δ la distance du centre fixe au plan tangent à l'ellipsoïde qui est parallèle au plan

$$fx + gy + hz = 0.$$

Au surplus, le calcul de ϖ, χ, ρ peut s'effectuer facilement. Cette rotation, que nous appellerons désormais *rotation moyenne*, est définie par les équations :

$$\begin{aligned} f &= A\varpi - E\rho - F\chi, \\ g &= B\chi - F\varpi - D\rho, \\ h &= C\rho - D\chi - E\varpi. \end{aligned}$$

Le déterminant de ces équations est le discriminant de la forme quadratique qui figure dans l'équation de l'ellipsoïde d'inertie; il est, par conséquent, différent de zéro.

Ces équations mettent d'ailleurs en évidence la propriété concernant la direction de l'axe.

Après avoir fait disparaître α, β, γ des équations (2), on peut encore introduire une dernière simplification; elle consistera à choisir comme système d'axes mobiles les axes principaux d'inertie du corps variable, ce qui fixera à la fois les directions de ces axes et la rotation qui leur est imprimée. On aura alors

$$D = E = F = 0,$$

et les équations du mouvement seront :

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d(A\varpi)}{dt} - B\chi r + C\rho q = L, \\ &\frac{d(B\chi)}{dt} - C\rho p + A\varpi r = M, \\ &\frac{d(C\rho)}{dt} - A\varpi q + B\chi p = N. \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on connaîtra la relation qui existe entre la rotation moyenne et celle des axes principaux; lorsque, d'autre part, on aura les expressions de A, B, C en fonction du temps, on devra intégrer un système de trois équations différentielles

pour obtenir p, q, r; on achèvera la solution comme dans le cas d'un corps solide, en prenant les expressions de p, q, r en fonction des angles d'Euler.

Lorsque L, M, N sont nuls, le système des équations (a) admet une intégrale, l'intégrale des aires, qui s'écrit

$$A^2\varpi^2 + B^2\chi^2 + C^2\rho^2 = \text{constante}.$$

Il est à peine besoin de remarquer que s'il s'agit d'un corps solide, la rotation moyenne coïncide avec celle du solide, et que les équations (a) deviennent les équations d'Euler.

De même qu'il s'agit d'un corps qui se dilate ou se contracte en restant symétrique par rapport à ses axes principaux, on a

$$\varpi = p, \qquad \chi = q, \qquad \rho = r.$$

Car dans le mouvement relatif par rapport aux axes principaux, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'un quelconque de ces axes est nulle.

C'est le cas particulier étudié par Liouville dans le mémoire que nous avons cité.

Le problème que nous traiterons plus spécialement est le suivant :

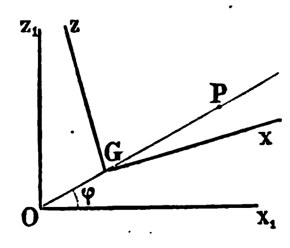
Trouver le mouvement autour de son centre de gravité du système constitué par un corps solide de révolution composé de couches concentriques homogènes, et un point matériel P *dont la position relativement au solide varie suivant une loi donnée.*

Nous avons besoin pour cette étude de formules donnant les grandeurs et les directions des axes de l'ellipsoïde central d'inertie du système, formules que nous allons d'abord établir.

IV. — Formules préliminaires.

Figurons en O le centre du solide, dont l'axe de révolution sera Oz_1; soit Ox_1 la perpendiculaire à Oz_1 menée dans le plan qui contient le point P, Oy_1 étant la perpendiculaire à ce plan.

Le plan $Oz_1 x_1$, que nous prendrons comme plan de figure, sera un plan principal d'inertie du système.



Nous appellerons A_1 et C_1 les moments d'inertie du solide par rapport à Ox_1 et Oz_1, A, B, C désignant toujours les moments d'inertie principaux du système total.

Nous désignerons par R la distance OP et par φ l'angle de OP et de Ox_1; l'angle de Gx et de Ox_1 sera appelé u.

Menons par le point G, centre de gravité du système, une droite située dans le plan de la figure, et faisant avec l'axe Ox_1 un angle quelconque α. Nous pouvons calculer de deux façons différentes le moment d'inertie du système par rapport à cette droite.

Les angles qu'elle fait avec les directions Gx et Gz étant $\alpha - u$ et $\frac{\pi}{2} - (\alpha - u)$, une première expression de ce moment sera

$$A \cos^2 (\alpha - u) + C \sin^2 (\alpha - u).$$

D'autre part, le moment d'inertie du système est égal au moment d'inertie du solide augmenté du produit de la masse m du point P par le carré de sa distance à la droite.

Pour évaluer le moment d'inertie du solide, nous prendrons le moment d'inertie par rapport à la droite parallèle menée par le point O, et nous n'aurons qu'à ajouter le produit de la masse M du solide par le carré de la distance du point O à la droite considérée.

Nous aurons donc comme seconde expression

$$A_1 \cos^2 \alpha + C_1 \sin^2 \alpha + M.\overline{OG}^2 \sin^2 (\varphi - \alpha) + m\overline{GP}^2 \sin^2 (\varphi - \alpha).$$

Or, on a

$$\frac{OG}{m} = \frac{GP}{M} = \frac{R}{M + m}.$$

On en déduit :

$$M.\overline{OG}^2 + m.\overline{GP}^2 = \frac{MmR^2}{M+m},$$

et l'on a l'équation suivante :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} A\cos^2(\alpha-u)+C\sin^2(\alpha-u) = {} & A_1\cos^2\alpha + C_1\sin^2\alpha \\ & + \frac{MmR^2}{M+m}\sin^2(\varphi-\alpha). \end{aligned} \right.$$

Cette relation doit avoir lieu quel que soit l'angle α. Faisons successivement

$$\alpha = u, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} + u, \qquad \alpha = \varphi + u;$$

nous aurons :

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= A_1\cos^2 u + C_1\sin^2 u + \frac{MmR^2}{M+m}\sin^2(\varphi-u), \\ C &= A_1\sin^2 u + C_1\cos^2 u + \frac{MmR^2}{M+m}\cos^2(\varphi-u), \\ A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi &= A_1\cos^2(\varphi+u) + C_1\sin^2(\varphi+u) + \frac{MmR^2}{M+m}\sin^2 u. \end{aligned} \right.$$

On en déduit d'abord

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} A + C &= A_1 + C_1 + \frac{MmR^2}{M+m}, \\ A - C &= (A_1 - C_1)\cos 2u - \frac{MmR^2}{M+m}\cos 2(\varphi-u). \end{aligned} \right.$$

En multipliant la première des équations (2) par $\cos^2\varphi$, la seconde par $\sin^2\varphi$, et tenant compte de la dernière pour faire la somme, on trouve, après des simplifications évidentes,

$$(6)\qquad (C_1 - A_1)\sin 2u = \frac{MmR^2}{M+m}\sin(2\varphi - 2u),$$

ce qui conduit enfin à l'équation

$$(7)\qquad \operatorname{tg} 2u = \frac{\dfrac{MmR^2}{M+m}\sin 2\varphi}{C_1 - A_1 + \dfrac{MmR^2}{M+m}\cos 2\varphi}.$$

Il nous reste seulement à calculer le troisième moment d'inertie principal B; on trouve immédiatement, par la méthode que nous avons suivie pour former la seconde expression du moment d'inertie,

$$B = A_1 + \frac{MmR^2}{M+m}. \tag{8}$$

Nous désignerons par S la quantité $\frac{MmR^2}{M+m}$ qui figure dans toutes ces équations. Elle représente la somme des moments d'inertie par rapport au point G de deux points matériels, l'un de masse M placé au point O, l'autre de masse m placé au point P; ou encore la différence entre le moment d'inertie du système total par rapport à son centre de gravité, et le moment d'inertie du solide par rapport à son centre.

Si l'on suppose la masse du point P très petite par rapport à la masse du solide, S est très sensiblement égal au moment d'inertie mR^2 du point P relativement au centre O du solide.

V. — Décomposition du problème. — Méthode générale.

Au lieu de considérer un mouvement relatif quelconque du point P, nous étudierons d'abord trois cas particuliers :

1° *Le point mobile* P *se déplace sur la droite* OP;

2° *Le point* P *tourne autour de l'axe* Oz_1;

3° *Le point* P *tourne autour de l'axe* Oy_1.

Un mouvement quelconque pouvant se décomposer en trois du genre de ceux que nous venons d'indiquer, il sera ensuite aisé de passer au cas général.

La méthode que nous suivrons consistera à introduire la rotation que prendrait à l'instant considéré le système s'il était supposé solidifié; nous désignerons par p_1, q_1, r_1 les projections de cette rotation sur les trois axes Gx, Gy, Gz. Nous calculerons ensuite ϖ, χ, ρ, ainsi que p, q, r en fonction de p_1, q_1, r_1, et de la vitesse relative du point P par rapport au solide. En

portant les expressions trouvées dans les équations (a), nous aurons trois équations différentielles pour déterminer p_1, q_1, r_1.

Ce procédé présente l'avantage suivant : si le mouvement relatif du point P n'est que temporaire, les équations d'Euler qui donneront le mouvement du système après l'arrêt du point P se déduiront des équations en p_1, q_1, r_1 en supprimant dans ces équations tous les termes qui contiennent en facteur la vitesse du point P, et remplaçant p_1, q_1, r_1 par p, q, r.

Les valeurs initiales de p, q, r correspondant à ce nouveau mouvement seront données par l'intégration des équations en p_1, q_1, r_1.

VI. — Premier cas.

On a

$$\varpi = p_1, \qquad \chi = q_1, \qquad \rho = r_1.$$

En effet, le déplacement du système qui résulte du mouvement relatif du point P par rapport au solide se compose de deux translations : l'une du point P, suivant la droite OP; l'autre de tout le solide, suivant la même direction.

La quantité de mouvement résultante est par suite dirigée suivant OP; donc ses moments par rapport aux trois axes Gx, Gy, Gz sont nuls, et la rotation moyenne coïncide avec la rotation p_1, q_1, r_1.

On a ensuite

$$p = p_1, \qquad r = r_1.$$

En effet, durant le déplacement dont nous venons de parler, le plan Gxz reste un plan principal d'inertie, et le système des axes Gx, Gz tourne seulement autour de l'axe Gy.

Pour trouver la grandeur de cette rotation, il suffit de différencier la formule (7), en laissant φ constant. On trouve ainsi :

$$2du = \frac{(C_1 - A_1)\sin 2\varphi}{(C_1 - A_1)^2 + S^2 + 2S(C_1 - A_1)\cos 2\varphi}\, dS.$$

Or, d'après le sens adopté en général pour les rotations, on a

$$q = q_1 - \frac{du}{dt}.$$

On aura donc

$$q = q_1 - \frac{1}{2}\frac{(C_1 - A_1)\sin 2\varphi}{(C_1 - A_1)^2 + S^2 + 2S(C_1 - A_1)\cos 2\varphi}\frac{dS}{dt}.$$

Les équations qui déterminent p_1, q_1, r_1 sont alors les suivantes :

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\frac{d(Ap_1)}{dt} + (C-B)q_1r_1 - \frac{C}{2}\frac{(C_1-A_1)\sin 2\varphi}{(C_1-A_1)^2+S^2+2S(C_1-A_1)\cos 2\varphi}r_1\frac{dS}{dt} = L,\\ &\frac{d(Bq_1)}{dt} + (A-C)p_1r_1 = M,\\ &\frac{d(Cr_1)}{dt} + (B-A)p_1q_1 + \frac{A}{2}\frac{(C_1-A_1)\sin 2\varphi}{(C_1-A_1)^2+S^2+2S(C_1-A_1)\cos 2\varphi}p_1\frac{dS}{dt} = N.\end{aligned}\right.$$

Si l'on veut développer les premiers termes de ces équations, on doit calculer les dérivées

$$\frac{dA}{dt},\quad \frac{dB}{dt},\quad \frac{dC}{dt}.$$

La formule (8) donne d'abord

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

Pour calculer les deux autres quantités, il sera plus simple d'employer les équations (5). On aura

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dC}{dt} = \frac{dS}{dt},$$

$$\frac{dA}{dt} - \frac{dC}{dt} = -[2(A_1-C_1)\sin 2u + 2S\sin(2\varphi - 2u)]\frac{du}{dt} - \cos(2\varphi - 2u)\frac{dS}{dt}.$$

Dans cette dernière équation, le coefficient de $\frac{du}{dt}$ disparaît en vertu de la formule (6). On a donc

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dS}{dt}\sin^2(\varphi - u),$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dS}{dt} \cos^2(\varphi - u).$$

Les équations (9) ne paraissent pas susceptibles d'être intégrées dans le cas général. Nous allons chercher à les intégrer par approximations successives en supposant d'abord

$$L = M = N = 0,$$

puis en admettant que S et $\frac{dS}{dt}$ sont des quantités très petites aussi bien par rapport à A_1 et C_1 que par rapport à la différence $C_1 - A_1$ de ces deux quantités.

En supposant $S = 0$ dans les équations (9), après avoir supprimé les seconds membres, on trouve :

$$A_1 \frac{dp_1}{dt} + (C_1 - A_1) q_1 r_1 = 0,$$
$$A_1 \frac{dq_1}{dt} - (C_1 - A_1) p_1 r_1 = 0,$$
$$C_1 \frac{dr_1}{dt} = 0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$p_1 = \lambda \cos \alpha (t - t_0), \quad q_1 = \lambda \sin \alpha (t - t_0), \quad r_1 = n,$$

λ, t_0 et n étant des constantes, et α étant égal à $\frac{C_1 - A_1}{A_1} n$. Cette solution conduit à la période eulérienne.

Posant ensuite :

$$p_1 = \lambda \cos \alpha (t - t_0) + p', \quad q_1 = \lambda \sin \alpha (t - t_0) + q', \quad r_1 = n + r',$$

et portant ces expressions dans les équations (9), où l'on négligerait les produits de deux des quantités

$$p', \quad q', \quad r', \quad \frac{dp'}{dt}, \quad \frac{dq'}{dt}, \quad \frac{dr'}{dt}, \quad S, \quad \frac{dS}{dt},$$

on aurait, pour déterminer p', q', r', un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.

Afin de nous rapprocher davantage du cas de la rotation

terrestre, nous supposerons en outre très petite la constante λ qui figure dans les expressions de p_1 et de q_1.

Il faut maintenant chercher les premiers termes des développements de A et C en fonction de S.

En nous servant de la formule (7), nous pourrons développer l'angle u en série ordonnée suivant les puissances de S.

Nous aurons ainsi

$$2u = \frac{S}{C_1-A_1}\frac{1}{\sin 1''}\sin 2\varphi - \frac{S^2}{(C_1-A_1)^2}\frac{1}{\sin 2''}\sin 2\varphi + \frac{S^3}{(C_1-A_1)^3}\frac{1}{\sin 3''}\sin 3\varphi - \ldots;$$

portant cette valeur de x dans les équations (5), nous en déduirons, en négligeant les termes qui contiennent S^2 en facteur,

$$A + C = A_1 + C_1 + S,$$
$$A - C = A_1 - C_1 - S\cos 2\varphi.$$

D'où

$$A = A_1 + S\sin^2\varphi,$$
$$C = C_1 + S\cos^2\varphi.$$

Les équations qui donnent p' et q' seront alors:

$$A_1\frac{dp'}{dt} + (C_1 - A_1)nq' - \frac{C_1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{C_1 - A_1}n\frac{dS}{dt} = 0,$$
$$A_1\frac{dq'}{dt} - (C_1 - A_1)np' = 0,$$
$$C_1\frac{dr'}{dt} + n\cos^2\varphi\frac{dS}{dt} = 0.$$

Ces équations s'intègrent immédiatement, et puisque nous cherchons la solution telle que p', q', r' se réduisent à zéro pour $S = \frac{dS}{dt} = 0$, elles donnent:

$$r' = \frac{n\cos^2\varphi}{C_1}S,$$
$$p' = \cos\alpha t\int\frac{nC_1}{2A_1}\frac{\sin^2\varphi}{C_1-A_1}\cos\alpha t\,dt + \sin\alpha t\int\frac{nC_1}{2A_1}\frac{\sin^2\varphi}{C_1-A_1}\sin\alpha t\,dt,$$
$$q' = \sin\alpha t\int\frac{nC_1}{2A_1}\frac{\sin^2\varphi}{C_1-A_1}\cos\alpha t\,dt - \cos\alpha t\int\frac{nC_1}{2A_1}\frac{\sin^2\varphi}{C_1-A_1}\sin\alpha t\,dt.$$

Ces deux dernières formules peuvent s'écrire

$$p' = \frac{n C_1}{2 A_1} \frac{\sin^2 \varphi}{C_1 - A_1} \int \frac{dS}{dt} \cos \alpha (\bar{t} - t)\, dt,$$

$$q' = \frac{n C_1}{2 A_1} \frac{\sin^2 \varphi}{C_1 - A_1} \int \frac{dS}{dt} \sin \alpha (\bar{t} - t)\, dt,$$

où $\bar{t}$ représente la limite supérieure de t, qui reste constante pendant l'intégration; on supprimera la barre après avoir fait l'intégration.

Si l'on suppose $\frac{dS}{dt}$ constant, on voit que les quantités p' et q' sont périodiques, et que la durée de la période est égale à celle du cycle eulérien. Dans cette hypothèse, l'axe de rotation p, q, r du système des axes principaux décrit, durant le même temps, un cône d'ouverture très petite autour de l'axe Gz.

Le cône décrit par l'axe p_1, q_1, r_1 est sensiblement de révolution autour de Gz. La somme $p_1^2 + q_1^2$ est en effet constante, et l'on a d'autre part

$$r_1 = n + n \cos^2 \varphi \frac{S}{C_1}.$$

Comme le déplacement angulaire de l'axe Gz est constant, on voit quel est le cône tracé par l'axe de rotation dans l'espace. Le pôle de rotation décrit sensiblement une cycloïde sphérique.

Le coefficient de $\frac{dS}{dt}$ qui figure explicitement dans les équations (9) s'annule lorsque $\sin 2\varphi$ est nul, c'est-à-dire lorsque le point P est situé sur l'axe Oz_1 ou sur l'axe Ox_1. On a alors $q = q_1$, et les trois rotations considérées successivement coïncident.

Nous examinerons un peu plus spécialement ces deux cas, en supposant toujours que le système n'est soumis qu'à ses actions mutuelles, et à des forces dont la résultante passe par le centre de gravité :

1° *Le point* P *se déplace sur l'axe* Oz_1. — Les formules

préliminaires que nous avons établies ne sont plus applicables, car elles supposent le plan $Ox_1 z_1$ déterminé.

Mais on voit immédiatement que l'axe Gz coïncide avec Oz_1, et qu'on a d'autre part

$$C = C_1, \qquad A = B = A_1 + S.$$

Le système d'équations qu'on obtient alors, et que nous écrirons :

$$\frac{d(Ap)}{dt} + (C_1 - A)\,qr = 0,$$

$$\frac{d(Aq)}{dt} - (C_1 - A)\,pr = 0,$$

$$C_1 \frac{dr}{dt} = 0,$$

est une particularisation du premier qu'a étudié Liouville, puisque non seulement deux des moments d'inertie principaux sont égaux, mais que le troisième est constant.

La dernière équation montre que r est constant.

Les deux premières donnent ensuite

$$p^2 + q^2 = \frac{K^2}{A^2},$$

K étant une constante. C'est-à-dire que le cône décrit par l'axe de rotation relativement au corps variable peut être considéré comme un cône circulaire droit dont le rayon du cercle de base varie en raison inverse de A.

Par conséquent, *une éruption volcanique dirigée vers le pôle d'inertie aurait pour effet de rapprocher de ce point le pôle de rotation, sans changer la durée du jour sidéral.*

L'intégration des équations précédentes s'achève aisément : une combinaison des deux premières équations donnera

$$\frac{q\frac{dp}{dt} - p\frac{dq}{dt}}{p^2 + q^2} = -\left(\frac{C_1}{A} - 1\right) r,$$

d'où

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{p}{q} = -n\int\left(\frac{C_1}{A} - 1\right) dt.$$

Enfin, si l'on veut trouver le mouvement absolu du système des axes principaux, il suffit de se rappeler que la direction définie par les trois quantités

$$\mathrm{A}p, \qquad \mathrm{A}q, \qquad \mathrm{C}r,$$

qui est celle de l'axe du couple des quantités de mouvement, est une direction fixe.

Si l'on prend cette droite comme axe $\mathrm{O}z$ fixe, les deux premiers angles d'Euler, déterminant la position des axes mobiles, seront définis par les relations

$$\sin\theta\sin\varphi = -\frac{\mathrm{A}p}{\mathrm{G}}, \quad \sin\theta\cos\varphi = -\frac{\mathrm{A}q}{\mathrm{G}}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{G}},$$

où l'on a posé

$$\mathrm{A}^2(p^2 + q^2) + \mathrm{C}^2 r^2 = \mathrm{G}^2.$$

Pour trouver le troisième angle ψ, on se servira de la relation

$$r = \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}.$$

On voit en premier lieu que l'angle θ sera constant, et l'on trouve ensuite

$$\varphi = \varphi_0 + nt - r\int_{\mathrm{A}} dt,$$

$$\psi = \psi_0 \quad - \quad \mathrm{G}\int \frac{dt}{\mathrm{A}}.$$

2° *Le point* P *se déplace sur l'axe* $\mathrm{O}z_1$ — Les formules qui donnent les moments d'inertie principaux sont alors

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_1, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{S}, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{C}_1 + \mathrm{S}.$$

Les équations du mouvement deviennent

$$\mathrm{A}_1\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C}_1 - \mathrm{A}_1)qr = 0,$$

$$\mathrm{A}_1\frac{dq}{dt} - (\mathrm{C}_1 - \mathrm{A}_1)pr = -\frac{d(\mathrm{S}q)}{dt} + \mathrm{S}pr,$$

$$\mathrm{C}_1\frac{dr}{dt} = -\frac{d(\mathrm{S}r)}{dt} + \mathrm{S}pq.$$

Une première approximation nous conduit, comme précédemment, au cycle eulérien.

Si maintenant on cherche les termes qui dans p et q contiennent en facteur S ou $\frac{dS}{dt}$, on voit qu'ils sont nuls. Au contraire, on trouve, au deuxième ordre près,

$$C_1 \frac{dr}{dt} = -n \frac{dS}{dt},$$

ou

$$r = n - \frac{nS}{C_1}.$$

Si l'on considère $\frac{S}{C_1}$ comme un infiniment petit du premier ordre, l'angle fait par les deux directions p, q, n et p, q, r est un infiniment petit du second ordre.

Donc *une éruption volcanique à l'équateur aurait pour effet de changer la durée du jour sidéral, sans faire varier sensiblement la position de l'axe de rotation.*

VII. — Deuxième cas.

Soit $d\theta$ l'angle dont le point P tourne autour de Oz_1 pendant le temps dt. A cause de ce mouvement relatif, le système tout entier tourne autour d'une parallèle à Oz_1 menée par le centre de gravité.

En effet, les trois points O, G, P sont toujours en ligne droite; le mouvement relatif du point G par rapport au solide est donc une rotation d'un angle $d\theta$ autour de Oz_1, et par suite le mouvement du solide est une rotation $d\theta$ autour de la parallèle Gz' à Oz_1 menée par le point G.

Il en résulte que la rotation moyenne ϖ, χ, ρ s'obtiendra en composant la rotation p_1, q_1, r_1 avec une rotation mesurée par $\frac{d\theta}{dt}$, dirigée suivant Gz'. C'est-à-dire qu'on aura

$$\varpi = p_1 - \frac{d\theta}{dt} \sin u,$$

$$\chi = q_1,$$
$$\rho = r_1 + \frac{d\theta}{dt}\cos u.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse que nous avons faite sur la constitution du solide, durant le mouvement relatif du point P les axes principaux du système tourneront simplement autour de la droite Gz'; ce qui revient à dire que la rotation additionnelle à donner aux axes principaux, après la rotation p_1, q_1, r_1, est une rotation égale à $\frac{d\theta}{dt}$, portée suivant la direction Gz'.

Donc p, q, r sont respectivement égaux à ϖ, χ, ρ.

Enfin A, B, C sont dans le cas actuel des constantes.

Les équations du mouvement s'écriront donc:

$$(10)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr = L, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp = M, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq = N. \end{cases}$$

On voit que le mouvement des axes principaux est de même nature que si le système était solide.

La même conclusion est légitime si, au lieu d'un seul point matériel mobile autour de Oz_1, il y en a un nombre quelconque, pourvu que tous ces points aient autour de Oz_1 une vitesse angulaire commune.

Car le mouvement des axes principaux est le même que celui des points mobiles, et, d'autre part, la rotation moyenne s'obtiendra comme s'il n'existait qu'un seul point variable.

On a donc le théorème suivant, indépendant de toute approximation:

Si un corps solide de révolution composé de couches concentriques homogènes est recouvert d'une protubérance qui se déplace en tournant autour de l'axe du corps, le mouvement du système des axes principaux autour du

centre de gravité est de même nature que si l'ensemble considéré était solide.

En particulier, si dans les équations (10) on supprime les seconds membres, le système peut tourner autour de l'un des axes principaux.

On peut dire, par conséquent, que les seules influences du phénomène des marées sur le mouvement de la terre résultent : d'une part, de la valeur différente que prennent les attractions extérieures lorsqu'on tient compte de ce phénomène; de l'autre, du déplacement en latitude de la protubérance liquide.

C'est ce déplacement que nous allons considérer maintenant; nous renverrons à la *Mécanique céleste* de M. Tisserand (t. II, p. 537) pour ce qui concerne l'effet des attractions extérieures.

VIII. — Troisième cas.

La rotation moyenne s'obtiendra par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé dans le cas précédent.

Au bout du temps dt, le système aura subi, outre la rotation $p_1 dt$, $q_1 dt$, $r_1 dt$, une rotation $d\varphi$ dont l'axe est dirigé suivant Gy, et qui est due au mouvement relatif du point P_1.

On a donc

$$\sigma = p_1, \qquad \chi = q_1 - \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \rho = r_1.$$

Nous remarquerons ensuite que cet axe Gy reste dans le mouvement additionnel un axe principal d'inertie. On a par suite

$$p = p_1, \qquad r = r_1.$$

La différence entre q et q_1 est, comme dans le premier cas, la dérivée par rapport au temps de l'angle que font les axes principaux situés dans le plan Gxz avec une direction fixe.

A l'aide de la formule (7), où nous laisserons S constant, nous aurons

$$\frac{du}{dt} = \frac{(C_1 - A_1)\,S\cos 2\varphi + S^2}{(C_1 - A_1)^2 + S^2 + 2S(C_1 - A_1)\cos 2\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

En posant

$$\lambda = \frac{(C_1 - A_1) S \cos 2\varphi + S^2}{(C_1 - A_1)^2 + S^2 + 2S(C_1 - A_1)\cos 2\varphi}, \tag{11}$$

nous aurons donc

$$q = q_1 - \lambda \frac{d\varphi}{dt},$$

et les équations du mouvement deviendront, en tenant compte de ce que, dans le cas actuel, B est constant et égal à $A_1 + S$:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d(A p_1)}{dt} + (C - B) q_1 r_1 - (C\lambda - B) r_1 \frac{d\varphi}{dt} = L, \\ & B_1 \frac{dq_1}{dt} - B \frac{d^2\varphi}{dt^2} + (A - C) p_1 r_1 = M, \\ & \frac{d(C r_1)}{dt} + (B - A) p_1 q_1 + (A\lambda - B) p_1 \frac{d\varphi}{dt} = N. \end{aligned} \right.$$

Nous considérerons toujours le cas où $L = M = N = 0$, et nous supposerons aussi S très petit par rapport à A_1, C_1 et $C_1 - A_1$; enfin, nous admettrons que $\frac{d\varphi}{dt}$ est constant.

Les expressions de A et C en fonction de S seront celles trouvées dans le paragraphe VI ; si par conséquent nous nous bornons aux termes du premier ordre par rapport à S, et si nous remarquons que l'équation (11) nous donne, à cet ordre d'approximation,

$$\lambda = \frac{S \cos 2\varphi}{C_1 - A_1},$$

nous aurons, en supprimant pour abréger l'écriture les indices de A_1, C_1, p_1, q_1, r_1,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & (A + S\sin^2\varphi)\frac{dp}{dt} + pS\sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} + (C - A)qr - S\sin^2\varphi qr \\ & \qquad - \frac{SC}{C - A}\cos 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} + Ar\frac{d\varphi}{dt} = 0, \\ & (A + S)\frac{dq}{dt} + (A - C) rp - S\cos 2\varphi pr = 0, \\ & (C + S\cos^2\varphi)\frac{dr}{dt} - r\sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} + S\cos^2\varphi pq \\ & \qquad + \frac{SA}{C - A}\cos 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} - (A + S)p\frac{d\varphi}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

Supposons d'abord dans ces équations $S = 0$. Nous aurons :

$$(14) \quad \begin{cases} A \frac{dp}{dt} + (C - A) qr + Ar \frac{d\varphi}{dt} = 0, \\ A \frac{dq}{dt} + (A - C) pr = 0, \\ C \frac{dr}{dt} - Ap \frac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases}$$

On obtient deux intégrales de ce système : la première, en multipliant les deux membres des trois équations respectivement par p, q, r et ajoutant, ce qui donne

$$A (p^2 + q^2) + Cr^2 = L,$$

L étant une constante; la seconde, en tirant p de la dernière équation et portant dans la deuxième, qui devient alors

$$A \frac{dq}{dt} = \frac{C - A}{\frac{d\varphi}{dt}} \frac{C}{A} r \frac{dr}{dt}.$$

D'où

$$q = K (r^2 - r_0^2),$$

K étant une constante. L'intégration du système (14) s'achèverait alors bien aisément, et l'on aurait p, q, r en fonction elliptique du temps. En opérant ensuite comme dans le paragraphe VI, on intégrerait par approximation les équations (13).

Au lieu de partir de cette solution générale des équations (14), nous prendrons une solution particulière de ces équations, savoir :

$$p = 0, \qquad q = - \frac{A}{C - A} \frac{d\varphi}{dt}, \qquad r = n,$$

où n est supposé constant; cette solution conduit, dans la supposition $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, au cas où le système, qui est alors rigide, tournerait autour d'un axe principal d'inertie.

Nous cherchons si le système (13) admet des solutions voisines de celle-là, c'est-à-dire des solutions qui se réduisent à ces expressions lorsqu'on suppose $S = 0$.

Posons donc, dans les équations (13),

$$p = p', \qquad q = -\frac{A}{C-A}\frac{d\varphi}{dt} + q', \qquad r = n + r',$$

et négligeons les termes du second ordre; nous aurons les équations

$$(15)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp'}{dt} + (C-A)nq' = \dfrac{S}{C-A}\dfrac{d\varphi}{dt}(C\cos 2\varphi - nA\sin^2\varphi), \\ A\dfrac{dq'}{dt} - (C-A)p'n = 0, \\ C\dfrac{dr'}{dt} - Ap'\dfrac{d\varphi}{dt} = S\dfrac{d\varphi}{dt}\left(n\sin 2\varphi - \dfrac{A}{C-A}\cos 2\varphi\right). \end{cases}$$

Si donc on laisse de côté les termes qui dans p' et q' correspondent au cycle eulérien, on voit que ces quantités, qui s'annulent avec S, contiendront en outre en facteur l'expression $\frac{d\varphi}{dt}$.

Or, si l'on se propose de chercher les effets que le mouvement des mers, celui de l'atmosphère ou un phénomène géologique peuvent produire sur la rotation de la terre, on doit supposer que $\frac{d\varphi}{dt}$ est très petit vis-à-vis de n, à moins qu'il ne s'agisse d'un mouvement des couches profondes du globe, auquel cas $\frac{S}{A}$ pourrait être considéré comme un infiniment petit du second ordre au moins.

On peut conclure par conséquent que dans ce cas particulier il existe une solution où r_1 est constant, p_1 et q_1 restant très petits; et comme l'on a

$$p_1 = p, \qquad q_1 = q - \lambda\frac{d\varphi}{dt}, \qquad r_1 = r,$$

où λ contient S en facteur, à cette solution correspond un mouvement des axes principaux qui est très sensiblement une rotation de grandeur fixe autour d'un axe de direction fixe par rapport à ce système, et par conséquent de direction fixe dans l'espace.

Au surplus, on trouverait pour p' et q' les valeurs suivantes :

$$p = \frac{S}{A(C-A)}\frac{d\varphi}{dt}\int_0^{\bar{t}}\left[\left(C+\frac{nA}{2}\right)\cos^2\varphi - \frac{nA}{2}\right]\cos\alpha(\bar{t}-t)\,dt,$$

$$q' = \frac{S}{A(C-A)}\frac{d\varphi}{dt}\int_0^{\bar{t}}\left[\left(C+\frac{nA}{2}\right)\cos^2\varphi - \frac{nA}{2}\right]\sin\alpha(\bar{t}-t)\,dt,$$

où $\bar{t}$ représente la limite supérieure de t, qui reste constante pendant l'intégration ; on supprime la barre après l'intégration faite.

La dernière équation donnerait r' par une simple quadrature.

Observatoire de Bordeaux, — avril 1894.

POROSITÉ

DES

TIGES LIGNEUSES

PAR M. H. DEVAUX.

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

---

1. Préliminaires. — Dans la tige de la plupart des plantes ligneuses, le périderme se montre interrompu en de nombreux points par des *lenticelles*. Mais ces petits organes manquent chez quelques plantes à périderme profond, telles que la Vigne, le Chèvrefeuille, la Clématite, etc. Dans ces plantes, le périderme doit former une cuirasse absolument continue, puisquo aucun méat n'existe entre ses cellules. Cette cuirasse doit donc séparer d'une manière parfaite du milieu extérieur l'air des méats corticaux et l'air des vaisseaux ligneux, c'est-à-dire toute l'atmosphère interne de la tige de ces plantes; par conséquent, le renouvellement de cette atmosphère interne doit se faire uniquement par dialyse, pas du tout par effusion, dans toute la région pourvue d'un périderme. Le mécanisme des échanges gazeux de ces plantes, dans cette région, doit donc être semblable à celui des plantes aquatiques submergées.

C'est en partant de ces considérations que j'ai essayé de faire le vide dans l'intérieur de la tige de la Vigne. Si vraiment le périderme forme une cuirasse continue, je devais obtenir une dialyse de l'air extérieur à travers cette cuirasse; et comme pour tous les cas de dialyse connus l'azote est le gaz qui passe le moins vite, l'air dialysé devait être fortement appauvri en azote; il devait être enrichi, par contre, en oxygène dans la mesure où la respiration le laisserait apercevoir.

En faisant des essais dans ce sens, je suis en effet arrivé à

obtenir une dialyse manifeste chez la Vigne; mais la Clématite, le Chèvrefeuille et la Ronce n'ont pas donné le résultat prévu; en même temps que la dialyse, il se produisait une effusion manifeste rendue évidente par la composition de l'air recueilli dans le vide. J'en ai conclu qu'il existait des ouvertures quelque part à travers la cuirasse péridermique, et j'ai pu en effet dévoiler expérimentalement ces ouvertures.

J'ai alors essayé de faire le vide dans le bois seul, chez des plantes diverses, espérant ainsi obtenir une dialyse régulière, puisque l'histologie montre que les vaisseaux ligneux ne sont jamais en relations normales avec l'extérieur ni avec les méats. Mais là encore j'ai obtenu un air d'une composition telle qu'on pouvait affirmer l'existence d'ouvertures. J'ai été ainsi amené à élargir la question posée au début, à faire une étude attentive de *la porosité* des tiges ligneuses. C'est l'exposé de quelques-uns des essais que j'ai faits pour cette étude que je désire donner ici.

2. Méthode employée. — Je suis arrivé très vite à reconnaître qu'en abordant l'étude de la porosité des tiges ligneuses j'abordais un problème complexe. La porosité d'une tige varie, pour une même espèce, avec l'âge, les conditions de végétation, l'époque de l'année, la quantité d'eau qu'elle contient, etc. Elle diffère beaucoup selon la région que l'on considère, téguments, écorce, bois, moelle, et pour chacune de ces régions, selon la direction longitudinale ou transversale. Étant donnée cette grande complexité, il était nécessaire d'avoir avant tout une idée approximative de la porosité, par des essais nombreux et faciles pouvant permettre de reprendre plus tard avec soin l'étude de quelques cas typiques. J'ai donc étudié les tiges des plantes ligneuses comme des corps poreux complexes. Je n'ai pas hésité, pour apprécier leur porosité, à mettre en jeu des différences de pressions souvent beaucoup plus fortes que celles qui se produisent spontanément dans ces tiges pendant leur vie normale. Il était en effet à mes yeux nécessaire de

voir, d'une manière absolue, si la porosité existe oui ou non dans chaque cas déterminé. L'existence d'une porosité, même extrêmement faible, peut avoir une grande importance. Ce n'est qu'après avoir reconnu cette porosité en elle-même, qualitativement, qu'on doit voir son rôle dans le cas des pressions gazeuses ordinairement existantes dans la plante.

Pour ces essais préliminaires je me contente de prendre une tige récemment coupée, dont le diamètre varie de 5 à 15 millimètres en moyenne; j'adapte au tronçon coupé un tube de caoutchouc. Les joints sont fermés à l'aide de gélatine glycérinée ou de mastic Golaz quand il s'agit de faire le vide dans la tige. Un fil de laiton est serré sur le caoutchouc, autour de la partie incluse de la tige, quand il s'agit d'y injecter de l'air comprimé. Ce dernier procédé de fermeture est très rapide, mais il présente l'inconvénient de comprimer l'écorce. Néanmoins, pour de simples essais tels que ceux-ci, il est suffisant. Au moment où j'envoie de l'air comprimé dans la tige, je plonge celle-ci, en tout ou en partie, dans un grand cristallisoir plein d'eau. On aperçoit ainsi, immédiatement, le dégagement des bulles s'il s'en produit à la surface intacte. Puis je blesse l'écorce seule, et j'observe si elle dégage des bulles, enfin le bois et la moelle, qui d'ordinaire dégagent aussi des bulles. Ces blessures étant faites à des distances variées de la base où arrive l'air comprimé, permettent d'avoir une idée approximative de la porosité longitudinale de chacune des principales régions de la plante, écorce (ou plutôt région extra-ligneuse), bois et moelle.

Les résultats obtenus à l'aide de ces procédés si simples semblent éclairer notablement la question mise à l'étude : celle de la porosité des tiges ligneuses. Ils m'ont permis de distinguer nettement la porosité vasculaire de la porosité méatifère, c'est-à-dire de reconnaître que le système aérifère intracellulaire paraît normalement entièrement séparé du système intercellulaire, autant du moins qu'il a été possible de le distinguer. Ce résultat présente une assez grande impor-

tance, car les vaisseaux forment dès lors un ensemble de tubes clos, sans relations avec les espaces intercellulaires de la moelle et de l'écorce, ni même du bois. C'est là une question encore obscure, l'opinion généralement admise semblant plutôt être celle exprimée autrefois par Sachs (1) : que les vaisseaux de la tige communiquent avec les méats et par eux avec l'extérieur par les lenticelles et les stomates.

Ce travail ne représente qu'une étude préliminaire, un ensemble d'essais sujets à revision; aussi je me dispenserai de faire l'historique de la question, que je réserve pour un mémoire traitant plus complètement le sujet.

3. Appareils employés. — Pour faire le vide dans les tiges, j'ai employé la pompe à mercure d'Alvergniat quand je désirais faire l'analyse des gaz; sinon j'ai employé une trompe à eau. Pour avoir de l'air comprimé à une pression constante, je relie un flacon de trois litres, à parois épaisses, avec les conduites d'eau de la ville. Cette eau, arrivant au fond du flacon, y comprime l'air de plus en plus jusqu'à ce que la force élastique de cet air fasse équilibre à la colonne d'eau venant du réservoir. Dans le laboratoire de la Faculté des sciences de Bordeaux, cette pression est faible; elle fait équilibre à une colonne de mercure de + 400 millimètres. Mais elle varie très peu. Dans le laboratoire du Jardin-Public, elle est environ double de celle-ci.

Un tube de verre muni d'un robinet envoie l'air ainsi comprimé, par des tubes de caoutchouc épais et des tubes en T, à un manomètre d'une part, à une ou plusieurs tiges d'autre part. Le manomètre indique à chaque instant la pression employée.

Les analyses de gaz ont été faites au moyen de l'appareil de MM. Bonnier et Mangin.

(1) *Traité de Physiologie végétale*, traduction française par Marc Michely, 1868, p. 275.

ESSAIS DE DIALYSE GAZEUSE.

4. Expériences sur la Vigne *(Vitis vinifera.)* — J'ai fait un certain nombre d'expériences sur la Vigne, sur des sarments âgés d'un an, encore dépourvus de feuilles, aux mois de janvier, février et mars. Je prendrai d'abord comme exemple les expériences faites sur un sujet portant le n° 82.

N° 82. — Sarment de treille chasselas, de plus d'un mètre de longueur, dont je coupe la tête de manière à le réduire à 56 centimètres. Il est adapté par une extrémité à la pompe d'Alvergniat, par l'intermédiaire d'un tube de caoutchouc à parois épaisses. Après avoir gélatiné les joints, le vide est fait et répété le plus rapidement possible. Il passe dans le corps de pompe 90 centimètres cubes d'air en cinq minutes, soit 18 centimètres cubes à la minute et 1,080 centimètres cubes à l'heure. Cet air est entré par l'extrémité du sarment restée libre, par la section des vaisseaux. Lorsque, en effet, je ferme cette extrémité, il n'en passe presque plus, ce qui montre que l'air circule très facilement dans le sens longitudinal, très difficilement dans le sens transversal.

Pour fermer l'extrémité libre du sarment, j'y adapte un tube de caoutchouc qui d'autre part est relié à un manomètre. Le vide étant fait, le mercure monte aussitôt très rapidement dans le tube manométrique. Tout d'abord, le niveau ne s'élève pas au-dessus de — 310 millimètres; mais, au bout de trois heures de vide renouvelé, le niveau se maintient à — 663 millimètres.

Le lendemain 2 février, le vide étant renouvelé, le manomètre arrive à marquer — 725 millimètres, et je recueille dans le corps de pompe en moyenne $1^{cc},6$ de gaz à l'heure. Le gaz recueilli à divers moments a la composition centésimale suivante :

Acide carbonique..	9,88	9,80	9,38
Oxygène..........	30,62	30,16	30,72
Azote............	59.50	60,04	59,90

C'est un gaz d'une composition assez constante, plus riche en oxygène et en acide carbonique que l'air libre, et contenant une proportion d'azote très faible, analogue à celle de l'air dialysé à travers le caoutchouc. Voici en effet, d'après Von Wroblewski, la composition centésimale de l'air dialysé à travers le caoutchouc (en négligeant le gaz carbonique) :

Oxygène..........	40,16
Azote..............	59,84

L'acide carbonique trouvé ici provient évidemment de la respiration; mais les proportions d'oxygène et d'azote prouvent qu'il y a eu certainement dialyse gazeuse. Et le résultat obtenu permet d'affirmer que si quelques ouvertures ont aussi donné de l'air par effusion, la quantité passée par cette voie est insensible relativement à l'autre. C'est-à-dire que de ce seul résultat nous pouvons conclure que *l'atmosphère interne de la tige de vigne n'est pas en relations sensibles avec l'extérieur par des ouvertures latérales, et qu'elle se renouvelle seulement par dialyse gazeuse à travers les parois.*

Porosité transverse. — Mais j'ai tenu à vérifier directement cette conclusion. Le 10 mars, un sarment (n° 177) de 80 centimètres de longueur totale est adapté à un tube de caoutchouc; j'ai eu auparavant la précaution d'enlever le rhytidome mort de la base avant de l'inclure, car d'autres essais m'ont montré que l'air peut filtrer par là. J'envoie de l'air comprimé à 400 millimètres de mercure. Le rameau étant plongé sous l'eau, aucune bulle ne sort de sa surface, sauf quelques-unes très petites en un point de l'extrémité organique, probablement par une légère blessure. J'enlève le rhytidome en totalité, à l'aide d'un scalpel ne coupant que très peu; puis je râcle doucement un point de la surface verte, sous l'eau : pas une bulle ne sort. J'enlève ainsi non seulement le liège, mais encore le liber, et ce n'est que lorsque j'atteins enfin la couche blanchâtre du bois que je vois apparaître de fines bulles, en files pressées. L'examen microscopique montre que dans la région

d'où ces bulles s'échappent, tout le liège et tout le liber ont été enlevés, et le bois est légèrement entamé.

Donc, dans la vigne, le bois seul semblerait poreux, et il le serait d'une manière considérable. Toutefois, il y a lieu de rechercher encore si la zone extra-ligneuse, au-dessous du liège, ne possède pas une très faible porosité.

5. Expériences sur d'autres plantes. — Étant donnés les résultats obtenus sur la vigne, j'espérais obtenir une dialyse normale de l'air sur la plupart des tiges ligneuses, au moins en faisant le vide dans le bois seul. Mais les résultats n'ont pas confirmé ces prévisions, de sorte que jusqu'à présent, au milieu des plantes ligneuses déjà nombreuses sur lesquelles j'ai expérimenté, la vigne est une exception.

J'ai essayé de faire le vide dans la tige ligneuse des plantes suivantes :

Robinia pseudo-acacia.
Glycine sinensis.
Fraxinus excelsior.
Quercus ilex.
Quercus pedunculata.
Polonia imperialis.
Aucuba Japonica.
Rubus fruticosus.
Evonymus europœus.
Cerasus Juliana.
Salix babylonica.
Salix viminalis.
Rosa (cultivé).
Sambucus nigra.
Clematis flammula.
Clematis vitalba.
Lonicera caprifolium.
Menispernum canadense.
Bambusa Simonii.

Pour ne faire le vide que dans la région ligneuse seulement, j'ai souvent pris la précaution de décortiquer profondément la base de la tige, près de la section, avant de l'introduire dans le tube de caoutchouc à faire le vide. Puis les joints et les

blessures étaient clos à la gélatine. En faisant ensuite le vide, j'ai toujours recueilli un gaz ayant une composition peu différente de celle de l'air libre. La principale différence était une proportion d'acide carbonique relativement grande provenant de la respiration des tissus. Quant à la proportion d'oxygène, elle était le plus souvent un peu moindre que dans l'air libre. Pour quelques plantes, Glycine, Ronce, Fusain, c'était le contraire : l'air reçu dans le vide était faiblement enrichi en oxygène après sa traversée dans les parois de la tige étudiée; ce qui prouve qu'il y avait eu dialyse. Mais évidemment la grande masse de l'air recueilli avait filtré à travers des ouvertures par simple effusion.

RECHERCHES SUR LA POROSITÉ DES TIGES LIGNEUSES.

6. Porosité des plantes. — En recherchant les ouvertures par lesquelles pouvait entrer l'air dans les tiges précédentes, j'ai reconnu, chez presque toutes, que *la surface n'était jamais absolument dépourvue de pores naturels ou accidentels*. J'ai fait cette recherche en changeant la dépression interne à laquelle la tige était soumise en une compression. Il suffisait pour cela de laisser le corps de la pompe à mercure se remplir d'air, puis de relever le récipient mobile de cette pompe, après avoir disposé convenablement le robinet à trois voies. L'air comprimé par le mercure arrivait à une pression de plus de 360 millimètres, passait dans la tige et s'échappait à l'état de bulles par les pores quand cette tige était submergée.

Étant donnés ces résultats, je résolus de faire une recherche méthodique de la porosité des tiges ligneuses. J'ai cessé de faire l'analyse des gaz aspirés par le vide, et me suis contenté d'envoyer dans les diverses régions des tiges sectionnées de

l'air comprimé, pour voir si cet air passait et par où il passait. Ces nouveaux essais ont porté sur les plantes suivantes :

Jasminum fruticans.
Camelia Japonica.
Evonymus europæus.
Evonymus japonicus.
Ligustrum vulgare.
Viburnum tinus.
Nerium oleander.
Vitis vinifera.
Ruscus aculeatus.
Genista pilosa.
Spiræa prunifolia.
Laurus nobilis.
Planera crenata.
Tilia argentea.
Cytisus laburnun.
Fraxinus excelsior.
Buxus sempervirens.
Aucuba Japonica.
Cratægus oxyacantha.
Juglans regia.
Bambusa simonii.
Lonicera caprifolium.
Hedera helix.
Pinus maritima.
Castanea vulgaris.
Ilex aquifolium.
Rhamnus frangula.
Ulex europæus.
Ulex nanus.
Solanun dulcamara.
Quercus pedunculata.
Quercus ilex.
Prunus spinosa.
Ulmus campestris suberosa.
Helichrysum stœchas.
Genista tinctoria.
Cerasus avium.
Prunus domestica.
Cydonia vulgaris.
Amygdalus persica (var. Persequier).
Ribes rubrum.
Lilac vulgaris.

Magnolia grandiflora.
Liriodendron tulipifera.
Prunus laurocerasus.
Ribes orientale.
Cedrus libani.
Thuiopsis dalabrata et lycopoïdes.
Taxus baccata.
Sequoia gigantea.
Abies pectinata.
Philadelphus coronarius.
Cornus mas.
Ribes orientale.
Pyrus malus.
Gincko biloba.

Je n'ai pu faire que des *essais* sur la plupart de ces plantes, et je ne puis tenter de décrire l'ensemble de ces essais. Je prendrai donc quelques types d'étude. Je donnerai d'abord comme exemple le laurier-rose, qui est un type très complet, fort différent de la vigne.

7. Laurier-rose (*Nerium oleander*): — N° 176. — Rameau très feuillé et ramifié, coupé le 9 mars, ayant 40 à 50 centimètres de longueur.

1° La base sectionnée de ce rameau est incluse directement dans un tube de caoutchouc relié d'autre part à un flacon contenant de l'air sans cesse comprimé à + 400 millimètres de mercure. Le rameau est plongé dans un grand vase de verre plein d'eau pour voir si des bulles se dégagent. Il en sort de la surface de la tige, mais uniquement par les cicatrices foliaires, pas du tout par la surface intacte (1). Cette surface n'est donc pas poreuse, au moins dans les conditions actuelles; mais on voit de grosses bulles se former au-dessous de la plupart des feuilles et se détacher de temps à autre. Ces bulles apparaissent surtout le long de la nervure médiane; mais il en apparaît aussi ailleurs, plus petites, de sorte que tout le dessous de la

(1) Dans d'autres expériences sur le laurier-rose, en avril, j'ai reconnu que quelques lenticelles, rares, donnaient des bulles.

feuille est couvert de bulles qui s'échappent de temps en temps. Il n'y en a point à la face supérieure.

2° Le caoutchouc est retiré de la base du rameau; sur cette base j'enlève l'écorce et les couches externes du bois sur une longueur d'environ 2 centimètres, et j'adapte de nouveau le caoutchouc, en le liant avec un fil de laiton. De cette manière, *le bois seul est inclus,* pas l'écorce ni le liber. L'air comprimé à + 400 millimètres est encore envoyé. Le résultat obtenu est identique au précédent : des bulles abondantes s'échappent de quelques cicatrices foliaires, des pétioles coupés et de la face inférieure des feuilles intactes, c'est-à-dire des stomates. Or, cet air comprimé n'est certainement entré que par le cylindre ligneux (bois et moelle). Il y a donc communication évidente de cette région avec les méats du parenchyme foliaire, et par là avec l'extérieur. Mais quelle est la région qui livre passage à cet air : est-ce le bois, est-ce la moelle?

3° Pour le savoir, je coupe la tige très obliquement, dans la région dépourvue de feuilles. Sur cette section très allongée, on voit alors très nettement les diverses parties de la tige, écorce [1], bois, moelle. (Voy. *fig.* 1, p. 376.)

En plongeant alors la tige sous l'eau, je vois des bulles sortir de partout sur l'entaille; *toutes les régions de la tige sont donc poreuses.* Mais elles le sont de manières fort dissemblables. L'écorce et surtout la moelle donnent de grosses bulles fréquentes. Les vaisseaux donnent des bulles petites, sous forme de files serrées, nombreuses; mais ces bulles sont tellement fines, que la masse de gaz qui sort par là est incomparablement plus faible que celle qui passe par les méats de la moelle et de l'écorce. Les bulles abondantes qui s'échappaient de la face inférieure des feuilles ne pouvaient provenir que de ces méats, non des vaisseaux. Si l'on blesse

---

[1] C'est pour abréger et faute d'un terme concis que j'emploie ce terme d'*écorce;* je l'emploie ici dans le sens qu'on lui donnait autrefois, c'est-à-dire en comprenant avec l'écorce proprement dite la région libérienne, tout ce qui est en dehors du bois.

l'écorce en un point quelconque, elle dégage des bulles grosses et fréquentes. Or, dans l'expérience actuelle, l'air comprimé n'a pu entrer que par la moelle et par le bois. Par la moelle il en passe beaucoup, par le bois très peu. Puisqu'on en reçoit beaucoup par l'écorce, celle-ci reçoit nécessairement beaucoup

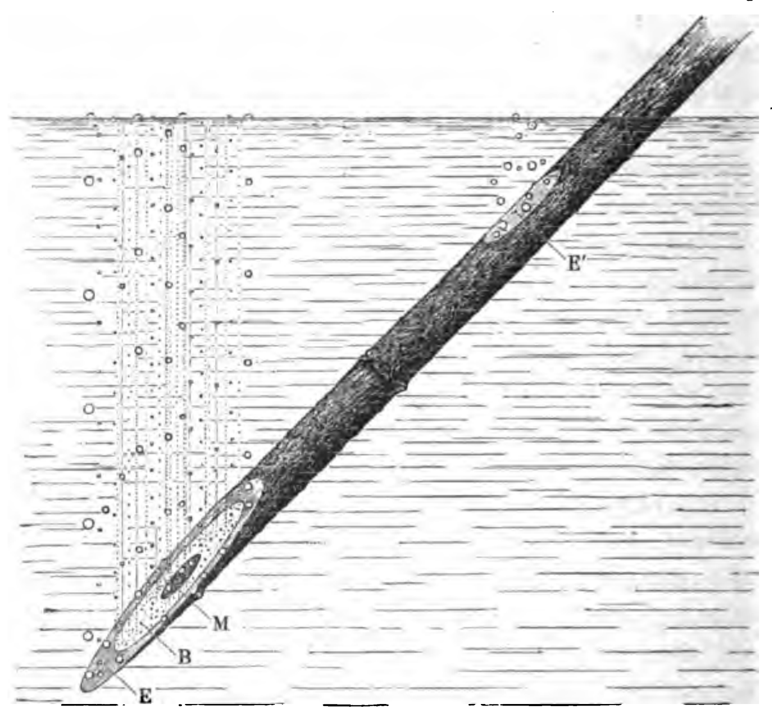


FIG. 1. — *Étude de porosité faite sur la tige du laurier-rose (Nerium oleander).* L'air que l'on y envoie sous pression ne s'échappe d'aucune portion de la surface non blessée. Il sort en grande quantité par toutes les régions entamées, ce qui est révélé par les bulles abondantes qui s'échappent en files pressées de ces régions quand on submerge le sujet. Les grosses bulles sortent de l'écorce blessée E, E' et de la moelle M. Les bulles fines sortent des vaisseaux du bois B.

d'air de la moelle, et l'on peut affirmer que *les méats médullaires sont en communication libre et assez facile avec les méats corticaux*. C'est là un fait important qui s'est confirmé pour beaucoup d'autres plantes. Les expériences ultérieures permettent même d'affirmer que les vaisseaux du bois communiquent difficilement entre eux latéralement, et probablement pas du tout avec les méats. De sorte que nous aurions ici

l'exemple de deux systèmes de cavités intimement mélangés et pourtant sans aucune communication (voy. pour le laurier-rose, § 14).

Ce résultat était prévu par l'histologie, qui ne montre jamais de communications entre les méats et les vaisseaux. Mais une interprétation inexacte d'expériences de physiologie semblait prouver que de telles communications existent. Nous voyons qu'il n'en est rien.

4° Le laurier-rose m'a permis de reconnaître aussi un fait général présentant de l'intérêt pour l'étude des échanges gazeux des tiges ligneuses.

Si sur une tige intacte l'on enlève l'écorce, par lambeaux tangentiels très minces obtenus en rasant au moyen d'un scalpel, on ne rentre pas de suite dans la région des méats corticaux. Car l'air comprimé dans la tige ne s'échappe pas du tout par la blessure. On enlève d'abord une couche brun violacé foncé, assez épaisse et résistante, puis une couche verte sous-jacente, sans voir sortir de bulles. Il faut arriver à une couche peu ou point verte, qui pourtant n'est pas ligneuse, pour voir se dégager de grosses bulles de la région corticale blessée. On voit donc que l'*atmosphère gazeuse de l'écorce, contenue dans des méats abondants, est enveloppée d'un tégument peu ou point poreux, qui joue le rôle d'une véritable cuirasse,* et sépare l'atmosphère interne, cortico-médullaire, du milieu extérieur. Ainsi la tige de laurier-rose est constituée comme un parenchyme méatifère tel que celui du tubercule de la pomme de terre; moelle et écorce forment un ensemble poreux limité par une enveloppe externe peu poreuse; Seulement, ici, ce parenchyme est incomplètement séparé en deux régions par un cylindre vasculaire épais.

En résumé, *la tige de laurier-rose présente* (au moins à l'époque considérée, en mars) *une grande porosité longitudinale grâce aux méats de la moelle et de l'écorce, qui sont en communication directe probablement par les méats des rayons médullaires.* Elle présente aussi *une porosité vascu-*

laire sensible, également longitudinale, mais bien plus faible que la porosité méatifère. Les feuilles de cette plante sont aussi très poreuses; l'air comprimé dans la tige s'échappe en quantité par la face inférieure garnie de stomates. Quand on coupe un pétiole, il sort de grosses bulles venant des méats et de fines bulles venant des vaisseaux. C'est donc certainement par les méats que l'air comprimé entre dans la feuille.

La plante tout entière présente un système aérifère intercellulaire très développé, où l'air circule assez facilement, et qui n'a guère de communications faciles avec l'extérieur que par les stomates situés à la face inférieure des feuilles.

Le fusain du Japon *(Evonymus japonicus)*, l'aucuba *(Aucuba Japonica)* et le groseillier (*Ribes rubrum* et *Ribes orientale*) se comportent d'une manière très analogue au laurier-rose; toutefois, les relations des feuilles avec la tige par les méats sont moins faciles. Je signalerai, en outre, un peu plus loin quelques expériences particulières pour ces plantes.

8. Jasmin *(Jasminum fruticans)*. — 9 mars. — Longues tiges vertes sans feuilles, possédant 6 à 7 millimètres de diamètre.

N° 173. — 1° Un tube de caoutchouc est fixé sur la base coupée d'une de ces tiges, un lien de fil de laiton le serre, et l'air comprimé à 400 millimètres est envoyé dans la tige. Celle-ci étant submergée, je reçois des bulles de la surface intacte, ce qui montre qu'une porosité sensible des téguments existe. L'écorce est blessée; elle donne aussitôt des bulles abondantes par la blessure, ce qui prouve que la porosité des parties profondes est beaucoup plus grande que la porosité superficielle. Ces bulles sortent même quand la blessure est faite à grande distance de la base où arrive l'air comprimé : l'air circule donc facilement par les méats corticaux dans le sens longitudinal.

En coupant obliquement la tige, je vois sortir, indépendamment des grosses bulles corticales, de fines bulles qui sortent des vaisseaux, et seulement des vaisseaux qui entourent la moelle. Pas une bulle ne sort de la moelle.

2° Nouvel essai fait en enlevant à la base du rameau, sur une faible longueur, l'écorce et un peu de bois pour adapter directement le tube de caoutchouc sur le bois. Les bulles ne sortent plus uniquement que par les vaisseaux, par une zone étroite périmédullaire; pas du tout par la moelle ni par l'écorce. Si nous rapprochons ce résultat de celui obtenu sur les plantes précédentes, nous en conclurons que *l'air ne peut arriver à l'écorce par les vaisseaux, mais seulement par les méats.* Ici la porosité médullaire étant nulle, le passage ne peut avoir lieu, grâce à la précaution prise de n'envoyer l'air comprimé que dans la région vasculo-médullaire.

N° 185 (12 mars). — Un fragment d'une tige de jasmin de 20 centimètres de longueur est inclus avec son écorce dans un tube de caoutchouc. Son bout libre est taillé en biseau allongé de 5 centimètres de longueur. On voit alors, par l'air comprimé, que des bulles périmédullaires abondantes s'échappent du bois, ainsi que de grosses bulles de l'écorce.

1° J'entame alors le fragment, vers son milieu, par une entaille profonde, dépassant la moelle, de manière à couper presque tous les vaisseaux et l'écorce en même temps. Sans m'occuper des bulles qui s'échappent nécessairement de l'entaille, je remarque que, sur la section terminale, les bulles d'origine vasculaire disparaissent entièrement du côté correspondant à l'entaille. Pour les parties profondes, non entamées, chaque filet de bulles reste invariable; les bulles ne diminuent pas. En approfondissant de plus en plus l'entaille ainsi faite, je supprime successivement et brusquement toutes les bulles vasculaires. A la fin, le bout libre ne tient plus au bout inclus que par un fragment de bois d'un millimètre au plus d'épaisseur et un lambeau d'écorce de 2 millimètres de largeur : il ne sort plus de la section en biseau que deux ou trois filets de

bulles vasculaires, qui disparaissent successivement et subitement, sans diminution préalable, quand on scie doucement le reste du bois. On doit conclure de ceci ce fait important :

Chaque vaisseau est une cavité rectiligne close sans relations transverses sensibles avec les vaisseaux voisins, non plus qu'avec les méats corticaux.

2° Les bulles d'origine corticale se comportent tout différemment. On peut faire sortir des bulles d'une région quelconque de l'écorce, au delà de l'entaille, en faisant une blessure, même quand cette blessure est située directement sur la même génératrice que l'entaille. Les bulles sortent facilement tant qu'il reste un lambeau d'écorce, même très étroit, respecté par l'entaille. Ceci montre que cette écorce est poreuse dans tous les sens, et non pas seulement d'une manière rectiligne longitudinale. Pour interrompre les bulles sortant d'une petite blessure de l'écorce, il faut faire dans l'écorce un circuit complet, avec la pointe d'un canif, autour de cette blessure; de cette manière, on coupe le trajet de tous les méats. Mais aussitôt que les bulles cessent à l'intérieur du circuit tracé, une nouvelle série de bulles apparaissent sortant d'un point quelconque de ce circuit blessant l'écorce. On doit conclure de ceci que :

L'écorce du jasmin possède une porosité complète par ses méats, en libre communication les uns avec les autres dans tous les sens.

Toutefois, les relations avec l'extérieur paraissent rares et difficiles, comme nous l'avons déjà dit. On peut voir en effet, si tout est intact, écorce et le reste, que les bulles sortant de la surface de la tige sont rares. L'écorce en donne quelques-unes, en des points divers, principalement dans les régions nodales. Il n'y a pas de lenticelles apparentes. Donc :

La porosité de l'enveloppe externe du jasmin est très faible, comparativement à celle de l'écorce sous-jacente.

Cette écorce doit donc contenir une atmosphère interne de composition spéciale.

9. Nouvelles expériences sur la vigne *(Vitis vinifera)*. — Il est facile de vérifier sur la vigne le fait trouvé sur le jasmin : chaque vaisseau y constitue aussi une cavité parallèle à l'axe, sans relations sensibles avec celle des vaisseaux voisins.

N° 186 (12 mars). — Un sarment de 1 mètre de long, recevant de l'air comprimé, dégage des bulles abondantes par la section opposée. Par une entaille profonde, en forme de coin, pratiquée sur un côté, on arrête toutes les bulles d'une moitié de la section. En pratiquant une deuxième entaille, loin de la première et sur le côté opposé, on arrête les bulles sur la totalité de cette section. C'est que le trajet rectiligne de tous les vaisseaux a été coupé quelque part. Il faut, pour être guidé sur le choix du côté à entailler, considérer la disposition bilatérale des bourgeons. Le résultat est donc le même que pour le jasmin. Toutefois, si les entailles sont distantes de plus de 50 centimètres et que l'on prenne la précaution de les fermer avec du mastic Golaz fondu, le résultat n'est plus si constant. Pour bien fermer l'entaille au mastic Golaz, il faut que cette entaille soit en forme de coin et l'enduire de mastic fondu en pratiquant une aspiration énergique par l'extrémité coupée de la tige. Alors le mastic fondu pénètre un peu dans chaque vaisseau avant de s'y solidifier, et le ferme hermétiquement. Dans ces conditions, on voit sortir quelques bulles par la section terminale libre, quoique le trajet rectiligne de tous les vaisseaux ait été interrompu quelque part. Il y a donc des communications latérales certaines d'un vaisseau aux vaisseaux voisins. Toutefois, la petite quantité d'air qui circule ainsi montre que *les communications latérales des vaisseaux sont incomparablement plus difficiles que le libre parcours rectiligne dans un vaisseau bien intact.* J'ai trouvé des faits analogues sur toutes les plantes que j'ai étudiées, en particulier sur le laurier-rose (voy. § 14, n° 256).

10. Bambou *(Bambusa Simonii)*. — N° 169 (1er mars). — Tige ramifiée et feuillée, de 2m,50 de longueur, ayant à la

section de base 8 millimètres de diamètre, et possédant une cavité médullaire internodale de 4 millimètres de diamètre. Les entre-nœuds ont une longueur variable, 20 à 25 centimètres, et la cavité qui les traverse est coupée aux nœuds par des diaphragmes durs et épais de 3 millimètres au minimum. La section de base de ce sujet est fixée dans un tube de caoutchouc, l'air comprimé à +400 millimètres y est envoyé.

Il sort des bulles de la surface intacte, mais uniquement aux nœuds. Ces bulles s'échappent de dessous les bases de gaines foliaires mortifiées. En coupant celles-ci, on voit les bulles sortir par les sections de ces gaines foliaires, assez abondantes.

En plongeant le sommet du sujet dans l'eau avec ses feuilles, aucune bulle ne sort. En coupant ensuite les feuilles, puis les rameaux, je vois les bulles sortir par la section de la tige, à environ 2 mètres de la base; rien ne sort pour une distance plus grande. La pression (de +400 millimètres à la base) se transmet donc dans ce sujet à environ 2 mètres de distance. Les bulles sortent simultanément par les vaisseaux et par la cavité médullaire.

N° 195. — Autre fragment du même Bambou, expérimenté seulement le 17 mars, et plus ou moins desséché dans le laboratoire. — Ce fragment a une longueur de 30 centimètres, un diamètre externe de 10 à 11 millimètres, et un diamètre interne de 5 millimètres (cavité médullaire). Un seul nœud interrompt la cavité.

Examen préalable. — En soufflant à l'une des extrémités de ce fragment, je vois sortir des bulles abondantes par l'autre bout. Les unes sont très grosses, assez fréquentes; elles sortent de la cavité médullaire, dont elles ont le diamètre. Les autres sortent des vaisseaux; elles sont petites, mais encore volumineuses, relativement à ce que donnent ordinairement les vaisseaux des plantes; elles atteignent bien jusqu'à 1 millimètre de diamètre. Elles sont extrêmement abondantes, par toute la section du bois.

1° Je ferme entièrement au mastic une extrémité, sauf une

ouverture donnant accès dans la cavité médullaire, et j'envoie par là l'air comprimé. Il ne sort plus une seule bulle par les vaisseaux, même en blessant le bois très près de la base. Il sort, au contraire, de grosses bulles médullaires, aussi abondantes qu'auparavant. *La cavité médullaire est donc absolument sans aucune communication avec les vaisseaux,* pour une compression de $+400$ millimètres de mercure. *Mais d'un entre-nœud à l'autre les cavités médullaires communiquent assez facilement, malgré l'existence d'un diaphragme épais de 3 millimètres.*

En plongeant sous l'eau tout le sujet, j'observe qu'il sort des bulles par la surface nodale intacte, au-dessous de la gaine foliaire. Ces bulles sont abondantes, mais elles se détachent rarement. *Il y a donc à la surface du nœud une communication faible de la cavité médullaire avec l'extérieur,* évidemment par des méats, puisqu'il n'y a pas du tout communication avec les vaisseaux.

Le reste de la surface de la tige, c'est-à-dire la surface verte, lisse et intacte des entre-nœuds, ne donne pas une seule bulle. *Il paraît donc n'y avoir aucune communication par des ouvertures, entre la cavité médullaire et l'extérieur, sauf aux nœuds.*

2° J'établis une disposition inverse, c'est-à-dire que je clos la cavité médullaire seule, non les vaisseaux. Pour cela, je clos toute la section, puis j'enlève circulairement le mastic et recoupe les vaisseaux avec un couteau, sans pénétrer jusqu'à la moelle. En insufflant alors l'air par cette même extrémité, je vois sortir des bulles extrêmement abondantes, pas très petites, par l'autre extrémité; elles sortent uniquement des vaisseaux. Toutefois, leur abondance gêne un peu l'observation : il pourrait en sortir par la moelle sans que je m'en aperçoive avec certitude. Alors je referme tous les vaisseaux de la section de base avec du mastic, sauf ceux d'une très petite portion de la section. Puis j'envoie de nouveau l'air comprimé par cette section. Il ne sort plus que très peu de

tube de caoutchouc; celui-ci est serré par un fil de laiton, et l'air comprimé à +400 millimètres y est envoyé. Le sujet étant entièrement submergé, aucune bulle ne sort de nulle part, ni des rameaux ni des parties foliacées, pendant une heure et demie.

La tige est coupée obliquement : il se dégage aussitôt des bulles. Ces bulles sortent uniquement par la section de l'écorce, pas une seule par le bois. Elles sortent tantôt en files serrées de bulles petites et abondantes, tantôt en bulles grosses, se détachant rarement. *Cette porosité longitudinale de la partie corticale verte du fragon, quoique faible, se fait sentir jusqu'à plus de 20 centimètres de distance,* avec la pression actuelle. Pour trouver des bulles se dégageant du bois, il faut que la section arrive à 5 ou 6 centimètres seulement de la base qui reçoit l'air comprimé.

En résumé, *la tige de fragon* (Ruscus aculeatus) *n'est pas du tout poreuse par le bois sur des longueurs dépassant un demi-décimètre. Elle est un peu poreuse par sa région verte corticale, mais les méats de cette région ne semblent pas s'ouvrir vers l'extérieur, du moins pour les pressions employées ici.*

16. Aubépine *(Cratægus oxyacantha).* — N° 193 (16 mars). — Branche très ramifiée, garnie de bourgeons feuillés. L'air comprimé à +400 millimètres y étant envoyé, et le sujet étant submergé, j'obtiens des bulles de la surface intacte en quelques points seulement. Si l'on coupe les rameaux, même tout à fait à l'extrémité, la section dégage aussitôt des bulles. Ces bulles sortent par les vaisseaux. Les blessures corticales ne donnent pas de bulles, ou de très rares.

La porosité du Cratægus est donc essentiellement vasculaire.

17. If *(Taxus baccata).* — N° 234 (5 avril). — Une branche d'if, ramifiée, ayant une base de la grosseur du doigt, reçoit

par la section de cette base l'air comprimé à +400 millimètres. Il ne sort que de rares bulles par l'écorce intacte, quand le sujet est submergé, près de la base. Quand on blesse l'écorce, il sort des bulles assez abondantes, montrant que cette écorce possède une porosité manifeste, quoique faible. Cette porosité se fait un peu sentir à certaines feuilles, car, en coupant celles-ci, on voit se former sur la section une bullette qui grossit, mais ne se détache guère. La section des rameaux verts, portant les feuilles en disposition distique, donne plus souvent des bulles, surtout s'il s'agit de rameaux avoisinant la base où arrive l'air comprimé. L'écorce des rameaux plus gros, non feuillés, a une porosité sensiblement longitudinale, et permet de faire une observation intéressante. Cette écorce se sépare facilement du bois par sa face interne. A 15 centimètres de la base, j'en soulève un lambeau de 7 centimètres de long, rattaché au rameau seulement du côté où arrive l'air comprimé.

En submergeant, je vois alors que ce lambeau d'écorce dégage des bulles seulement par sa périphérie, pas du tout par sa face interne, non plus que par sa face externe. Il s'en dégage même par son extrémité la plus éloignée, à 7 centimètres de distance. Ce fait prouve que *le système aérifère de cette écorce est contenu entre deux parois, l'une externe, l'autre interne, peu ou point poreuses.* (Au microscope, je reconnais que la paroi interne de ce lambeau cortical est constituée par du cambium très épais. Le liber est donc compris dans cette lame, que j'appelle écorce pour abréger.)

Quant au bois, il est poreux, mais très peu : des bulles presque invisibles tellement elles sont fines, mais nombreuses, sortent d'une section faite à plus de 30 centimètres de la base. Rien ne sort par la moelle.

Les autres gymnospermes m'ont donné des résultats analogues aux précédents. La porosité corticale existe toujours, parfois assez considérable, comme chez certains *Pinus*, d'autres fois très faible, comme dans le *Gincko*.

bulles; ces bulles s'échappent en files aussi pressées qu'auparavant d'une petite surface de l'extrémité libre située du même côté que celle où les vaisseaux sont restés ouverts. *Il y a donc continuité parfaite des vaisseaux dans toute la longueur du sujet, sans communications latérales avec les vaisseaux voisins, malgré l'existence d'un nœud.*

Il ne sort aucune bulle par la moelle.

Mais j'aperçois quelques bulles qui s'échappent de la surface intacte du nœud, comme dans le cas précédent, mais beaucoup moins nombreuses. Peut-être que ces bulles ne viennent pas des vaisseaux, mais des méats coupés en même temps que le bois.

3° Ces deux expériences sont réunies en une seule. Je ferme les deux extrémités; à l'une la moelle est ouverte, à l'autre ce sont les vaisseaux. En envoyant alors l'air comprimé par la cavité médullaire, il ne sort plus de bulles que par la surface intacte du nœud. Cette dernière expérience prouve mieux encore que les précédentes que la cavité médullaire est entièrement dépourvue de communications avec les vaisseaux. En effet, cette cavité est tout entière remplie d'air comprimé à 400 millimètres de mercure; les vaisseaux qui l'entourent s'ouvrent librement dans l'eau; s'il y passait la plus faible quantité d'air, on verrait au moins quelques rares bulles se dégager. Aucune ne sort : la séparation est donc absolue.

11. Chèvrefeuille (*Lonicera caprifolium*). — N° 196 (19 mars 1894). — Des tiges de 5 millimètres de diamètre sont essayées. Elles sont couvertes d'un rhytidome foliacé, mince, qu'on enlève facilement. En coupant, on voit que les entre-nœuds sont creux pour la plupart, la moelle ayant disparu et laissant une cavité de moins d'un millimètre de diamètre. Cette cavité est interrompue aux nœuds d'une manière parfaite. Si l'on souffle, en effet, dans un tronçon possédant un entre-nœuds, la moelle ne paraît plus guère donner de bulles, tandis que le bois en donne d'abondantes, quoique petites.

Toutefois, si, au lieu de l'insufflation buccale, on emploie l'air comprimé artificiellement à 400 millimètres de mercure, le résultat obtenu est différent. Il est facile d'envoyer cet air comprimé dans la cavité médullaire exclusivement. Il suffit d'enfoncer dans celle-ci, à frottement dur, un tube de verre effilé par où arrive l'air sous pression. Il faut éviter de mettre du mastic, ou le faire avec un soin extrême, car, si l'air comprimé reflue en arrière, il peut s'insinuer entre le mastic et la section et pénétrer dans les vaisseaux. Au contraire, en se contentant d'enfoncer le tube à frottement dur dans la cavité, cet inconvénient ne peut avoir lieu : il peut y avoir tout au plus perte d'un peu d'air et de pression, si le joint n'est pas bien hermétique.

En envoyant ainsi de l'air dans la cavité médullaire seule, on voit que le diaphragme nodal n'est pas une séparation absolue; car des bulles rares et grosses sortent bientôt à l'extrémité libre, *par la cavité médullaire seule.* Il n'en sort pas du tout par les vaisseaux. Donc :

Dans le Lonicera, comme dans le Bambusa, les cavités médullaires communiquent faiblement d'un entre-nœuds à l'autre, malgré les nœuds, mais pas du tout avec les vaisseaux.

12. Vigne *(Vitis vinifera).* — Peut-être que dans la vigne les vaisseaux *d'un même faisceau* peuvent communiquer entre eux? C'est à l'expérience à le décider. Voici une observation qui répond en partie à la question :

N° 249. — Rameau desséché. — J'introduis la pointe très fine d'un tube effilé dans un vaisseau, à frottement dur. Après avoir assemblé avec beaucoup de précaution le tube au rameau par un lien rigide, pour éviter de casser la pointe, je possède un dispositif qui me permet d'insuffler de l'air *dans un seul vaisseau,* et, par conséquent, de chercher s'il existe des communications avec les vaisseaux les plus voisins. Le tube de verre étant relié à l'appareil d'où vient l'air comprimé à

400 millimètres de mercure, le bout libre du sarment est plongé dans l'eau. Aussitôt que l'air comprimé arrive, un ***unique*** filet de bulles s'échappe d'un vaisseau : sur un trajet de 35 centimètres, ce vaisseau représentait donc une cavité ayant peu ou point de relations avec celles des vaisseaux voisins.

13. *Aucuba japonica.* — L'*Aucuba japonica* m'a permis de faire des expériences très analogues à celles faites sur le laurier-rose; l'écorce et la moelle sont très poreuses, le bois l'est peu. Je ne les raconterai pas. Mais le fait suivant mérite d'être signalé :

N° 250 (9 avril). — Un fragment de tige de 29 centimètres de long et 10 à 12 millimètres d'épaisseur est dans l'eau depuis plusieurs jours, à la lumière, entièrement submergé. Sa surface est très verte. Au soleil, on observe le dégagement régulier de bulles par deux ou trois points de l'écorce; ces bulles sont d'environ 1/2 à 1 millimètre de diamètre et se suivent à moins d'un centimètre de distance. Si l'on interpose un écran, le dégagement diminue peu à peu, les bulles deviennent distantes, sans disparaître entièrement. En un mot, cette tige submergée d'*Aucuba*, plante terrestre, se comporte absolument comme une plante aquatique : les gaz mis en pression par l'assimilation chlorophyllienne cheminent dans le système intercellulaire et s'échappent par les ouvertures accidentelles. Ce fait correspond à la grande porosité cortico-médullaire de la tige de cette plante.

14. Nouvelles expériences sur le Laurier-rose *(Nerium oleander).* (Voy. § 7.) — Ces nouveaux essais sont destinés à distinguer plus nettement la porosité par les méats de la porosité par les vaisseaux; et aussi à vérifier si chaque vaisseau représente à lui seul une cavité rectiligne à peu près close, comme pour les plantes précédemment étudiées.

N° 252 (11 avril 1894). — Un fragment de branche de laurier-rose de 15 centimètres de longueur et de 7 millimètres de

diamètre est terminé par une section normale à l'un des bouts, oblique à l'autre. Un tube de verre à pointe effilée est enfoncé dans la moelle de la section droite. Comme toujours, une cavité préalable a été pratiquée dans cette moelle en y enfonçant une fine aiguille, et le tube effilé y est introduit jusqu'à ce que sa partie conique, renflée, produise par frottement serré une fermeture suffisante. Dans ces conditions, l'air insufflé par le tube effilé ne peut refluer en arrière, il se répand nécessairement dans les méats de la moelle.

1° L'appareil étant ainsi disposé, j'envoie dans la moelle de l'air comprimé à 400 millimètres; aussitôt j'obtiens à l'autre extrémité de la tige plongée dans l'eau un filet de bulles assez grosses et abondantes. Ces bulles sortent tout d'abord par la moelle seulement; puis, un autre filet de bulles semblables sort par la section de l'écorce. *Il ne sort pas une seule bulle du bois* à aucun moment. Si l'écorce est blessée ailleurs, elle dégage d'autres bulles abondantes par la blessure.

Cette fois-ci, l'air n'est entré que par la moelle seule; il sort certainement par l'écorce. Il a donc évidemment traversé l'anneau ligneux. Mais puisque les vaisseaux ne dégagent pas la moindre bulle (quoiqu'ils soient très susceptibles d'en dégager si on y envoie directement l'air comprimé), *il n'y a aucune communication facile entre les méats cortico-médullaires et les vaisseaux; il y a au contraire une communication facile entre la moelle et l'écorce.*

Par conséquent, *l'air circule de la moelle à l'écorce, non par les vaisseaux, mais par les méats du bois.*

N° 253. — Quand on envoie l'air comprimé, même à une pression bien moindre que 400 millimètres, sur l'ensemble du bois et de la moelle, après décortication de la base du sujet, on obtient des bulles abondantes, non seulement par la moelle, mais encore par tout le bois. On peut auparavant clore la moelle, en y enfonçant, par exemple, à frottement dur, un petit tube clos en forme de cône allongé. Dans ce cas, la section de la tige ne dégage plus de grosses bulles médullaires.

Mais les bulles d'origine vasculaire sont aussi abondantes. On a donc, dans ce cas, une expérience inverse de la précédente : air comprimé dans les vaisseaux seuls, à l'exclusion des méats. Toutefois, cette expérience est moins rigoureuse que la précédente, car il est évident que le bois contient des méats, puisque la moelle communique avec l'écorce. C'est pour cela, sans doute, qu'il se dégage aussi des bulles d'origine corticale, assez abondantes. Dans l'expérience actuelle, j'observe en particulier 4 lenticelles qui donnent de fines bulles pressées. Par les blessures, l'écorce donne de plus grosses bulles.

Il est facile maintenant de comprendre que, sur le laurier-rose, il est fort difficile, sinon impossible, de distinguer d'une manière absolue, par l'expérience, le système intracellulaire (vasculaire) du système intercellulaire (méatifère). Car, théoriquement, le bois contenant des méats et des vaisseaux, on doit toujours obtenir des bulles par cette région, quand elle est coupée, quel que soit, du reste, le système dans lequel l'air est comprimé. Si, dans la première expérience, les bulles ne se sont pas dégagées du système intercellulaire du bois, c'est que des ouvertures plus larges, plus faciles, moins closes par la capillarité, existaient dans la moelle et dans l'écorce.

Dans les expériences suivantes, j'ai cherché à fermer entièrement l'un des systèmes aérifères, où j'envoyais l'air comprimé, de manière à ce que l'air pût s'y amasser sous pression et sortir, si cela est possible, par l'autre système.

N° 254. — Un fragment de tige de laurier-rose de 10 centimètres de longueur et de 7 centimètres de diamètre est préparé comme l'indique la figure 2. — J'ai cherché à clore à l'un des bouts, en AB, les méats médullaires, et en CD les méats corticaux, tout en laissant une portion BC de bois à nu. A l'autre extrémité, les méats corticaux sont également clos, en FG, et un tube effilé est enfoncé dans la moelle. Pour obtenir une cavité convenable dans celle-ci, je l'ai percée suivant l'axe avec une aiguille rougie au feu. De cette manière, les éléments cellulaires étant détruits sur une certaine profondeur, et non

pas rapprochés par compression mécanique sur les parois de la cavité artificielle, j'obtiens une cavité plus parfaite que pour le sujet n° 252; cette cavité est en communication parfaite avec les méats de la moelle, comme plusieurs expériences préalables me l'ont démontré.

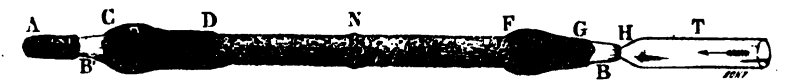


FIG. 2. — *Indépendance des vaisseaux et des méats.* Fragment d'une tige de laurier-rose dont les deux extrémités, taillées en pointe, ont été partiellement mastiquées. Par le tube T on peut envoyer de l'air comprimé dans la moelle seule. Par la région B' on peut l'envoyer dans le bois. C D, F G, blessures corticales oblitérées.

1° Un tube effilé, court, est enfoncé jusqu'à frottement dur de sa partie conique dans cette cavité, et l'air comprimé à +400 millimètres est alors envoyé par là dans la moelle. Aucune bulle ne se dégage d'abord. Puis, quelques bulles rares et petites s'échappent de dessous l'un des joints. Ensuite il en apparaît *sur les sections du bois, aux deux extrémités.* Ces bulles sont éparses, elles grossissent quelque temps avant de se détacher, un peu comme celles qui sortent des stomates au-dessous des feuilles, dans d'autres expériences. Elles ne peuvent provenir que des méats des rayons médullaires, non des vaisseaux. A la fin, il suffit d'une pression de 65 millimètres de mercure pour les voir apparaître. Elles forment, à la longue, quelques files régulières de bulles petites.

2° Je change le sujet de bout, j'envoie l'air comprimé dans le bois seul (en BC). Il sort aussitôt des bulles fines, beaucoup plus abondantes et plus pressées que dans le cas précédent, par toute l'autre section du bois. Ces bulles ont tout à fait le caractère de celles qui sortent des sections de vaisseaux ligneux : *files pressées de bulles très fines.* Il en sort aussi par la moelle, grosses, assez abondantes : l'air qui donne ces bulles a dû rentrer par les ouvertures qui donnaient les bulles rares et grosses tout à l'heure, les méats des rayons médullaires.

Dans cette seconde expérience, il est impossible, comme

dans la première, de n'envoyer de l'air que dans l'un des deux systèmes aérifères. Dans la première, cela était facile par la moelle. Dans la seconde, le bois, contenant à la fois des vaisseaux et des méats, cette distinction n'est plus possible.

J'ai tenu cependant à donner la description de ces expériences comme méthode applicable à d'autres cas.

N° 256. — Un nouveau sujet de laurier-rose est étudié au point de vue de la porosité vasculaire seule. Il s'agit de voir si les vaisseaux communiquent entre eux (*fig.* 3).

Une entaille, en coin très ouvert, est faite sur l'un des côtés, jusqu'au delà de la moelle, et fermée au mastic Golaz. En envoyant alors l'air comprimé, on ne reçoit plus de bulles sur la section terminale, que seulement du côté opposé à celui où l'entaille a été faite. Du côté de l'entaille, plus une seule bulle ne sort, comme dans le cas du jasmin (§ 8, n° 185), de la vigne (§ 9, n° 186), du bambou (§ 10, n° 195, 2°), et de bien d'autres plantes. C'est qu'on a coupé les vaisseaux de ce côté, et que les vaisseaux voisins, respectés, ne leur fournissent pas l'air comprimé qu'ils reçoivent.

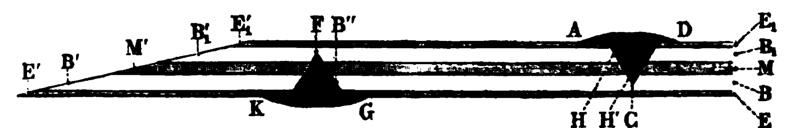


FIG. 3. — *Les cavités des vaisseaux n'ont pas de communications latérales sensibles.* Fragment de tige ligneuse supposé coupé en long, après l'expérience. M M' moelle, B B', B_1 B'_1 bois, E E', $E_1E'_1$ région corticale, A C D première entaille profonde dépassant la moelle, R F G deuxième entaille profonde. L'air comprimé dans les vaisseaux en B arrive jusqu'en B'' à la partie inférieure de la figure. Il n'a aucune communication latérale avec les vaisseaux de la partie supérieure de la figure, entre les deux entailles, car aucune bulle ne se dégage en B'_1.

Une deuxième entaille en coin, pratiquée loin de la première, et sur le côté opposé, est faite et clôturée au mastic. Plus une seule bulle ne se dégage par la section du bois. Il en sort par l'écorce et par la moelle, quoique celle-ci ait été deux fois entièrement tranchée par les entailles cunéiformes. Ce dernier fait prouve que *la moelle et l'écorce ont entre elles des communications faciles, et que la porosité longitudinale n'est pas uniquement rectiligne.* Le premier, au contraire,

prouve que *les vaisseaux ne communiquent pas du tout entre eux, même pour une pression de + 400 millimètres de mercure, et que leur porosité est exclusivement rectiligne.*

L'expérience suivante prouve que l'air comprimé dans un seul vaisseau ne sort que par une seule ouverture à l'autre extrémité du fragment de tige de laurier-rose.

N° 259. — En enfonçant une aiguille rougie dans le bois seul, j'obtiens une cavité où j'introduis à frottement un tube courtement effilé. En envoyant alors de l'air comprimé par cette étroite cavité, j'obtiens des bulles par la section opposée. Ces bulles sortent par un seul point de la section du bois; elles forment une série, si du moins la cavité où arrive l'air comprimé est très étroite. Si la cavité arrive à avoir environ 1 millimètre de diamètre à l'entrée, elle s'ouvre dans plusieurs vaisseaux, car on voit sortir à l'extrémité opposée, à 13 centimètres de distance, trois séries de bulles.

Le rameau employé n'avait que 6 millimètres de diamètre. Un rameau plus volumineux serait préférable : on arriverait peut-être à rencontrer des vaisseaux assez larges pour pouvoir y enfoncer un tube très effilé. Quoi qu'il en soit, cette expérience prouve que la seule communication facile, dans une file de cellules formant un vaisseau, est la direction rectiligne; *les communications transverses sont fort difficiles, sinon impossibles, d'un vaisseau à l'autre,* pour l'air à l'état gazeux.

15. Expériences faites sur des tiges à tissus peu poreux. — Les expériences à résultats négatifs ou peu marqués ne peuvent être très détaillées, car elles présentent assez d'uniformité. Je ne citerai que deux ou trois exemples des essais assez nombreux faits sur les tiges dont le bois ou bien l'écorce étaient peu poreux.

Fragon *(Ruscus aculeatus)*. — N° 179 (10 mars). — Tige ramifiée. La base, récemment coupée, est enfoncée dans un

tube de caoutchouc; celui-ci est serré par un fil de laiton, et l'air comprimé à $+400$ millimètres y est envoyé. Le sujet étant entièrement submergé, aucune bulle ne sort de nulle part, ni des rameaux ni des parties foliacées, pendant une heure et demie.

La tige est coupée obliquement : il se dégage aussitôt des bulles. Ces bulles sortent uniquement par la section de l'écorce, pas une seule par le bois. Elles sortent tantôt en files serrées de bulles petites et abondantes, tantôt en bulles grosses, se détachant rarement. *Cette porosité longitudinale de la partie corticale verte du fragon, quoique faible, se fait sentir jusqu'à plus de 20 centimètres de distance,* avec la pression actuelle. Pour trouver des bulles se dégageant du bois, il faut que la section arrive à 5 ou 6 centimètres seulement de la base qui reçoit l'air comprimé.

En résumé, *la tige de fragon* (Ruscus aculeatus) *n'est pas du tout poreuse par le bois sur des longueurs dépassant un demi-décimètre. Elle est un peu poreuse par sa région verte corticale, mais les méats de cette région ne semblent pas s'ouvrir vers l'extérieur, du moins pour les pressions employées ici.*

16. Aubépine *(Cratægus oxyacantha).* — N° 193 (16 mars). — Branche très ramifiée, garnie de bourgeons feuillés. L'air comprimé à $+400$ millimètres y étant envoyé, et le sujet étant submergé, j'obtiens des bulles de la surface intacte en quelques points seulement. Si l'on coupe les rameaux, même tout à fait à l'extrémité, la section dégage aussitôt des bulles. Ces bulles sortent par les vaisseaux. Les blessures corticales ne donnent pas de bulles, ou de très rares.

La porosité du Cratægus est donc essentiellement vasculaire.

17. If *(Taxus baccata).* — N° 234 (5 avril). — Une branche d'if, ramifiée, ayant une base de la grosseur du doigt, reçoit

par la section de cette base l'air comprimé à +400 millimètres. Il ne sort que de rares bulles par l'écorce intacte, quand le sujet est submergé, près de la base. Quand on blesse l'écorce, il sort des bulles assez abondantes, montrant que cette écorce possède une porosité manifeste, quoique faible. Cette porosité se fait un peu sentir à certaines feuilles, car, en coupant celles-ci, on voit se former sur la section une bullette qui grossit, mais ne se détache guère. La section des rameaux verts, portant les feuilles en disposition distique, donne plus souvent des bulles, surtout s'il s'agit de rameaux avoisinant la base où arrive l'air comprimé. L'écorce des rameaux plus gros, non feuillés, a une porosité sensiblement longitudinale, et permet de faire une observation intéressante. Cette écorce se sépare facilement du bois par sa face interne. A 15 centimètres de la base, j'en soulève un lambeau de 7 centimètres de long, rattaché au rameau seulement du côté où arrive l'air comprimé.

En submergeant, je vois alors que ce lambeau d'écorce dégage des bulles seulement par sa périphérie, pas du tout par sa face interne, non plus que par sa face externe. Il s'en dégage même par son extrémité la plus éloignée, à 7 centimètres de distance. Ce fait prouve que *le système aérifère de cette écorce est contenu entre deux parois, l'une externe, l'autre interne, peu ou point poreuses.* (Au microscope, je reconnais que la paroi interne de ce lambeau cortical est constituée par du cambium très épais. Le liber est donc compris dans cette lame, que j'appelle écorce pour abréger.)

Quant au bois, il est poreux, mais très peu : des bulles presque invisibles tellement elles sont fines, mais nombreuses, sortent d'une section faite à plus de 30 centimètres de la base. Rien ne sort par la moelle.

Les autres gymnospermes m'ont donné des résultats analogues aux précédents. La porosité corticale existe toujours, parfois assez considérable, comme chez certains *Pinus*, d'autres fois très faible, comme dans le *Gincko*.

18. Résumé des essais de porosité faits sur les tiges ligneuses. — On voit par l'ensemble de ce qui précède qu'une grande variabilité existe dans la nature, le sens et la grandeur de la porosité des diverses régions des tiges ligneuses. Il faut toujours y distinguer les trois régions : moelle, bois et écorce (ou région correspondante). Dans ce qui précède, j'ai donné surtout des détails sur les expériences faites avec des tiges très poreuses dans toutes leurs parties ou bien dans une seule (bois de la vigne). Mais si la porosité est plus faible, en général, sur les tiges des autres espèces étudiées, elle n'est jamais nulle, quoique parfois très faible, dans aucune plante, quel que soit le groupe (Dicotylédones, Monocotylédones ou Gymnospermes). Quand la tige est très peu poreuse, il faut expérimenter sur des fragments courts, avec de fortes pressions.

La porosité des tiges ligneuses doit être distinguée, suivant son siège, en *vasculaire* et en *méatifère,* ou, si l'on préfère, en *intracellulaire* et en *intercellulaire.*

Les deux systèmes aérifères, siège de ces deux porosités, *n'ont jamais aucune communication l'un avec l'autre, quoique souvent ils soient intimement mélangés;* autant du moins que les conditions expérimentales ont pu le faire voir.

Le système méatifère est le plus souvent répandu dans l'écorce, mais on le rencontre aussi assez souvent dans la moelle, et alors il est d'ordinaire relié à sa partie corticale par des méats étroits traversant le bois.

Tous ces méats communiquent entre eux dans tous les sens, mais surtout dans le sens longitudinal. *Vers l'extérieur, les méats s'ouvrent en général par très peu d'ouvertures, de sorte que les téguments de la tige (épiderme ou périderme) constituent une paroi peu poreuse enfermant dans un ensemble poreux une atmosphère confinée.*

Les vaisseaux du bois ne paraissent pas seulement entièrement séparés des méats ; *chaque vaisseau constitue une petite cavité ordinairement très longue n'ayant, au point de vue*

des gaz qu'elle contient, que des communications fort difficiles avec les cavités des vaisseaux voisins.

On voit que les expériences de physiologie confirment dans tous les détails ce qu'enseigne l'histologie, en y ajoutant quelques particularités intéressantes. Je n'indiquerai pas dans ce travail l'histologie des tiges étudiées.

Grandeur relative de la porosité. — Les essais que j'ai faits ne pouvaient permettre que des appréciations fort approximatives sur la grandeur de la porosité. Cependant ils m'ont permis de reconnaître que pour quelques plantes cette porosité, soit vasculaire, soit méatifère, est notablement plus grande qu'on ne l'admet généralement chez les plantes terrestres; la porosité méatifère de l'écorce et de la moelle en particulier se transmet, parfois, jusque dans les feuilles. Néanmoins la porosité des tissus des plantes ligneuses est toujours beaucoup plus faible que celle de la plupart des plantes aquatiques ou aquatico-aériennes.

On peut rassembler les plantes à tiges ligneuses, au point de vue qui nous occupe, en diverses catégories :

1° Plantes dont la tige possède simultanément un système de vaisseaux et un système de méats cortico-médullaires à porosité relativement grande; les méats de ces tiges communiquent souvent avec ceux des feuilles (*Nerium, Evonymus, Ribes,* etc.).

2° Tiges ayant une écorce notablement poreuse, avec un bois peu poreux (*Aucuba, Magnolia, Liriodendron, Prunus, Pinus,* etc.).

3° Tiges ayant une porosité essentiellement vasculaire, l'écorce et la moelle étant le plus souvent peu poreuses, parfois pas du tout comme dans la vigne (*Vitis, Spiræa, Cydonia, Buxus, Laurus, Tilia, Planera, Solanum, Juglans, Castanea,* etc.).

4° Tiges ligneuses certainement poreuses, mais très peu, dans leur région corticale, c'est-à-dire par les méats; très peu ou point poreuses par les vaisseaux (*Ruscus, Cedrus, Thuyopsis, Taxus, Abies, Wellingtonia, Gincko,* etc.).

Avant de terminer, je tiens encore à dire que ce groupement n'est que très approximatif et sujet à revision. J'ai pu reconnaître, en effet, que non seulement la taille et l'âge des tiges ont une influence sur la porosité de leurs diverses régions, mais encore la situation, les conditions de végétation, l'époque de l'année, etc. Il faut donc considérer ce travail, comme je le disais au début, simplement comme une note préliminaire.

Les expériences rapportées dans ce travail ont été faites, pour la plupart, au moyen de plantes fournies par le Jardin botanique de la ville de Bordeaux, et plusieurs d'entre elles ont été faites dans le laboratoire que la Municipalité a bien voulu mettre, dans ce jardin même, à la disposition de la Faculté des sciences pour des études de physiologie végétale.

Bordeaux, 17 avril 1894.

SUR

LES

MOUVEMENTS DE ROULEMENT

PAR M. J. HADAMARD,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

---

1. Ainsi que l'a remarqué M. C. Neumann [1], l'étude des mouvements de roulement occupe en dynamique une place à part, en raison de la forme analytique que revêtent les équations de liaison. La condition imposée à deux corps du système de rouler l'un sur l'autre sans glissement se traduit en effet, non par des équations en termes finis entre les paramètres cherchés, mais par des équations linéaires aux différentielles totales *non intégrables*. M. C. Neumann et, après lui, M. Vierkandt [2] ont établi ces équations en adoptant une notation particulière. J'emploierai ici les notations de M. Darboux [3] qui conduisent très aisément au même résultat.

Soient, en effet, S, $S^{(1)}$ deux surfaces du système assujetties à être tangentes l'une à l'autre et sur chacune desquelles nous aurons choisi un système de coordonnées curvilignes ainsi qu'un trièdre attaché à la surface en chaque point. La position relative de ces deux corps sera définie par les coordonnées $u, v; u^{(1)}, v^{(1)}$ du point de contact tant sur S que sur $S^{(1)}$ et par l'angle φ que font les axes attachés à $S^{(1)}$ avec les axes attachés à S. Si maintenant nous voulons exprimer que les deux sur-

---

(1) *Grundzüge der Analytischen Mechanik* (*Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sachs. Gesellsch. der Wissench. zu Leipzig*, 1888, p. 32).

(2) *Uber gleitende und rollende Bewegung* (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. III, p. 47; 1892).

(3) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, livre V, chap. II.

faces S, $S^{(1)}$ roulent l'une sur l'autre sans glisser, nous écrirons que les déplacements infiniment petits du point de contact sur les deux surfaces sont identiques, ce qui nous donne

$$(1)\begin{cases} \xi du + \xi_1 dv = (\xi^{(1)} du^{(1)} + \xi_1^{(1)} dv^{(1)}) \cos\varphi - (\eta^{(1)} du^{(1)} + \eta_1^{(1)} dv^{(1)}) \sin\varphi, \\ \eta du + \eta_1 dv = (\xi^{(1)} du^{(1)} + \xi_1^{(1)} dv^{(1)}) \sin\varphi + (\eta^{(1)} du^{(1)} + \eta_1^{(1)} dv^{(1)}) \cos\varphi, \end{cases}$$

où ξ, ξ_1, η, η_1 ont relativement à la surface S le même sens que dans les Leçons de M. Darboux, $\xi^{(1)}$, $\xi_1^{(1)}$, $\eta^{(1)}$, $\eta_1^{(1)}$ désignant les quantités analogues relatives à la surface $S^{(1)}$ rapportée aux coordonnées curvilignes $u^{(1)}$, $v^{(1)}$.

2. Il existe d'ailleurs des problèmes où figurent d'autres équations de forme analogue. Supposons, par exemple, que non seulement le frottement de glissement, mais encore le frottement de pivotement prenne une valeur considérable (le frottement de roulement étant toujours nul), de sorte que le pivotement soit, à son tour, rendu impossible. Cette condition s'exprime (en employant toujours les notations de M. Darboux) par l'équation

$$(2) \qquad r\,du + r_1\,dv + d\varphi - R\,du^{(1)} - R_1\,dv^{(1)} = 0,$$

où R, R_1 désignent les quantités analogues à r, r_1 sur la seconde surface, et dont le premier membre est la valeur de la composante normale de la rotation élémentaire. D'ailleurs le frottement de pivotement se traduisant par un couple d'axe normal aux deux surfaces, son travail est nul si l'équation (2) est vérifiée, ce qui permet d'appliquer les principes de la dynamique analytique.

3. En second lieu, soient une courbe et une surface du système assujetties à rester tangentes l'une à l'autre. Leur position relative sera définie : 1° par les coordonnées u, v du point de contact sur la surface; 2° par l'arc l de la courbe, compris entre le point de contact et une origine fixe; 3° par

l'angle ω que fait la tangente à la courbe, prise dans le sens des l croissants, avec l'axe des x du trièdre attaché à la surface; 4° par l'angle θ que fait le plan osculateur à la courbe avec le plan tangent à la surface. L'absence de glissement, c'est-à-dire l'identité des déplacements infiniment petits du point de contact, s'exprimera par les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi\,du + \xi_1\,dv = dl\cos\omega, \\ \eta\,du + \eta_1\,dv = dl\sin\omega. \end{cases}$$

Si l'on doit écrire l'absence de pivotement, il faudra ajouter l'équation

$$(4) \qquad r\,du + r_1\,dv + d\omega - \frac{dl\cos\theta}{\rho} = 0,$$

(ρ désignant le rayon de courbure de la courbe), dont le premier membre est la composante normale de rotation.

4. Les problèmes de cette espèce, où les paramètres q_1, q_2, ..., q_{m+p} qui définissent l'état du système sont liés par des équations linéaires

$$E_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

aux différentielles totales se traitent (¹) par une méthode tout analogue à celle qui est employée lorsque les paramètres sont liés par des équations en termes finis. Après avoir écrit l'expression $Q_1\,\delta q_1 + \ldots + Q_{m+p}\,\delta q_{m+p}$, dans laquelle

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

on écrit que cette expression est nulle, non pour toutes les valeurs des δq, mais seulement pour toutes celles qui satisfont aux équations linéaires E_h.

Pour le cas de deux surfaces tangentes, le calcul de la demi-force vive T a été fait dans les Mémoires précédemment cités. Il se ferait aisément avec la notation actuelle, puisque

(¹) Vierkandt, *loc. cit.*, p. 47-50.

les formules connues permettent d'évaluer le déplacement infiniment petit du centre de gravité et la rotation élémentaire.

5. Si les équations E_h résultaient de la différentiation d'équations en termes finis $\mathcal{E}_h$, on pourrait s'en servir pour remplacer p des quantités q' par leurs valeurs en fonction des m autres dans l'expression de T, car cela revient au fond à n'introduire dans la mise en équation que m paramètres [1], les p autres étant exprimés en fonction des premiers à l'aide des équations $\mathcal{E}$.

Mais il n'en est plus de même si les équations E ne forment pas un système intégrable, et la méthode suppose essentiellement [2] que la demi-force vive T a été calculée *comme si les paramètres q étaient indépendants.*

On peut se proposer de vérifier par un calcul direct jusqu'à quel point cette précaution est indispensable, et cette étude conduit, comme nous allons le voir, à des résultats d'une forme intéressante.

Prenons d'abord, pour fixer les idées, un cas particulier : $m = 2$, $p = 2$. Écrivons les équations E résolues par rapport à deux des différentielles

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1^3\,dq_1 + a_2^3\,dq_2 - dq_3 = 0, \\ a_1^4\,dq_1 + a_2^4\,dq_2 - dq_4 = 0, \end{cases}$$

ou, en divisant par dt,

$$(5')\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_3 = a_1^3 q'_1 + a_2^3 q'_2 - q'_3 = 0, \\ \mathcal{A}_4 = a_1^4 q'_1 + a_2^4 q'_2 - q'_4 = 0. \end{cases}$$

Se servir des équations $\mathcal{A}_{3=0}$, $\mathcal{A}_{4=0}$, c'est, algébriquement parlant, ajouter à l'expression T une autre expression de la

(1) L'élimination des paramètres $q_{m+1}, \ldots, q_{m+p}$ de l'expression T, à l'aide des équations $\mathcal{E}$, se compose, il est vrai, de deux opérations : 1° le remplacement de ces paramètres eux-mêmes par leurs valeurs tirées des équations intégrales $\mathcal{E}$; 2° le remplacement des différentielles correspondantes par leurs valeurs tirées des équations différentielles E. Mais on reconnaît aisément que la première de ces opérations peut être effectuée après les différentiations partielles, la seconde ayant été effectuée avant ces différentiations.

(2) Cf. Vierkandt, *loc. cit.*, p. 52-51.

forme $\lambda_3 \mathcal{A}_3 + \lambda_4 \mathcal{A}_4$, où λ_3, λ_4 sont des fonctions quelconques des q et des q' (en général, il y aura lieu de prendre λ_3, λ_4 linéaires par rapport aux q', puisque T est quadratique par rapport aux mêmes quantités). L'addition d'une telle expression introduit dans chaque expression Q_i un nouveau terme, à savoir la valeur que prendrait Q_i si la forme T était remplacée par $\lambda_3 \mathcal{A}_3 + \lambda_4 \mathcal{A}_4$ et U par 0; et cette addition ne sera légitime que si ce nouveau terme disparaît dans le résultat final. Nous avons donc à écrire que, pour les valeurs $T = \lambda_3 \mathcal{A}_3 + \lambda_4 \mathcal{A}_4$; $U = 0$, les équations du mouvement se réduisent à des identités.

Nous observerons tout d'abord :

1° Que si T contenait des termes du second degré au moins par rapport à $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ (autrement dit si λ_3, λ_4 contenaient des termes composés linéairement avec ces quantités), la différentiation partielle conserverait $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ au premier degré, et que ces termes seraient par suite sans influence, puisqu'il y a lieu, après ces différentiations, de tenir compte des équations (5);

2° Que, pour la même raison, tout le poids de la différentiation partielle doit porter sur $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ et non pas sur λ_3, λ_4.

Dans ces conditions, en formant les équations du mouvement, qui sont

$$(6) \qquad \begin{cases} Q_1 + a_1^3 Q_3 + a_1^4 Q_4 = 0, \\ Q_2 + a_2^3 Q_3 + a_2^4 Q_4 = 0, \end{cases}$$

on voit que les termes en $\frac{d\lambda_3}{dt}$, $\frac{d\lambda_4}{dt}$ disparaissent et, en remplaçant q'_3, q'_4 par leurs valeurs tirées des équations (5'), on trouve simplement

$$(7) \qquad \begin{cases} q'_2 (\lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4) = 0, \\ q'_1 (\lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4) = 0, \end{cases}$$

en posant

$$H_3 = \frac{\partial a_1^3}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2^3}{\partial q_1} + a_2^3 \frac{\partial a_1^3}{\partial q_3} - a_1^3 \frac{\partial a_2^3}{\partial q_3} + a_2^4 \frac{\partial a_1^3}{\partial q_4} - a_1^4 \frac{\partial a_2^3}{\partial q_4},$$
$$H_4 = \frac{\partial a_1^4}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2^4}{\partial q_1} + a_2^3 \frac{\partial a_1^4}{\partial q_3} - a_1^3 \frac{\partial a_2^4}{\partial q_3} + a_2^4 \frac{\partial a_1^4}{\partial q_4} - a_1^4 \frac{\partial a_2^4}{\partial q_4}.$$

Les relations $H_3 = 0$, $H_4 = 0$ expriment les conditions d'intégrabilité du système (5).

Donc *lorsque les équations* (5) *forment un système intégrable, et dans ce cas seulement, on peut tenir compte immédiatement de ces équations dans le calcul de* T.

Mais pour des valeurs quelconques des coefficients a, nous voyons que λ_3, λ_4 ne sont déterminés que par leur rapport et qu'on peut prendre pour $\lambda_3 \mathcal{A}_3 + \lambda_4 \mathcal{A}_4$ un multiple quelconque de la combinaison linéaire

$$\mathcal{C} = H_4 \mathcal{A}_3 - H_3 \mathcal{A}_4.$$

On peut donc se servir, avant toute différentiation, de l'équation $\mathcal{C} = 0$.

6. Les choses peuvent se passer tout différemment si le nombre des paramètres change : si, par exemple, les coefficients a dépendent d'un cinquième paramètre q_5. Car alors les équations (7) devront être complétées par des termes en q'_5. Ces nouvelles équations, considérées comme identités par rapport aux q', ont manifestement un caractère algébrique tout autre que les premières et ne sont vérifiées que dans des circonstances très exceptionnelles, dont nous ne nous occuperons pas.

7. Envisageons maintenant le cas général, et soient

$$(8) \qquad \mathcal{A}_k = \sum_{h=1}^{m} a_h^k q'_h - q'_k = 0, \qquad (k = m+1, \ldots, m+p)$$

les équations différentielles de liaison.

Comme précédemment, donnons à T la valeur

$$T = \sum_{k=m+1}^{m+p} \lambda_k \mathcal{A}_k,$$

avec $U = 0$. On trouve aisément, moyennant les mêmes remarques que plus haut,

$$Q_i = \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{d}{dt}(\lambda_k a_i^k) - \sum_{k=m+1}^{m+p} \lambda_k \left(\sum_{h=1}^{m} q'_h \frac{\partial a_h^k}{\partial q_i} \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$Q_l = \frac{d\lambda_l}{dt} - \sum_{k=m+1}^{m+p} \lambda_k \left(\sum_{h=1}^{m} q'_h \frac{\partial a_h^k}{\partial q_l} \right) \qquad (l = m+1, \ldots, m+p),$$

et les équations du mouvement

$$Q_i + \sum_l a_i^l Q_l = 0$$

s'écrivent, en développant $\frac{da_i^k}{dt}$, remplaçant les q'_k par leurs valeurs tirées des équations (8) et ordonnant par rapport aux q'_h

(9) $$\sum_{h=1}^{m} q'_h P_{i,h} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

en posant

$$P_{i,h} = \sum_{k=m+1}^{m+p} \lambda_k \left[\frac{\partial a_i^k}{\partial q_h} - \frac{\partial a_h^k}{\partial q_i} - \sum_{l=m+1}^{m+p} \left(a_i^l \frac{\partial a_h^k}{\partial q_l} - a_h^l \frac{\partial a_i^k}{\partial q_l} \right) \right],$$

d'où résulte en particulier

(10) $$P_{i,h} = - P_{h,i}.$$

A tout système de valeurs des λ_k indépendant des q' et vérifiant les équations (9) correspond une combinaison linéaire $\mathcal{C}$ des équations (8) utilisable avant toute différentiation. Un tel système doit satisfaire aux équations

$$P_{i,h} = 0,$$

lesquelles, d'après la relation (10), se réduisent au nombre de $\frac{m(m-1)}{2}$. Il y aura donc toujours des combinaisons $\mathcal{C}$ dès que p sera supérieur [1] à $\frac{m(m-1)}{2}$, et leur nombre sera au moins de $p - \frac{m(m-1)}{2}$.

En particulier, on peut tirer de ces équations $p - \frac{m(m-1)}{2}$ des différentielles q' en fonction des autres et par conséquent,

[1] D'après ce qui précède, on voit qu'on doit avoir soin de compter au nombre des paramètres ceux-là mêmes dont les différentielles ne figureraient pas dans les équations E, s'ils entrent dans les coefficients a de ces équations.

m étant le nombre des paramètres indépendants, on peut toujours réduire la forme T *à ne contenir que* $\frac{m(m+1)}{2}$ *différentielles.*

8. Pour des valeurs particulières des coefficients a, le nombre des solutions indépendantes peut être supérieur à celui que nous venons d'indiquer. Mais *on ne peut se servir de toutes les équations* (8) *que* si les coefficients de tous les λ sont nuls, c'est-à-dire, ainsi qu'on s'en assure aisément, *si le système* (8) *est intégrable.*

9. Pour voir quelle propriété analytique caractérise les combinaisons $\mathcal{C}$, nous allons étudier leur formation lorsqu'on suppose les équations E données sous leur forme générale et non résolues par rapport à une partie des paramètres.

Prenant d'abord le cas particulier par lequel nous avons commencé; soient

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = A_1 q_1' + A_2 q_2' + A_3 q_3' + A_4 q_4' = 0, \\ \mathcal{B} = B_1 q_1' + B_2 q_2' + B_3 q_3' + B_4 q_4' = 0, \end{cases}$$

ou

$$(11')\qquad \begin{cases} A_1 dq_1 + A_2 dq_2 + A_3 dq_3 + A_4 dq_4 = 0, \\ B_1 dq_1 + B_2 dq_2 + B_3 dq_3 + B_4 dq_4 = 0 \end{cases}$$

les équations différentielles, et, partant de $T = \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B}$; $U = 0$, formons les expressions Q_i, en négligeant toujours d'écrire les dérivées partielles portant sur λ, μ. Nous trouvons, en multipliant par dt,

$$Q_i dt = A_i d\lambda + B_i d\mu + \lambda \sum_{h=1}^{4} dq_h \left(\frac{\partial A_i}{\partial q_h} - \frac{\partial A_h}{\partial q_i}\right) + \mu \sum_h dq_h \left(\frac{\partial B_i}{\partial q_h} - \frac{\partial B_h}{\partial q_i}\right).$$

Nous avons maintenant à écrire que l'expression

$$(12)\qquad (Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + Q_4 \delta q_4)\, dt$$

est nulle toutes les fois que les δq, d'une part, et les dq, de l'autre, vérifieront les équations (11'). Nous voyons immédiate-

ment qu'en vertu de ces équations les termes en $d\lambda$, $d\mu$ disparaissent de l'expression (12), laquelle prend la forme simple

$$(13)\quad \mathfrak{T}=\sum_{h,i}\left[\lambda\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_h}-\frac{d A_h}{\partial q_i}\right)+\mu\left(\frac{\partial B_i}{\partial q_h}-\frac{\partial B_h}{\partial q_i}\right)\right](dq_h\delta q_i-dq_i\delta q_h).$$

10. Une première interprétation géométrique nous permettra d'écrire immédiatement l'équation qui relie λ et μ.

Considérons en effet dq_1, dq_2, dq_3, dq_4; $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \delta q_4$, comme représentant les coordonnées homogènes de deux points de l'espace ordinaire. Les expressions $dq_h\,\delta q_i - dq_i\,\delta q_h$ représentent les coordonnées plückériennes de la droite qui joint ces deux points, c'est-à-dire (à cause des conditions imposées aux d et aux δ) de l'intersection des deux plans représentés par les équations (11′). Il suffit de substituer les coordonnées dans l'équation $\mathfrak{B}=0$, qui est celle d'un complexe linéaire auquel doit appartenir notre droite, pour obtenir la condition cherchée

$$(14)\quad \sum_{h,i,k,l}\left[\lambda\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_h}-\frac{\partial A_h}{\partial q_i}\right)+\mu\left(\frac{\partial B_i}{\partial q_h}-\frac{\partial B_h}{\partial q_i}\right)\right](A_kB_l-A_lB_k)=0,$$

où les indices h, i, k, l sont les indices 1, 2, 3, 4 déplacés par une quelconque des permutations alternées.

11. Dans le cas général où les $m+p$ paramètres sont reliés par les p équations

$$(15)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = A_1q'_1 + \cdots + A_{m+p}q'_{m+p} = 0,\\ \mathfrak{B} = B_1q'_1 + \cdots + B_{m+p}q'_{m+p} = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \mathfrak{L} = L_1q'_1 + \cdots + L_{m+p}q'_{m+p} = 0 \end{cases}$$

ou

$$(15')\quad \begin{cases} A_1\,dq_1 + \cdots + A_{m+p}\,dq_{m+p} = 0,\\ B_1\,dq_1 + \cdots + B_{m-p}\,dq_{m+p} = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ L_1\,dq_1 + \cdots + L_{m+p}\,dq_{m+p} = 0, \end{cases}$$

nous aurons à traiter de la même manière l'expression

$$(Q_1\delta q_1 + \cdots + Q_{m+p}\delta q_{m+p})\,dt$$

formée dans l'hypothèse $U = 0$; $T = \lambda \mathcal{A} + \mu \mathcal{B} + \ldots + \sigma \mathcal{L}$, et qui devient

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{T} = \sum_{k,i} \Big[\lambda \left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \right) + \mu \left(\frac{\partial B_i}{\partial q_k} - \frac{\partial B_k}{\partial q_i} \right) + \cdots \\ \qquad\qquad + \sigma \left(\frac{\partial L_i}{\partial q_k} - \frac{\partial L_k}{\partial q_i} \right) \Big] (dq_k \delta q_i - dq_i \delta q_k). \end{cases}$$

Si nous supposons que $dq_1, \ldots, dq_{m+p}$ d'une part, $\delta q_1, \ldots, \delta q_{m+p}$ de l'autre représentent des coordonnées homogènes dans l'espace à $m + p - 1$ dimensions, les expressions $dq_k \delta q_i - dq_i \delta q_k$ sont les coordonnées de la droite joignant les deux points ainsi définis. Les équations (15') représentent, pour $m = 2$, une droite [1] qui doit par suite appartenir au complexe défini par l'équation $\mathfrak{T} = 0$, et pour $m > 2$ une multiplicité linéaire $m - 1^{uple}$ dont toutes les droites doivent appartenir à ce complexe. Comme une telle multiplicité contient $\frac{m(m-1)}{2}$ droites à coordonnées linéairement indépendantes, nous retrouvons bien le nombre de conditions précédemment obtenu.

12. Considérons maintenant les paramètres q eux-mêmes comme les coordonnées (absolues) d'un point dans l'espace $m + p$ dimensions. Les équations (15') pourront être considérées comme les équations d'une multiplicité plane m^{uple} laquelle devront être tangentes toutes les courbes passant par un point déterminé M et satisfaisant à ces équations. Une surface (Σ) à m dimensions tangente en M à cet hyperplan sera un lieu de courbes vérifiant, *au point* M, les dites équations différentielles.

Nous pourrons, pour fixer les idées, supposer les différentielles d et δ prises sur des courbes appartenant à cette surface et, en désignant par $t, u, v, \ldots, w$ un système de m coordonnées curvilignes sur (Σ), poser $d = dt \frac{\partial}{\partial t}$; $\delta = du \frac{\partial}{\partial u}$.

(1) Nous ne parlons pas, bien entendu, du cas de $m = 1$, pour lequel les équations (15') se réduisent à des équations différentielles ordinaires.

Or, en désignant par dV la première des différentielles (15′), l'expression $\mathfrak{L}$, pour

$$\lambda = 1, \qquad \mu = \nu = \cdots = \sigma = 0,$$

se réduit à $d\delta V - \delta d V$.

L'équation $\mathcal{A} = 0$ ne sera donc une des combinaisons cherchées que si $\frac{d\delta V - \delta d V}{dt\, du}$ est nul au point M.

Donc *une combinaison $\mathcal{C}$ est caractérisée par ce fait qu'elle est différentielle exacte, en un point quelconque* M, *sur la surface* (Σ) *correspondante,* en entendant par là que les conditions par lesquelles s'exprimerait l'intégrabilité de la différentielle dV sur (Σ) sont vérifiées, non en tout point de cette surface, mais au point M; ce qui vient confirmer les évaluations précédemment obtenues, puisque ces conditions sont au nombre de $\frac{m(m-1)}{2}$.

Autrement dit encore, l'intégrale $\int dV$, prise le long d'une courbe fermée tracée sur la surface (Σ) au voisinage du point M est, non pas identiquement nulle, mais infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à un petit élément de surface (à deux dimensions) limité à cette courbe.

13. Le cas de deux surfaces roulant l'une sur l'autre correspond à $m = 3$, $p = 2$. Il n'existe donc pas en général de combinaisons $\mathcal{C}$, et on voit immédiatement qu'il n'en existe même jamais.

Par contre, le cas où deux surfaces roulent l'une sur l'autre sans pivotement [conditions représentées par les équations (1) et (2)] et pour lequel $m = 2$, $p = 3$, offre deux pareilles combinaisons. Il est bien remarquable que ces deux combinaisons ne sont autres que les deux équations (1), *celles qui expriment l'absence de glissement.*

Si nous employons en effet l'interprétation géométrique du n° 11, les quantités

$$dq_1 = du, \quad dq_2 = dv, \quad dq_3 = du^{(1)}, \quad dq_4 = dv^{(1)}, \quad dq_5 = d\varphi$$

étant des coordonnées homogènes dans l'espace à quatre dimensions, les équations (1) et (2), lesquelles, en posant

$$(17)\quad \begin{cases} X = \xi^{(1)}\cos\varphi - \eta^{(1)}\sin\varphi, & X_1 = \xi_1^{(1)}\cos\varphi - \eta_1^{(1)}\sin\varphi, \\ Y = \xi^{(1)}\sin\varphi + \eta^{(1)}\cos\varphi, & Y_1 = \xi_1^{(1)}\sin\varphi + \eta_1^{(1)}\cos\varphi, \end{cases}$$

s'écriront

$$(15')\quad \begin{cases} A_1 dq_1 + A_2 dq_2 + A_3 dq_3 + A_4 dq_4 + A_5 dq_5 = \xi\, du + \xi_1\, dv \\ \qquad\qquad - X\, du^{(1)} - X_1\, dv^{(1)} = 0, \\ B_1 dq_1 + B_2 dq_2 + B_3 dq_3 + B_4 dq_4 + B_5 dq_5 = \eta\, du + \eta_1\, dv \\ \qquad\qquad - Y\, du^{(1)} - Y_1\, dv^{(1)} = 0, \\ C_1 dq_1 + C_2 dq_2 + C_3 dq_3 + C_4 dq_4 + C_5 dq_5 = r\, du + r_1\, dv \\ \qquad\qquad - R\, du - R_1\, dv + d\varphi = 0, \end{cases}$$

définiront une droite dont les coordonnées seront les différents déterminants que l'on déduit du tableau

$$\left\| \begin{matrix} \xi & \xi_1 & -X & -X_1 & 0 \\ \eta & \eta_1 & -Y & -Y_1 & 0 \\ r & r_1 & -R & -R_1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Désignant par $|hi|$ le déterminant obtenu en supprimant les colonnes de rang h, i et rangeant les autres de telle façon que l'ordre des cinq indices ainsi disposés dérive de l'ordre naturel par un nombre pair de transpositions, les coefficients de λ, μ dans l'expression deviendront respectivement

$$(18)\quad \sum_{h,i}\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_h} - \frac{\partial A_h}{\partial q_i}\right)\left|hi\right|, \qquad \sum_{h,i}\left(\frac{\partial B_i}{\partial q_h} - \frac{\partial B_h}{\partial q_i}\right)\left|hi\right|.$$

Les coefficients de dq_1, dq_2 ne dépendant que de q_1, q_2; ceux de dq_3, dq_4 étant indépendants de q_1, q_2, et ceux de dq_5 nuls ou constants, les seules combinaisons d'indices que nous ayons à considérer sont

$$h,i = \begin{cases} 1,2 \\ 3,4 \\ 3,5 \\ 4,5 \end{cases}$$

auxquelles correspondent respectivement les déterminants

$$|12| = XY_1 - YX_1; \quad |34| = \xi\eta_1 - \eta\xi_1;$$
$$|35| = \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & X_1 \\ \eta & \eta_1 & Y_1 \\ r & r_1 & R_1 \end{vmatrix}; \quad |45| = - \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & X \\ \eta & \eta_1 & Y \\ r & r_1 & R \end{vmatrix}.$$

D'ailleurs les coefficients des équations (15') satisfont aux relations différentielles

$$\frac{\partial \xi}{dv} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r\eta_1, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r\xi_1 - \xi r_1,$$
$$\frac{\partial X}{\partial v^{(1)}} - \frac{\partial X}{\partial u^{(1)}} = YR_1 - RY_1, \qquad \frac{\partial Y}{\partial v^{(1)}} - \frac{\partial Y_1}{\partial u^{(1)}} = RX_1 - XR_1,$$
$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -Y, \quad \frac{\partial X_1}{\partial \varphi} = -Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = X, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial \varphi} = X_1,$$

ce qui nous donne pour les coefficients (18) les expressions

$$-(\eta r_1 - r\eta_1)(XY_1 - YX_1) + (YR_1 - RY_1)(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)$$
$$- Y \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & X_1 \\ \eta & \eta_1 & Y_1 \\ r & r_1 & R_1 \end{vmatrix} + Y_1 \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & X \\ \eta & \eta_1 & Y \\ r & r_1 & R \end{vmatrix},$$

$$-(r\xi_1 - \xi r_1)(XY_1 - YX_1) + (RX_1 - XR_1)(\xi\eta_1 - \xi\eta_1)$$
$$+ X \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & X_1 \\ \eta & \eta_1 & Y_1 \\ r & r_1 & R_1 \end{vmatrix} - X_1 \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & X \\ \eta & \eta_1 & Y \\ r & r_1 & R \end{vmatrix},$$

lesquelles s'annulent identiquement.

Notre conclusion est donc établie : lorsqu'il y a roulement sans pivotement, les équations du roulement peuvent être utilisées dans le calcul de T.

14. Si nous formons pareillement le coefficient qui correspond à la troisième équation, nous trouvons simplement

$$\left(\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v}\right)(XY_1 - YX_1) - \left(\frac{\partial R_1}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial v}\right)(\xi\eta_1 - \eta\xi_1),$$

lequel ne s'annule (puisque $XY_1 - YX_1 = \xi^{(1)}\eta_1^{(1)} - \xi_1^{(1)}\eta^{(1)}$) que si l'on a

$$\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v}}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1} = \frac{\frac{\partial R_1}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial v}}{\xi^{(1)}\eta_1^{(1)} - \xi_1^{(1)}\eta^{(1)}},$$

c'est-à-dire *si les deux surfaces sont à courbures constantes et égales.*

Dans ce cas, en effet, les équations (1) et (2) forment bien un système intégrable. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que dans le cas du roulement sans pivotement, les lieux du point de contact sur les deux surfaces ont même courbure géodésique. Or ici les deux surfaces sont applicables sur la même sphère et nos deux lignes correspondront sur cette sphère à deux lignes égales. Il existe donc entre les paramètres u, v; $u^{(1)}$, $v^{(1)}$ du point de contact les relations (contenant trois constantes arbitraires) qui définissent une rotation de la sphère. Quant à l'angle φ, angle que fait l'axe des x du trièdre attaché à la sphère au point transformé par la rotation avec la nouvelle position de l'axe des x primitif, il s'exprime en fonction de u, v et des mêmes constantes. Les trois relations ainsi écrites sont les intégrales du système différentiel.

15. Le fait qu'une courbe sphérique est déterminée quand on donne le rayon de courbure géodésique en fonction de l'arc est presque évident *a priori*. Il se ramène d'ailleurs immédiatement à des considérations cinématiques à l'aide d'un trièdre trirectangle ayant son sommet au centre de la sphère, une arête aboutissant en un point de la courbe et une face tangente au cône qui a pour base cette courbe et pour sommet le centre. L'extrémité sphérique de l'arête normale au cône décrit la courbe sphérique polaire de la première et les tangentes aux deux courbes sont parallèles. En supposant, pour simplifier, le rayon de la sphère égal à 1, le rapport $\frac{ds}{ds_1}$ des arcs de la courbe primitive et de la courbe polaire est égal

au rayon de courbure géodésique ρ_g. Or, si l'on prend pour variable indépendante l'arc s, on voit que la rotation instantanée du trièdre a pour projections sur les arêtes $\frac{ds_1}{ds}$, 0, 1. Le mouvement de ce trièdre est donc connu quand on donne la courbure géodésique en fonction de l'arc.

Il est à remarquer que l'égalité $\rho_g = \frac{ds}{ds_1}$ donne une démonstration immédiate de la proposition : *Quand deux figures sont polaires l'une de l'autre sur la sphère de rayon* 1, *l'aire de chacune d'elles est égale, à la demi-sphère près, au périmètre de l'autre, si du moins l'on compte les arcs comme positifs ou négatifs suivant que les tangentes correspondantes des deux courbes sont de même sens ou de sens contraires.*

Car l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g} = \iint d\sigma$ se réduit alors à $\int ds_1$.

16. Un mouvement de roulement très simple est celui d'un plan indéfini roulant sur une surface fixe, en l'absence de forces accélératrices. Par plan indéfini, nous entendons un plan sur lequel des masses sont disposées à des distances très grandes les unes des autres, de manière que les moments d'inertie principaux soient très grands. On peut même supposer des masses extérieures au plan et liées à ce plan, sous la condition que le centre de gravité soit sur le plan et l'ellipsoïde central de révolution autour de la normale au plan, de sorte que, m désignant la masse du système, les moments principaux d'inertie seront mk^2, mk^2 et λmk^2, où k^2 est très grand. D'après cela, nous pourrons négliger les termes où k^2 n'entre pas en facteur vis-à-vis de ceux qui le contiennent et réduire la force vive 2T à la force vive de rotation autour du centre de gravité

$$(19) \qquad \frac{2T}{mk^2} = (pu' + p_1v')^2 + (qu' + q_1v')^2 + \lambda(\varphi' + ru' + r_1v')^2.$$

L'équation relative à la variable φ se réduit à

$$(20) \qquad \varphi' + ru' + r_1v' = c.$$

Quant aux équations relatives à u, v, elles devraient, en vertu des équations de liaison qui s'écrivent

$$(21)\quad \begin{cases} \xi\, du + \xi_1\, dv = dx \cos\varphi - dy \sin\varphi, \\ \eta\, du + \eta_1\, dv = dx \sin\varphi + dy \cos\varphi \end{cases}$$

(x, y désignant les coordonnées du point de contact dans le plan mobile), être combinées linéairement avec les équations relatives à x, y. Mais les premiers membres de ces dernières, ne contenant aucun terme en k^2, sont négligeables; on peut donc écrire

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}[p(pu' + p_1 v')] - \left(\dfrac{\partial p}{\partial u} u' + \dfrac{\partial p_1}{\partial u} v'\right)(pu' + p_1 v') \\ \qquad + \dfrac{d}{dt}[q(qu' + q_1 v')] - \left(\dfrac{\partial q}{\partial u} u' + \dfrac{\partial q_1}{\partial u} v'\right)(qu' + q_1 v') \\ \qquad + \lambda c\left(\dfrac{dr}{dt} - \dfrac{\partial r}{\partial u} u' - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} v'\right) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}[p_1(pu' + p_1 v')] - \left(\dfrac{\partial p}{\partial v} u' + \dfrac{\partial p_1}{\partial u} v'\right)(pu' + p_1 v') \\ \qquad + \dfrac{d}{dt}[q_1(q_1 u' + q_1 v')] - \left(\dfrac{\partial q}{\partial v} u' + \dfrac{\partial q_1}{\partial v} v'\right)(qu' + q_1 v') \\ \qquad + \lambda c\left(\dfrac{dr_1}{dt} - \dfrac{\partial r}{\partial v} u' - \dfrac{\partial r_1}{\partial v} v'\right) = 0. \end{cases}$$

Ces équations (22), auxquelles, en vertu de l'équation (20), on peut adjoindre l'intégrale des forces vives, déterminent u, v. Elles ne contiennent comme éléments caractéristiques de la surface que les rotations, c'est-à-dire des éléments qui ne dépendent que de la représentation sphérique.

Posons, comme à l'ordinaire,

$$(23)\quad qu' + q_1 v' = \frac{d\sigma}{dt}\cos\theta, \qquad pu' + p_1 v' = -\frac{d\sigma}{dt}\sin\theta,$$

où σ est l'arc de la représentation sphérique de la trace de roulement sur la surface, θ l'angle que cette représentation sphérique fait avec l'axe des x du trièdre de la surface. L'intégrale des forces vives, simplifiée à l'aide de l'équation (20), se réduit à

$$(24)\quad \frac{d\sigma}{dt} = h.$$

D'autre part, les relations différentielles connues entre les rotations permettent de transformer les deux équations (22). Dans la première, on remplacera $\frac{\partial p_1}{\partial u}$, $\frac{\partial q_1}{\partial u}$, $\frac{\partial r_1}{\partial u}$ par leurs valeurs $\frac{\partial p}{\partial v} + rq_1 - qr_1$, $\frac{\partial q}{\partial v} + pr_1 - rp_1$, $\frac{\partial r}{\partial v} + qp_1 - pq_1$, et, en opérant d'une façon tout analogue sur la seconde, ces équations s'écriront respectivement

$$p\,\frac{d}{dt}(pu'+p_1v')+q\,\frac{d}{dt}(qu'+q_1v')=(pq_1-qp_1)v'(ru'+r_1v'-\lambda c),$$

$$p_1\,\frac{d}{dt}(pu'+p_1v')+q_1\,\frac{d}{dt}(qu'+q_1v')=-(pq_1-qp_1)u'(ru'+r_1v'-\lambda c),$$

ou, par une combinaison linéaire immédiate,

$$\frac{d}{dt}(pu'+p_1v')=(qu'+q_1v')(ru'+r_1v'-\lambda c),$$

$$\frac{d}{dt}(qu'+q_1v')=-(pu'+p_1v')(ru'+r_1v'-\lambda c),$$

lesquelles, en vertu des équations (23) et (24), se réduisent à la seule

$$\theta'+ru'+r_1v'=\lambda c. \tag{25}$$

Le premier membre exprimant la courbure géodésique de la représentation sphérique, *cette représentation sphérique est un cercle*, cercle décrit d'un mouvement uniforme, d'après l'équation (24).

Quant à l'angle φ, il est donné par la condition, déduite de la combinaison des équations (20), (25), que $\theta - \varphi$, c'est-à-dire l'angle de l'axe des x du plan mobile avec la représentation sphérique de la trace de roulement, croisse proportionnellement au temps, ou encore que la composante de pivotement $\varphi' + ru' + r_1v'$ soit constante.

Enfin les équations (21) font connaître x et y par des quadratures. Le lieu du point de contact sur le plan mobile peut d'ailleurs être considéré comme défini par son arc qui est le

même que celui de la surface et l'angle de la tangente avec l'axe des x du plan mobile, qui est $\omega - \varphi$, c'est-à-dire la somme de $\omega - \theta$ et d'une quantité proportionnelle au temps.

17. Lorsque la surface donnée est une sphère, les traces de roulement sur le plan mobile sont également des cercles, puisque $\omega - \theta$ est nul et que l'arc de courbe et l'angle $\omega - \varphi$ sont tous deux proportionnels au temps. On voit aisément que ceci ne peut se produire pour d'autres formes de la surface donnée.

En général, deux surfaces différentes peuvent-elles donner les mêmes traces de roulement sur le plan mobile? Nous pouvons voir que cela est impossible, du moins si l'on demande que la correspondance des points homologues sur les deux surfaces soit la même dans tous les cas. En effet, les deux surfaces devraient être applicables l'une sur l'autre. Par suite, entre les deux représentations sphériques existerait une correspondance ponctuelle conservant les aires et transformant les cercles en cercles. Il est clair qu'une pareille correspondance ne peut être réalisée que par une simple rotation de la sphère, et nos deux surfaces pourraient être considérées comme applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des plans tangents; ce seraient donc deux surfaces minima associées, solution inadmissible dans notre problème, où ne peuvent figurer que des surfaces convexes.

18. Le cas d'une ligne roulant sur une surface est celui de $m = 2$, $p = 2$, puisque le paramètre θ n'entre pas dans les équations de liaison. Pour

$$\mathcal{A} = \xi u' + \xi_1 v' - l' \cos\omega,$$
$$\mathcal{B} = \eta u' + \eta_1 v' - l' \sin\omega,$$

l'équation (14) se réduit à

$$(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)(\lambda \sin\omega - \mu \cos\omega) = 0.$$

Le facteur $\xi\eta_1 - \eta\xi_1$ étant essentiellement différent de 0, l'équation qu'il est permis d'utiliser est

$$(26) \qquad (\xi u' + \xi_1 v')\cos\omega + (\eta u' + \eta_1 v')\sin\omega - l' = 0,$$

c'est-à-dire qu'*elle exprime l'absence de glissement longitudinal.*

19. Prenons comme exemple le cas d'une droite roulant, sans être soumise à aucune force, sur une surface, où le point de contact décrira une certaine ligne L. Sur cette droite, soient des masses de somme m, distribuées d'une façon quelconque, dont nous pourrons toujours supposer que le centre de gravité corresponde à $l = 0$ et dont le moment d'inertie principal sera mk^2.

La force vive de rotation autour du centre de gravité sera

$$mk^2\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 = mk^2\{[(pu' + p_1 v')\sin\omega - (qu' + q_1 v')\cos\omega]^2 + (\omega' + ru' + r_1 v')^2\},$$

en désignant par $d\varepsilon$ l'angle infiniment petit dont tourne la droite. Quant à la vitesse du centre de gravité, comme nous avons le droit de faire abstraction du glissement longitudinal, nous la considérerons comme se composant: 1° d'une vitesse transversale

$$l(\omega' + vr' + r_1 v') + (\xi u' + \xi_1 v')\sin\omega - (\eta u' + \eta_1 v')\cos\omega;$$

2° d'une vitesse normale

$$l[(pu' + p_1 v')\sin\omega - (qu' + q_1 v')\cos\omega].$$

Son carré sera donc

$$l^2\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 + 2l(\omega' + ru' + r_1 v')[(\xi u' + \xi_1 v')\sin\omega - (\eta u' + \eta_1 v')\cos\omega] + [(\xi u' + \xi_1 v')\sin\omega - (\eta u' + \eta_1 v')\cos\omega]^2,$$

dont le dernier terme peut être négligé, comme étant homo-

gène et du second degré par rapport aux premiers membres des équations de liaison. On aura donc

$$(27)\left\{\begin{aligned}\frac{2T}{m}=&(k^2+l^2)\{[(pu'+p_1v')\sin\omega-(qu'+q_1v')\cos\omega]^2+(\omega'+ru+r_1v')^2\}\\&+2l(\omega'+ru'+r_1v')\,[(\xi u'+\xi_1v')\sin\omega-(\eta u'+\eta_1v')\cos\omega].\end{aligned}\right.$$

Les équations différentielles à écrire sont au nombre de deux, dont l'une peut être remplacée par celle des forces vives

$$(28)\left\{\begin{aligned}(k^2+l^2)\,\{[(pu'+p_1v')\sin\omega-(qu'+q_1v')\cos\omega]^2\\+(\omega'+ru'+r_1v')^2\}=\alpha^2.\end{aligned}\right.$$

Pour la seconde équation, nous prendrons celle qui est relative à ω, pour laquelle il n'y a qu'une seule expression Q à calculer, puisque la différentielle $d\omega$ n'entre pas dans les équations de liaison. Nous avons ainsi, en tenant compte des équations $\mathcal{A}=0$, $\mathcal{B}=0$,

$$(29)\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[(k^2+l^2)(\omega'+ru'+r_1v')]-(k^2+l^2)\,[(pu'+p_1v')\sin\omega\\&\quad-(qu'+q_1v')\cos\omega]\,[(pu'+p_1v')\cos\omega+(qu'+q_1v')\sin\omega]\\&\quad-ll'(\omega'+ru'+r_1v')=0.\end{aligned}\right.$$

Il faut adjoindre les équations

$$(30)\qquad\left\{\begin{aligned}\xi\,du+\xi_1\,dv&=dl\cos\omega,\\\eta\,du+\eta_1\,dv&=dl\sin\omega,\end{aligned}\right.$$

lesquelles expriment que l n'est autre que l'arc de la ligne L et ω l'angle de cette ligne avec l'axe des x.

L'équation des forces vives nous donne

$$(pu'+p_1v')\sin\omega-(qu'+q_1v')\cos\omega=\frac{\alpha\cos\varpi}{\sqrt{k^2+l^2}},$$

$$\omega'+ru'+r_1v'=\frac{\alpha\sin\varpi}{\sqrt{k^2+l^2}},$$

où ϖ est l'angle du plan osculateur à L avec la normale à la surface. Si alors nous remarquons que la quantité $(pu'+p_1v')\cos\omega+(qu'+q_1v')\sin\omega$ représente $\frac{dl}{dt}\left(\frac{d\varpi}{dl}-\frac{1}{\tau}\right)$, nous

voyons que l'équation (29) se réduit à $\alpha \cos \varpi \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \frac{1}{\tau} = 0$.

La droite roulera donc sur une section plane de la surface.

20. Si le roulement est assujetti à avoir lieu sans pivotement, le nombre des combinaisons $\mathcal{C}$ devient égal à deux. Il est presque évident *a priori* (en considérant la ligne comme limite d'une surface) que ces combinaisons sont précisément les équations du roulement. C'est ce que l'on vérifie immédiatement d'après la forme des équations (3) et (4). Si, en effet, pour fixer les idées, on désigne encore par q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 respectivement les variables u, v, l, ω, θ, on voit que tous les termes des expressions (18) contiennent des facteurs nuls.

VENTS ET COURANTS

SUR

LA COTE DES LANDES DE GASCOGNE

PAR M. HAUTREUX,

LIEUTENANT DE VAISSEAU.

Côte des Landes. — Vents et courants.

A l'occasion du Congrès de météorologie, tenu à Chicago en 1892, la question des courants de l'Atlantique fut traitée à nouveau, et nous fûmes invité, par le président de la section, à vouloir bien contribuer à l'œuvre entreprise.

Déjà, en 1878 et 1880, j'avais communiqué à la Société des études de températures de la mer dans le golfe de Gascogne, qui montraient qu'il existait pendant l'été, près de la côte des Landes, une région d'eau surchauffée, large et longue d'une centaine de milles, laquelle, dépassant de trois ou quatre degrés la température des eaux océaniennes, semblait isolée du reste de l'Atlantique, et excluait en tous cas toute idée de courant permanent analogue au courant de Rennell.

Depuis cette époque, les belles expériences du prince de Monaco, sur son yacht *l'Hirondelle*, en 1886, faites au moyen de corps flottants spécialement construits dans ce but, ont montré que depuis le 20e méridien Ouest, par le travers du golfe de Gascogne, les eaux de la surface subissaient, au moins pendant l'été, un mouvement d'entraînement vers l'Est. — Parmi les 500 flotteurs lancés par le prince, une vingtaine seulement avaient pénétré dans le golfe; mais de la carte il se dégageait un fait très particulier, c'est que la côte des Landes semblait être un point préféré pour les atterrissages dans le golfe.

Nous avons repris ces recherches avec d'autres éléments, en consultant les parcours d'épaves flottantes qui sont indiqués sur les pilot-charts américaines depuis 1885; nous voyons que sur 10 épaves signalées à l'entrée du golfe, il n'en est que 3, dont 2 bouteilles, qui aient pénétré jusqu'au fond du golfe; les autres ont suivi des parcours variés excluant toute idée de courant permanent.

Il est deux de ces épaves, le *Stormy-Petrel* et l'*Hermann*, portées sur le croquis sous les lettres B, E, sur lesquelles nous appelons plus spécialement l'attention. Ces deux carcasses ont décrit dans l'intérieur du golfe des circuits extraordinaires, démontrant une sorte de tourbillonnement des eaux dans cette région du golfe.

Tous ces faits nous ont engagé à refaire de nouvelles observations et à les continuer pendant une année au moins, afin de présenter un ensemble de faits qui pût permettre d'établir des conclusions.

C'est avec le procédé si simple et si peu coûteux des bouteilles flottantes accouplées que nous avons entrepris ces expériences et que nous avons pu les mener à bien.

Procédé des bouteilles flottantes.

Afin d'éviter que ces bouteilles ne roulent à la surface de la mer et ne soient entraînées par les moindres vents, nous conseillons de joindre deux bouteilles ordinaires au moyen d'une cordelette longue de 3 mètres à 3^{m}50 (c'est la hauteur de nos plus petites marées). Les bouteilles sont attachées par les goulots; l'une d'elles contient le bulletin de lancement, indiquant : navire, date et position; l'autre bouteille est remplie d'eau aux trois quarts, de façon à rester immergée et à servir de lest, sans cependant entraîner au fond la bouteille flottante qui contient le bulletin.

L'appareil est ainsi maintenu près de la surface; les bouteilles se tiennent verticalement et ne peuvent rouler; la bou-

teille flottante est constamment rappelée dans la verticale de la bouteille lesteur, qui, en définitive, commande le mouvement.

Tout le système obéit aux seuls déplacements de la nappe d'eau voisine de la surface jusqu'à 3 mètres de profondeur, comme le ferait la coque d'un navire submergé qui n'offre plus de prise au vent.

Le système adopté a une grande résistance, puisque des bouteilles ainsi accouplées ont été recueillies après sept mois d'immersion.

Bouteilles flottantes.

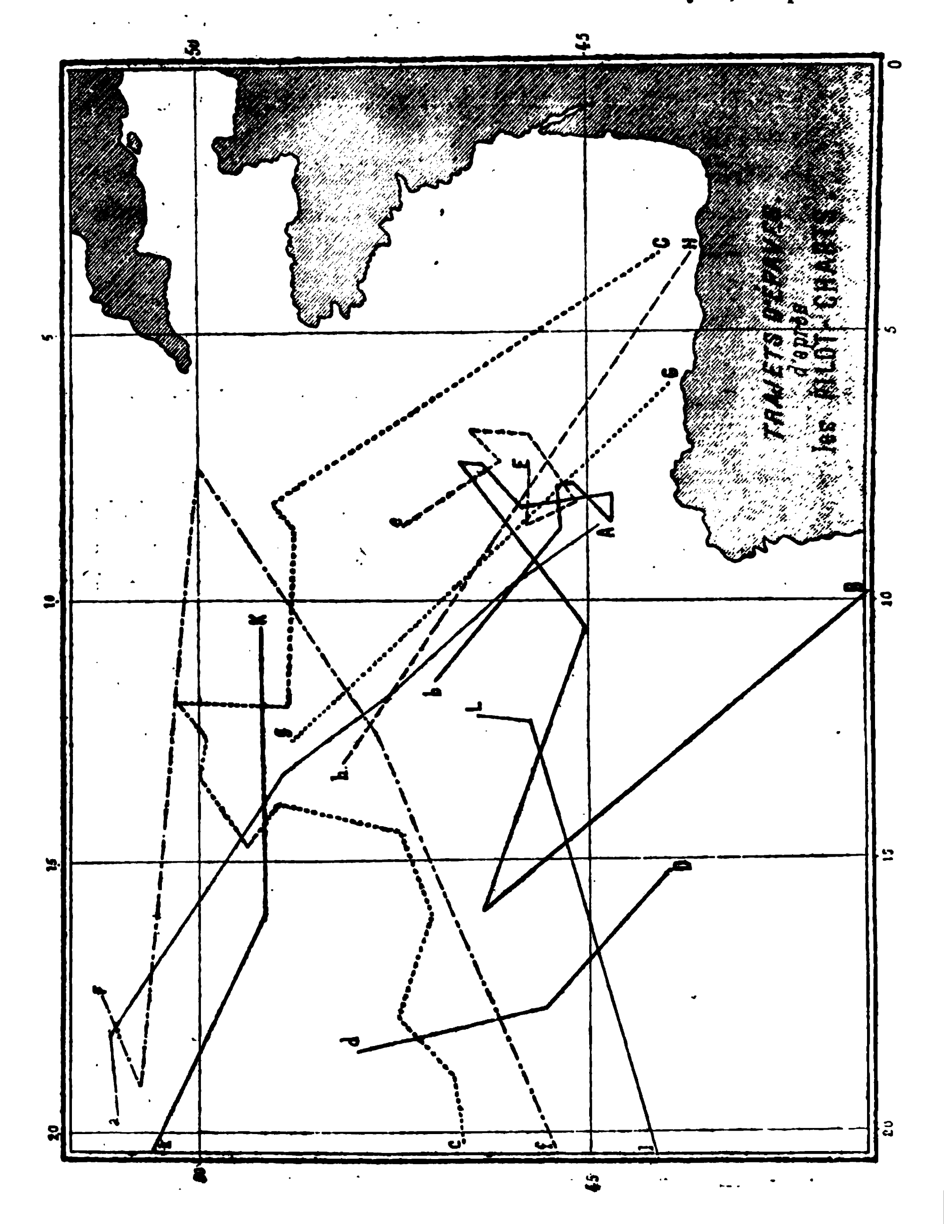
Le système que nous avons adopté pour l'étude de la direction et de l'intensité des courants près de la côte des Landes, ne peut donner des indications continues sur les mouvements des eaux. On ne connaît, en effet, que le point de départ de la bouteille et son point d'arrivée; on ignore absolument les mouvements tourbillonnaires de tout le système pendant la durée de l'immersion.

Ces mouvements peuvent être très étendus et s'être produits dans beaucoup de directions contrariées sans que nous puissions en avoir une notion quelconque. Le trajet que nous marquons sur la carte, du point de départ au point d'arrivée, n'indique que la résultante de toutes les influences qui ont agi sur les bouteilles.

Les expériences tentées par le prince de Monaco ont montré que des corps flottants peuvent faire plusieurs fois le tour de l'Atlantique avant d'être recueillis.

Parmi nos bouteilles, il en est qui sont restées immergées pendant plus de six mois, et ont été recueillies à peu de distance de leur point de départ; d'autres, au contraire, ont été trouvées quelques jours après leur lancement et avaient fait des parcours relativement étendus et franchi de grandes distances. — Comme l'indique le prince de Monaco, ce sont les

trajets de peu de durée qui peuvent le mieux indiquer les mouvements réguliers imprimés aux corps flottants par les circonstances extérieures. Dans l'étude de ces trajets, on peut



plus facilement démêler les influences qui ont agi et, dans certains cas, les noter sûrement.

Les parcours des carcasses de navires sont évidemment bien plus intéressants à examiner, puisque, par leurs rencontres successives, on détermine point par point la route réelle effectuée par l'épave, comme on le ferait pour un bâtiment qui navigue. Mais le nombre de ces épaves est très restreint et réparti sur plusieurs années.

Dans ce travail d'ensemble des résultats d'une année entière d'observations, nous rappellerons sommairement les études préliminaires qui furent insérées dans les *Bulletins* 14 et 22 de la Société de géographie, année 1893.

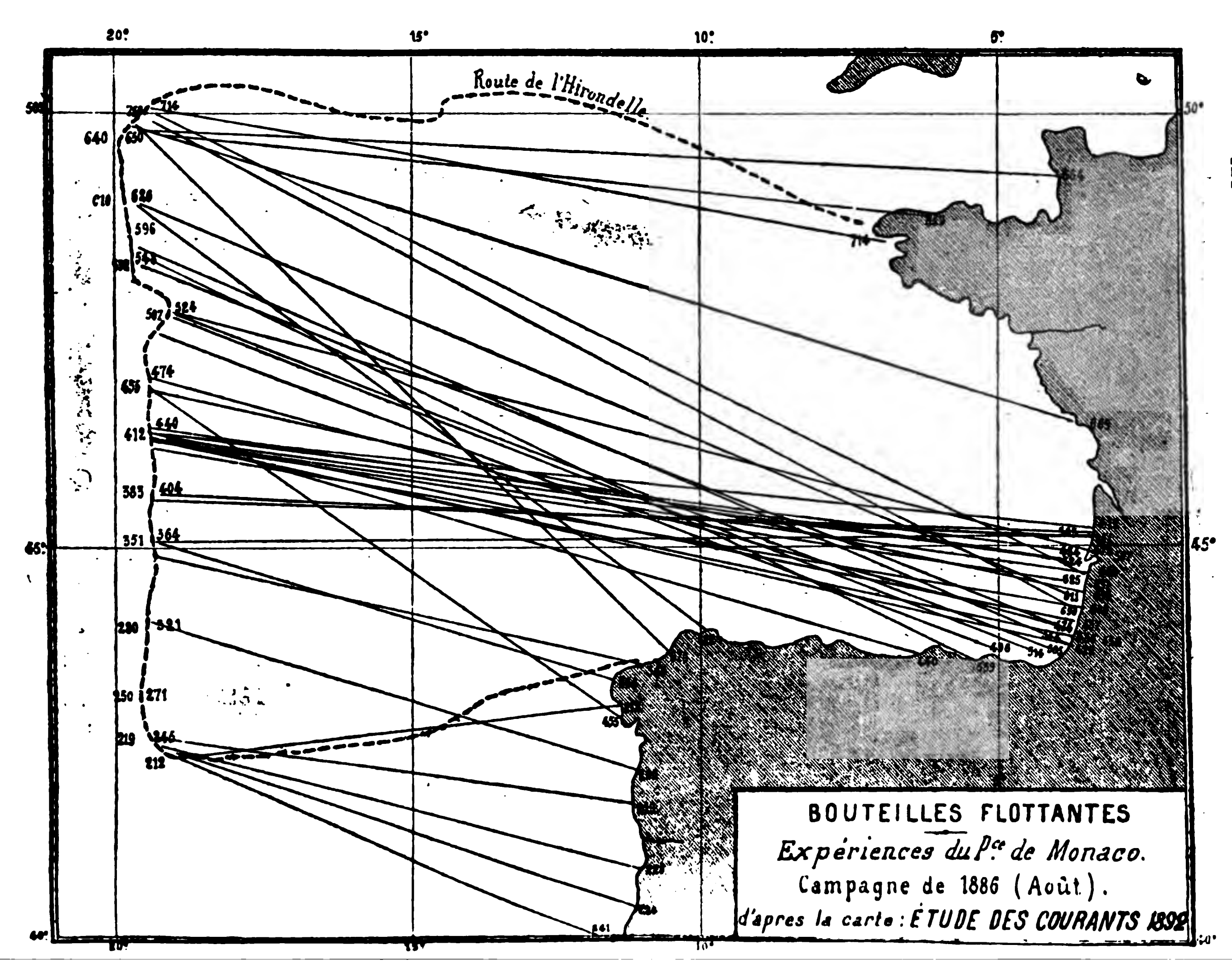
Nous avions réuni sur un seul croquis les parcours d'épaves signalés sur les pilot-charts aux environs et dans l'intérieur du golfe de Gascogne depuis l'année 1886. — Nous avions analysé chacun de ces parcours; les deux plus intéressants pour notre sujet sont ceux du *Stormy-Petrel* et de l'*Hermann*.

Le *Stormy-Petrel* fut rencontré neuf fois, du 15 janvier au 10 février 1887; son trajet fut alors, du Sud vers le Nord, de 150 milles en vingt-deux jours. Les points de rencontre ont été assez nombreux pour montrer que ce mouvement vers le Nord s'est effectué avec une vitesse moyenne de 7 milles par vingt-quatre heures.

L'*Hermann* a été rencontré six fois, du 21 septembre au 14 novembre 1889. Ses trajets forment une véritable boucle de 100 milles de diamètre; ce qui peut faire admettre une vitesse de déplacement de 8 milles par vingt-quatre heures.

D'après ces croquis, on voit bien qu'entre les Açores et la Manche, les corps flottants sont généralement portés vers l'Est avec des composantes, tantôt vers le Sud et tantôt vers le Nord; mais, arrivés à l'entrée du golfe de Gascogne, ils y subissent des mouvements contrariés dont la loi nous échappe.

Le second des documents que nous avons analysés est une adaptation d'une partie de la carte du prince de Monaco: *Étude des courants à bord de l'« Hirondelle », 1892.*


BOUTEILLES FLOTTANTES
Expériences du Pce de Monaco.
Campagne de 1886 (Août).
d'après la carte : ÉTUDE DES COURANTS 1892
Route de l'Hirondelle
20°
15°
10°
5°
50°
45°
40°

Les lancements de bouteilles avaient été faits dans le mois d'août 1886; sur les 500 bouteilles qui furent jetées à la mer, le long du 20e méridien W., entre les parallèles de 42° et de 50° Nord, sur un espace de 500 milles, il en a été recueilli 22 dans le golfe de Gascogne, et presque toutes ont abouti à la côte des Landes, entre l'embouchure de la Gironde et celle de la Bidassoa.

Les trajets les plus courts ont dépassé cent jours pour franchir 650 milles; c'est une vitesse de 6.5 milles par vingt-quatre heures. Les directions résultantes ont varié entre l'Est et l'E.-S.-E. Il y a lieu de remarquer l'accumulation de toutes les poussées vers la côte des Landes et le très petit nombre des atterrissages entre le cap Ortegal et Bilbao, ainsi qu'entre la Gironde et Ouessant.

Parmi les bouteilles qui furent lancées par l'*Hirondelle,* il en est qui n'ont atterri qu'au bout de trois, quatre et cinq ans; ces dernières avaient probablement fait plusieurs fois le grand circuit atlantique.

Ce petit nombre d'atterrissages ne doit pas être attribué seulement aux chances nombreuses de destruction des bouteilles lors de l'arrivée au rivage, soit sur une côte rocheuse, soit dans les grands mauvais temps; car, parmi les objets lancés par le prince de Monaco, il en était un grand nombre construits en métal et pouvant résister à des chocs violents; mais on sait que tout corps immergé se recouvre de végétations et de coquillages qui alourdissent l'enveloppe et finissent par l'entraîner au fond, et qu'encore les tarets attaquent le bouchon, le transpercent, et permettent à l'eau de s'introduire dans le récipient.

Nous verrons d'ailleurs, par l'exemple des simples bouteilles de verre que nous avons fait jeter à la mer, que ces causes de destruction agissent moins souvent qu'on ne le croit et que le ressac près des roches suffit souvent à défendre les bouteilles contre un choc qui les briserait.

C'est aux tourbillonnements, aux boucles, que les carcasses

nous ont montré se produire dans le golfe de Gascogne et ses abords immédiats, que l'on doit attribuer la faible proportion des arrivages qui ont eu lieu sur nos côtes.

D'après les deux croquis que nous reproduisons, il est évident que les corps flottant à l'ouvert du golfe de Gascogne sont généralement poussés vers le fond de l'entonnoir, vers la côte des Landes; mais leur vitesse de transport semble s'atténuer à mesure qu'ils se rapprochent davantage du rivage. C'est ce que nous avons résumé dans un troisième croquis, résultat des expériences de l'été dernier.

On y voit que les vitesses, déduites des trajets des carcasses flottantes, des bouteilles du prince de Monaco et des nôtres, vont en diminuant à mesure qu'on pénètre davantage dans le golfe; de 16 milles par vingt-quatre heures, elles tombent à 8 milles à l'ouvert du golfe, et à 2,5 milles près de la côte.

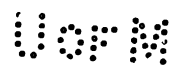
Le ressac du rivage paraît repousser au large les corps flottants, aussi bien que les vents qui viennent de terre; et la bordure des brisants de la côte n'est franchie par les bouteilles qu'avec la marée montante, qui se développe d'autant plus que la plage est à pente plus douce; ou bien avec les vents forts qui battent en côte.

La disposition que nous avons adoptée d'accoupler les bouteilles n'est pas non plus sans influence sur le grand nombre de résultats que nous avons proportionnellement enregistrés. La bouteille lesteur, étant plongée à 3 mètres au-dessous de la surface, s'échoue avec le flot généralement en dehors de la ligne des brisants de la plage; elle n'en ressent pas le ressac, et lorsque la mer se retire, en jusant, la bouteille échouée empêche la bouteille flotteur d'obéir à la marée. D'autre part, la longueur de la ligne d'amarrage qui joint les deux bouteilles étant inférieure à la hauteur des plus petites marées, on est certain que lorsque la bouteille lesteur est échouée, les deux bouteilles seront à découvert sur la plage à marée basse. La fréquence des résultats montre que le personnel de surveillance des côtes est au courant de ces lancements de bouteilles, sait

les distinguer immédiatement sur le rivage et en comprend la signification.

Bouteilles flottantes.

NUMÉROS	JETS A LA MER				ARRIVÉES			TRAJETS			
	Navires	Dates	Latitudes	Longit. (Paris)	Dates	Latitudes	Longit. (Paris)	Directions	Distances en milles	Jours	Vitesses en 24 h. milles
1	Pétrel.	2 juin 93	44°12	3°54	7 juin 93	44°10	3°40	S. 80° E.	11	5	2.2
2	Pétrel.	2 juin 93	44 11	4 06	11 juin 93	44 10	3 40	S. 86° E.	20	9	2.2
3	Pétrel.	2 juin 93	44 12	3 54	15 juin 93	43 53	3 44	S. 25° E.	29	13	2.2
4	Cormoran.	28 mai 93	44 40	3 50	16 juin 93	44 04	3 41	S. 12° E.	42	19	2.2
5	Cormoran.	28 mai 93	44 40	3 50	16 juin 93	43 46	3 44	S. 5° E.	56	19	2.9
6	Pétrel.	30 mai 93	44 30	3 58	16 juin 93	43 46	3 44	S. 12° E.	48	17	2.8
7	Pétrel.	31 mai 93	44 24	3 54	17 juin 93	44 02	3 48	S. 26° E.	30	17	1.7
8	Courlis.	8 juin 93	44 07	3 56	17 juin 93	44 06	3 41	S. 82° E.	13	9	1.4
9	Pétrel.	31 mai 93	44 36	3 57	16 juin 93	43 26	3 53	S. 3° E.	68	16	4.2
10	Pétrel.	1 juin 93	44 30	4 02	16 juin 93	44 03	3 48	S. 32° E.	38	15	2.5
11	Courlis.	7 juin 93	44 13	3 58	16 juin 93	44 03	3 48	S. 52° E.	22	9	2.4
12	Cormoran.	26 mai 93	44 30	4 06	14 juin 93	43 22	4 14	S. 4° W.	72	19	3.8
13	Orénoque.	21 juin 93	45 32	4 18	3 juillet 93	45 18	3 32	S. 70° E.	36	13	2.8
14	Orénoque.	21 juin 93	45 11	5 27	14 juillet 93	44 10	3 40	S. 53° E.	102	24	4.3
15	Orénoque.	21 juin 93	45 11	5 27	15 juillet 93	44 18	3 38	S. 57° E.	96	24	4.0
16	Orénoque.	21 juin 93	45 12	5 44	15 juillet 93	44 06	3 40	S. 52° E.	112	24	4.6
17	Orénoque.	21 juin 93	45 08	5 54	15 juillet 93	44 06	3 40	S. 62° E.	120	24	5.0
18	Médoc.	29 juin 93	45 26	4 47	14 juillet 93	44 46	3 36	S. 50° E.	72	16	4.5
19	Médoc.	29 juin 93	45 13	5 35	16 juillet 93	44 04	3 40	S. 50° E.	116	17	6.8
20	Médoc.	29 juin 93	45 13	5 35	18 juillet 93	44 10	3 40	S. 53° E.	108	19	5.6
21	Pingouin.	16 juin 93	45 00	4 13	22 juillet 93	44 49	3 36	S. 60° E.	30	36	0.8
22	Cormoran.	21 juillet 93	45 02	3 54	14 août 93	45 50	4 40	N. 35° W.	60	24	2.5
23	Pétrel.	6 sept. 93	44 52	3 58	9 sept. 93	44 22	3 48	S. 27° E.	32	3	10.0
24	Héron.	13 sept. 93	44 41	3 49	19 sept. 93	44 42	3 36	N. 80° E.	10	6	1.7
25	Héron.	14 sept. 93	44 36	3 45	19 sept. 93	44 44	3 36	N. 40° E.	8	6	1.6
26	Pétrel.	1 sept. 93	44 30	4 00	27 sept. 93	44 12	3 40	S. 35° E.	36	26	1.4
27	Héron.	15 sept. 93	44 38	3 54	28 sept. 93	44 46	3 36	N. 67° E.	16	13	1.2
28	Congo.	22 juillet 93	44 22	8 20	6 sept. 93	43 50	10 00	S. 65° W.	84	45	1.9
29	Pingouin.	23 sept. 93	44 18	3 55	4 oct. 93	44 06	3 40	S. 40° E.	17	11	1.5
30	Congo.	21 juillet 93	45 10	3 43	2 oct. 93	44 46	3 38	S. 40° E.	60	73	0.8
31	Pétrel.	28 juillet 93	45 10	3 43	7 oct. 93	44 56	3 35	S. 20° E.	20	71	0.3
32	Pétrel.	6 oct. 93	45 06	4 12	18 oct. 93	46 15	4 00	N. 12° E.	64	12	5.3
33	Pétrel.	15 nov. 93	44 41	3 52	18 nov. 93	44 46	3 36	N. 70° E.	13	3	4.0
34	Courlis.	24 nov. 93	44 25	3 56	27 nov. 93	44 14	3 40	S. 45° E.	17	3	6.8
35	Pétrel.	8 déc. 93	44 48	4 00	15 déc. 93	45 28	3 32	N. 28° E.	44	7	6.3
36	Pétrel.	17 déc. 93	44 42	3 54	22 déc. 93	44 44	3 36	N. 85° E.	16	5	3.2
37	Pétrel.	19 déc. 93	44 38	3 58	25 déc. 93	44 39	3 36	N. 85° E.	16	6	2.7
38	La Plata.	5 déc. 93	45 27	4 50	20 janv. 94	46 55	4 20	N. 10° E.	93	46	2.0
39	Pétrel.	17 déc. 93	44 34	3 52	28 janv. 94	45 55	3 35	N. 10° E.	82	42	1.9
40	Pétrel.	24 janv. 94	44 53	4 02	31 janv. 94	44 50	3 36	S. 80° E.	23	7	3.3
41	Orénoque.	21 sept. 93	45 02	6 11	1 janv. 94	45 28	3 32	N. 80° E.	120	132	0.9
42	Orénoque.	22 déc. 93	44 57	6 29	4 fév. 94	45 28	3 34	N. 80° E.	120	44	2.7
43	Pétrel.	8 oct. 93	44 50	4 07	2 fév. 94	45 26	3 33	N. 40° E.	40	117	0.3
44	Pilote n° 6.	16 août 93	45 44	5 33	5 fév. 94	45 28	3 32	S. 80° E.	90	173	0.5
45	Pétrel.	9 fév. 94	44 45	3 52	17 fév. 94	44 54	3 34	N. 50° E.	14	8	1.7
46	Pingouin.	8 août 93	44 18	3 56	15 fév. 94	47 28	4 50	N. 15° W.	190	191	1.0
47	Pétrel.	3 mars 94	44 18	3 52	8 mars 94	44 02	3 40	S. 25° E.	19	5	3.6
48	Pétrel.	23 fév. 94	44 47	4 10	13 mars 94	45 12	3 34	N. 47° E.	34	18	1.9
49	Pétrel.	1 mars 94	44 13	3 58	15 mars 94	44 04	3 42	S. 60° E.	19	14	1.3
50	Pétrel.	8 mars 94	44 00	4 00	16 mars 94	44 01	3 42	N. 85° E.	14	8	1.7
51	Pétrel.	10 mars 94	44 16	3 58	15 mars 94	44 07	3 40	S. 45° E.	13	5	2.6
52	Pétrel.	2 mars 94	44 10	3 56	14 mars 94	44 22	3 38	N. 45° E.	17	12	1.4
53	Pétrel.	3 mars 94	44 01	4 00	13 mars 94	44 10	3 40	N. 65° E.	17	10	1.7
54	Pétrel.	8 mars 94	44 13	3 55	13 mars 94	44 14	3 38	N. 84° E.	12	5	2.4
55	Orange-Nassau	25 oct. 93	47 54	8 50	15 mars 94	44 18	3 38	S. 45° E.	330	202	1.6
56	Rossmor.	19 avril 93	47 15	28 20	15 mars 94	44 19	3 38	S. 83° E.	1060	320	3.3
57	Olinda.	28 janv. 94	En Manche		17 mars 94	44 12	3 37	S. 35° E.	300(?)	48	6.0
58	Pétrel.	9 mars 94	44°23	3 52	13 mars 94	44 18	3 38	S. 70° E.	12	4	3.0
59	Pétrel.	1 mars 94	44 25	3 58	25 mars 94	44 27	3 38	N. 80° E.	16	24	0.7
60	Brésil.	7 oct. 93	44 31	8 12	19 avril 94	44 38	3 36	Est	205	194	1.1
61	Orénoque.	20 déc. 93	44 03	8 40	21 avril 94	44 16	[illegible]	N. 85° E.	260	122	2.1
62	Pétrel.	22 mars 94	44 21	3 57	7 mai 94	44 14	3 37	S. 75° E.	16	46	0.3
63	Pétrel.	9 mai 94	44 37	3 48	12 mai 94	44 28	3 38	S. 40° E.	13	3	4.3
64	Pétrel.	10 mai 94	44 28	3 53	13 mai 94	44 24	3 38	S. 67° E.	13	3	4.3



Nous avons dressé un croquis d'ensemble des bouteilles qui ont été recueillies sur nos côtes et dont les bulletins nous ont été envoyés. Les numéros d'ordre ont été placés sur le plan au point de lancement de la bouteille, ou dans sa direction, lorsque ce point était trop éloigné pour être compris dans les limites du dessin. Il nous a fallu agir de même pour les points d'atterrissement qui se trouvaient en dehors de notre carte ; de sorte que les directions résultantes que nous avons tracées doivent toujours être comptées à partir du numéro d'ordre. Nous présentons le tableau complet de ces lancements avec les données qui permettent de compléter le dessin.

Ces expériences ont commencé à la fin du mois de mai 1893 et se sont continuées sans interruption depuis cette époque.

Le bulletin que renferme la bouteille flotteur est ainsi rédigé :

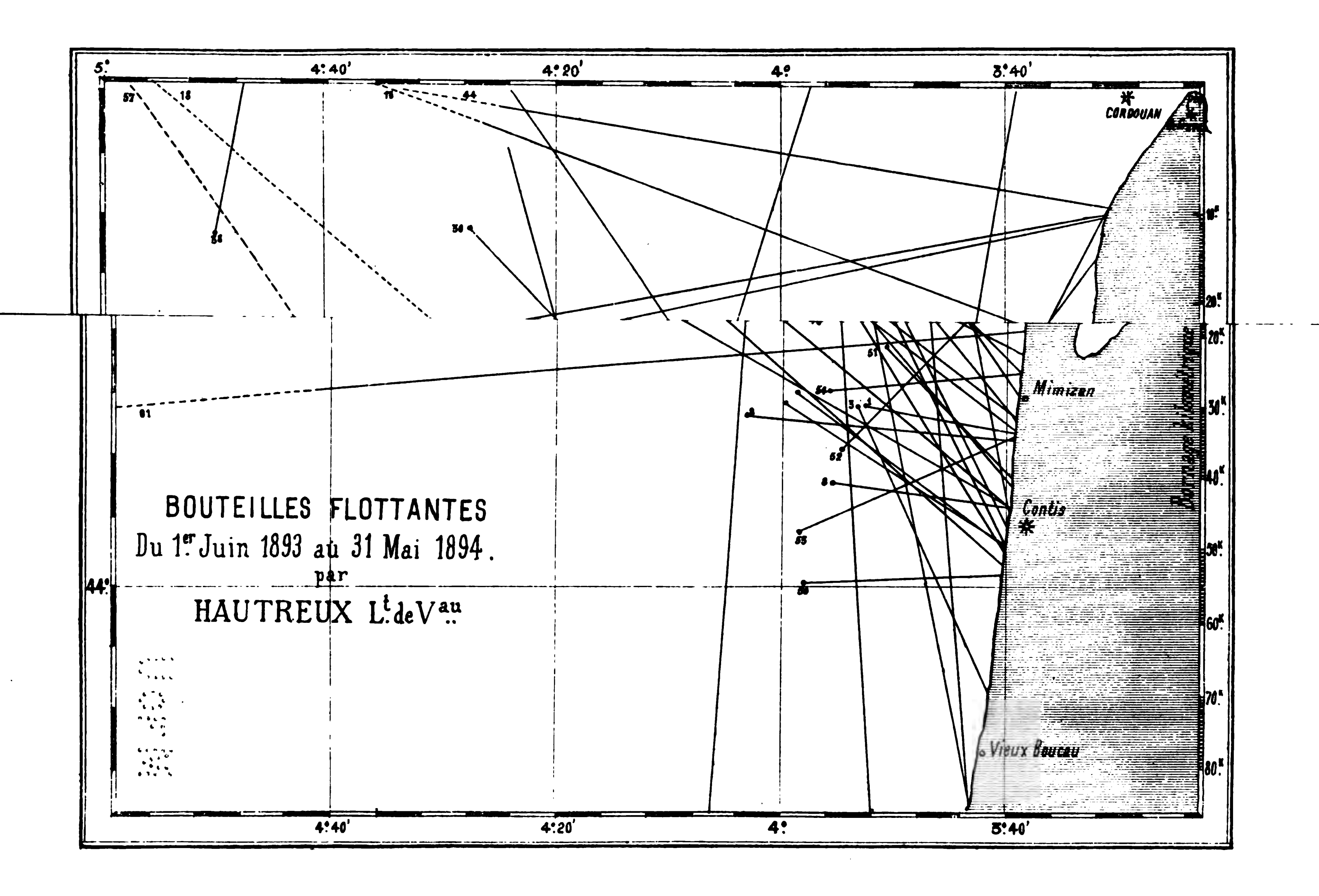
« Nom du navire et date.
» Point du lancement. Latitude. Longitude ou distance de terre.
» Vent, mer, courant, température de la mer.
» Prière de faire parvenir ce bulletin à la Société de géographie de Bordeaux. »

Grâce à cette petite note, les personnes qui recueillent les bouteilles inscrivent sur le bulletin la date et le point d'arrivée, et nous le font parvenir.

Nous présentons dans cette étude les résultats d'une année complète d'observations ; nous craindrions de rendre le dessin confus en accumulant sur la même carte un plus grand nombre de résultats. Mais nous espérons bien que nos dévoués collaborateurs voudront bien nous continuer leur gracieux concours et nous permettre d'augmenter les matériaux de l'avenir.

Notons d'abord, mois par mois, le nombre des lancements et celui des arrivages :

	Mai.	Juin.	Juillet.	Août.	Septembre.	Octobre.	Novembre.	Décembre.	Janvier.	Février.	Mars.	Avril.	Mai.	Total.
Lancements...	7	19	9	18	28	12	8	14	3	8	17	2	16	101
Arrivages....		14	7	1	6	4	2	3	4	5	13	2	3	64



BOUTEILLES FLOTTANTES
Du 1er Juin 1893 au 31 Mai 1894.
par
HAUTREUX Lt. de Vau.
CORDOUAN
Mimizan
Contis
Vieux Boucau
5°
4°40'
4°20'
4°
3°40'
44°
10K
20K
30K
40K
50K
60K
70K
80K

Nous avons dressé
ont été recueillies su
été envoyés. Les nu
au point de lanceme
lorsque ce point était
limites du dessin. Il
d'atterrissement qui
sorte que les directi
doivent toujours êtr
Nous présentons le
les données qui perm

Ces expériences ont
et se sont continuées

Le bulletin que renf

« Nom du navire et dat
» Point du lancement. I
» Vent, mer, courant, t
» Prière de faire parv
Bordeaux. »

Grâce à cette petit
bouteilles inscrivent s
et nous le font parven

Nous présentons da
complète d'observatio
confus en accumulant
de résultats. Mais nou
borateurs voudront bi
et nous permettre d'a

Notons d'abord, m
et celui des arrivages :

	Mai.	Juin.	Juillet.	A
Lancements..	7	19	9	1
Arrivages....		14	7	

Ce tableau est intéressant en ce qu'il montre la répartition inégale des arrivages. Il fait déjà prévoir que la multiplicité des arrivées est due à un fait spécial.

Si l'on se reporte au tableau détaillé des trajets de bouteilles, on voit que les grandes époques d'atterrissages ont été :

Du 15 au 17 juin 1893, 10 bouteilles;

Du 14 au 18 juillet 1893, 7 bouteilles;

Du 13 au 17 mars 1894, 11 bouteilles.

Que l'on consulte les registres météorologiques du sémaphore d'Arcachon, on verra qu'aux époques des nombreux atterrissages, il y a eu des vents forts du S.-W. au N.-W.

Ces registres donnent en effet les indications suivantes :

SÉMAPHORE D'ARCACHON.

		Force.
15 juin 1893............ Vents de	W.-N.-W.	6
16 —	N.-W.	6
11 juillet 1893..................	W.-S.-W.	6
12 —	W.	7 à 8
13 —	W.	6
14 —	W.	6
14 mars 1894....................	N.-W.	8
15 —	N.-W.	6

Et sur les 64 atterrissages de bouteilles, il n'y en a pas eu plus de 7 à 8 qui se soient produits sans l'aide immédiate des vents du large.

Cette influence étant certaine et prépondérante, il y aura intérêt à étudier le régime des vents pendant la période de nos observations, du 1er juin 1893 au 31 mai 1894, sur l'étendue du champ des recherches.

Examinons le croquis d'ensemble des bouteilles flottantes. La carte a été dressée en joignant le point de départ, connu par le bulletin, au point d'arrivée, connu par le récepteur de la bouteille. Les numéros d'ordre sont placés au point de départ, ou dans la direction du point de départ, si la dimension de la carte n'a pas permis de placer ce point de départ lui-même.

Parmi les 64 bouteilles recueillies, on a noté les directions suivantes :

Vers le S.-E., 41 ; vers l'Est, 10; vers le N.-E., 13.

A première vue, il semble que les trajets de bouteilles aient quelques divergences dans les directions et que le bassin d'Arcachon soit un lieu de partage de tous ces parcours.

En général, les bouteilles lancées près de la côte, au Sud du parallèle du cap Ferret, se sont dirigées plus ou moins vers le Sud; tandis que celles qui ont été jetées au Nord de ce même cap se sont plus souvent dirigées vers le Nord, et qu'enfin par le travers même de ce cap, il y ait un certain nombre de trajets droit vers l'Est.

Cette marche en éventail des eaux, au Nord et au Sud du cap Ferret, est certainement une chose remarquable, malgré quelques divergences. Il semblerait que le bassin d'Arcachon, qui est situé au milieu de l'intervalle entre les fleuves Gironde et Adour, produise dans les mouvements de flot et de jusant de la marée un ébranlement côtier qui se propage en éventail dans les deux sens, et qu'il divise les eaux en deux branches de faibles courants littoraux.

Si l'on calcule le volume des eaux mis en mouvement par la marée dans le bassin, on trouve qu'il est plus considérable que celui qui, dans une marée, passe devant la pointe de Grave.

Les vitesses de transport des bouteilles lancées au large sont généralement plus grandes que celles des bouteilles jetées plus près de terre. Celles du large ont des vitesses de 5 à 6 milles par vingt-quatre heures ; celles lancées plus près de terre, même pour les trajets courts, ne donnent que 2 à 3 milles par jour.

La côte produit donc un mouvement de répulsion qui forme obstacle à l'atterrissage et provoque les mouvements latéraux dans le sens Nord ou Sud.

Sans entrer dans de plus grands développements, l'aspect seul de la carte des bouteilles flottantes, celui de la carte du prince de Monaco, et celui des dessins des trajets d'épaves flottantes tiré des pilot-charts, nous semblent suffisants pour

indiquer soit au large, soit près de terre, le sens général du mouvement des eaux de la surface dans le golfe de Gascogne et près de la côte des Landes.

Entre le 20e méridien et le fond du golfe de Gascogne, le corps d'un navire est sollicité dans des directions voisines de l'Est avec des vitesses qui s'amortissent à mesure que le navire pénètre davantage dans le golfe.

Dans l'intérieur du golfe, il se produit des tourbillonnements, des rétrogradations même qui excluent toute idée de courant permanent.

Les corps flottants ont une tendance à atterrir sur les plages des landes de Gascogne de préférence à tous les autres points du golfe.

En approchant de terre, les directions suivies s'infléchissent le long des côtes, généralement vers le Sud, entre le bassin d'Arcachon et l'Adour, et très fréquemment vers le Nord, entre le cap Ferret et la Gironde.

L'influence du vent est toujours prépondérante. Lorsque les vents soufflent du large, les corps flottants dérivent rapidement et sont jetés à la côte; lorsque les vents soufflent de terre, les épaves sont repoussées au large et tourbillonnent pendant des mois dans l'intérieur du golfe.

On remarquera, sur le tableau détaillé des bouteilles, que les treize trajets vers le N.-E. n'ont eu lieu que depuis la fin de septembre jusqu'au milieu de mars, pendant les mois d'hiver. Nous verrons, en étudiant la direction des vents, que leur poussée ne chassait plus vers la terre, comme elle le faisait pendant les mois chauds.

La plupart des dix trajets vers l'Est ont eu lieu à la suite de vents forts ayant soufflé de l'Ouest, surtout en mars et en avril.

Direction générale des vents.

Les grandes époques d'atterrissage ont coïncidé avec la poussée des vents du large; cette constatation nous a engagé à

étudier la direction générale et la poussée des vents aux trois points qui limitent le champ des observations : la Coubre, Arcachon et Biarritz.

Nous avons pris comme base de cette étude les données du bulletin international de sept heures du matin pour la Coubre et Biarritz, et celles du sémaphore d'Arcachon qui nous ont été gracieusement fournies par M. le Capitaine de frégate, inspecteur des électro-sémaphores.

On sait que ces bulletins donnent chaque jour la direction du vent et un chiffre indiquant sa force relative.

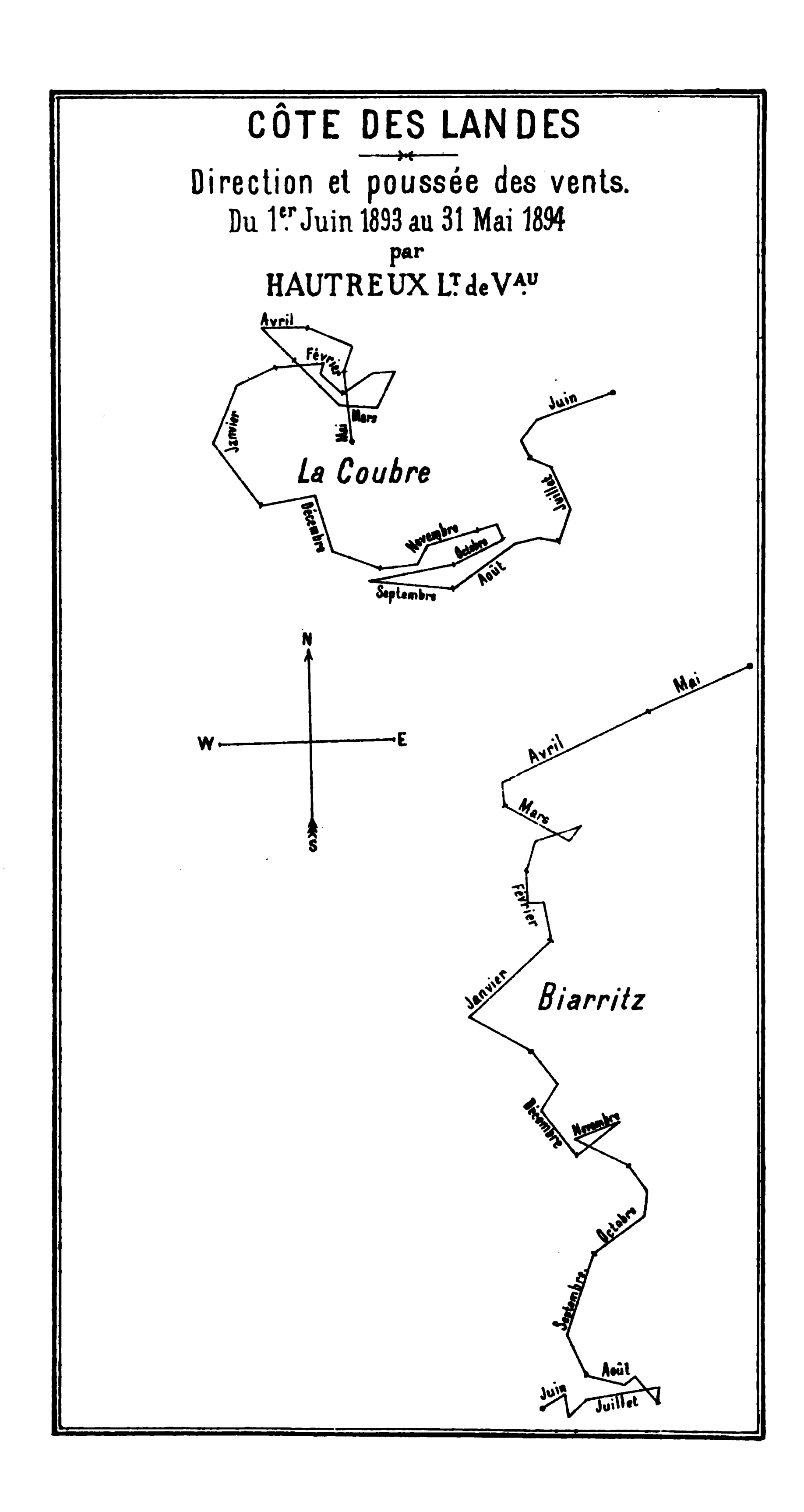
Si l'on porte ces données sur une carte, comme on le ferait pour la route estimée d'un navire, on obtient une suite de lignes qui, quelle que soit l'échelle adoptée, représente un ensemble de mouvements semblable à celui qu'ont éprouvé les couches aériennes voisines du point d'observation. Ce travail a été exécuté pour la période considérée, du 1er juin 1893 au 31 mai 1894, pour chacun des trois points désignés et résumé sur un dessin graphique.

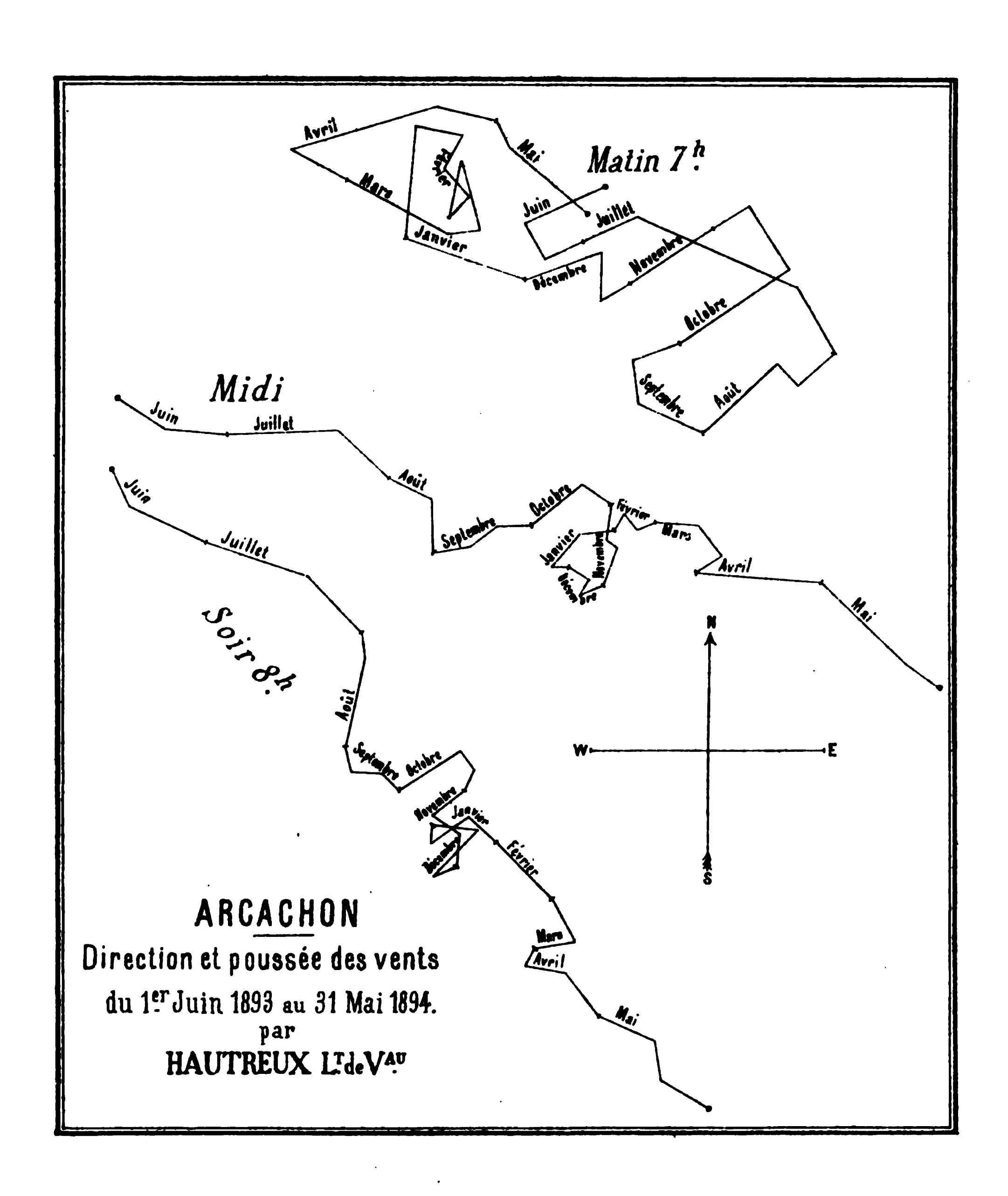
L'aspect de ces dessins donne un résultat fort inattendu et qui prouve des influences locales bien déterminées et toutes particulières.

Ainsi, aux deux extrémités du champ d'observation, on voit que la poussée des vents à Biarritz a donné une direction générale vers le Nord et que la poussée des vents à la Coubre semble décrire un vaste circuit, dont la convexité est tournée vers le Sud, puis vers l'Ouest avec des rétrogradations importantes, en octobre 1893 et en mars 1894. L'ensemble du mouvement de toute l'année porte vers le large.

Dans la station centrale, à Arcachon, les lignes s'enchevêtrent bien davantage et donnent la sensation de poussées vers la terre en juin, juillet, octobre et avril, et de poussées vers le large en août, septembre, novembre, décembre, janvier et mars; tourbillonnements en février. La résultante du mouvement de toute l'année ramène près du point de départ.

Tel est l'ensemble des mouvements aériens, à sept heures


CÔTE DES LANDES
Direction et poussée des vents.
Du 1er Juin 1893 au 31 Mai 1894
par
HAUTREUX Lt de Vau
La Coubre
Avril
Février
Mars
Mai
Janvier
Décembre
Novembre
Octobre
Septembre
Août
Juillet
Juin
N
W
E
S
Biarritz
Mai
Avril
Mars
Février
Janvier
Décembre
Novembre
Octobre
Septembre
Août
Juin
Juillet



Matin 7h.
Avril
Mai
Mars
Juin
Juillet
Janvier
Décembre
Novembre
Octobre
Septembre
Août
Midi
Juin
Juillet
Août
Septembre
Octobre
Février
Mars
Janvier
Novembre
Décembre
Avril
Mai
Soir 8h.
Juin
Juillet
Août
Septembre
Octobre
Novembre
Janvier
Décembre
Février
Mars
Avril
Mai
N
W
E
S
ARCACHON
Direction et poussée des vents
du 1er Juin 1893 au 31 Mai 1894.
par
HAUTREUX Lt de Vau

du matin, près de la côte des Landes, éloignant de terre, de Biarritz vers le Nord, et de la Coubre vers le W.-S.-W.; à Arcachon, des mouvements tourbillonnaires.

Le dessin de Biarritz montre que le caractère de *brise de terre* y est bien plus accentué que dans les deux autres points. C'est sans doute le voisinage des cimes froides des Pyrénées qui en est cause. Le vent paraît s'écouler des sommets des montagnes vers le large pendant la matinée.

Il était intéressant de voir si les mouvements aériens de la journée venaient confirmer cette tendance à la rotation diurne des vents. Déjà antérieurement, en 1877, 1878, 1879, 1880 et 1881, des observations comparatives faites chaque jour au sémaphore de la Coubre, à sept heures du matin et à deux heures du soir, avaient montré que pendant les mois de mai, juin, juillet, août et septembre, les vents avaient une tendance évidente à tourner au N.-W. dans l'après-midi, affectant ainsi dans ces parages le caractère des vents étésiens des pays chauds.

Ce caractère est encore bien plus marqué à Arcachon qu'à la Coubre, et si l'on trace la direction de la poussée des vents pour midi et pour huit heures du soir, comme nous l'avons fait pour les observations de sept heures du matin, le dessin ainsi obtenu prend toute l'importance d'une véritable démonstration. On voit que pour les observations de midi, la direction générale de toute l'année serait vers l'E.-S.-E. et que pour les observations de huit heures du soir, cette direction vaudrait le S.-E.

On voit aussi que la période hivernale d'octobre à février forme un circuit qui indique l'extrême variabilité de direction des vents et l'interruption du système étésien.

Cette poussée fréquente des vents de l'après-midi vers le S.-E. explique très naturellement que l'ensemble des bouteilles qui ont atterri pendant l'été ait suivi des directions voisines du S.-E., tandis qu'à partir du mois de septembre et pendant tout l'hiver les trajets vers le Nord sont devenus fréquents.

Ces observations sur la direction des vents et sur la direction concordante des bouteilles nous semblent éclaircir la question des courants du golfe de Gascogne, près de la côte des Landes, d'un jour tout nouveau.

C'est pendant la saison des vents étésiens que, même au large, les carcasses de navires ont été poussées vers le fond du golfe; c'est pendant la période hivernale que, sur la carte des épaves, nous constatons les tourbillonnements et rétrogradations des épaves : *Stormy-Petrel* et *Hermann*.

Si le rivage des Landes paraît être un point prédestiné pour les atterrissages des corps flottants, c'est que cette plage est, de tout le golfe de Gascogne, celle où les vents étésiens se produisent avec le plus de régularité et d'intensité, en raison de l'uniformité du dessin de la côte et de l'étendue considérable des plaines de l'intérieur qui forment les landes de Gascogne. C'est pendant les journées d'été une région où l'air surchauffé de l'intérieur fait appel aux vents du large.

En toute saison, les périodes d'atterrissage coïncident avec les gros vents du large.

L'étude des conditions météorologiques de la côte des Landes montre que pendant la saison chaude le régime des vents du large s'établit pendant la journée, et s'infléchit vers le S.-E. aux environs d'Arcachon. Les trajets des bouteilles sont en concordance complète avec ces directions du vent. Il n'y a pas lieu de faire intervenir un courant océanien d'origine extérieure.

Nous pensons que la démonstration que nous venons de faire suffit pour établir les lois du mouvement des eaux voisines de la surface près de la côte des Landes.

Conclusions.

Les corps flottants à l'ouvert du golfe de Gascogne ont une tendance à pénétrer dans le golfe surtout pendant l'été; leur vitesse de transport s'atténue à mesure qu'ils s'approchent de

la terre. Ils éprouvent pendant l'hiver des mouvements tourbillonnaires en tous sens. — Les courants de la côte des Landes sont la conséquence directe de la poussée des vents.

Pendant l'été, les vents ont une tendance marquée à souffler du large pendant la journée, et à s'infléchir vers le S.-E. dans l'après-midi; les eaux de la surface obéissent à cette poussée.

Pour cette raison, le rivage des landes de Gascogne est un lieu d'élection pour les atterrissages des épaves flottantes dans le golfe, presqu'à l'exclusion des autres parties : côtes d'Espagne, de Bretagne et de Vendée.

Près de la côte existe, pour une cause encore indéterminée, une sorte de répulsion qui amortit la vitesse de transport des corps flottants, et retarde leur atterrissage; il faut, pour le faciliter, l'aide des grosses brises du large.

Les vitesses de dérive, déduites des observations des trajets de courte durée, et des carcasses de navires, sont, au milieu du golfe, de 5 à 6 milles par vingt-quatre heures; tandis que, près de la côte des Landes, elles ne sont plus que de 2 à 3 milles par jour. Avec les gros vents d'Ouest, elles ne dépassent pas 6 milles par vingt-quatre heures.

Les marées et les phases de la lune ne paraissent pas avoir d'influence saisissable sur ces phénomènes.

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

6° MÉMOIRE

GENÈSE, VARIÉTÉ ET POLARISATION AXIALE DES FAISCEAUX DE RAYONS LUMINEUX OU CALORIFIQUES,

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

INTRODUCTION.

Nous distinguons dans ce nouveau Mémoire des faisceaux de rayons de trois espèces différentes.

Ce sont, en première ligne, les faisceaux *optiques* ordinaires, ceux-là mêmes auxquels se rattachent les foyers de ce nom, les deux droites dites focales, les lignes de courbure, le cône proprement dit de Malus, l'hyperboloïde de Plucker, etc.

Viennent ensuite les faisceaux que nous appelons *anoptiques*. Ils tirent leur origine des foyers de même dénomination qui ont figuré maintes fois déjà dans nos précédentes recherches. C'est à ces deux éléments géométriques, indistinctement, que nous rapportons d'abord les deux nouvelles droites focales-limites que nous aurons occasion de faire connaître, puis les lignes asymptotiques des pseudo-surfaces, l'orthogonal du cône de Malus, et surtout cette très générale surface normo-directive du quatrième ordre, indiquée par nous dès le début, et dont la surface absolue de l'onde n'est, ainsi que nous en avons souvent fait la remarque, qu'une simple variété.

Entre ces deux espèces de faisceaux-limites se place la double série des faisceaux *dioptiques* ou, autrement dit, moyens et complémentaires. A ces séries correspondent à leur tour, avec les foyers de même nom, une double infinité de droites focales non encore signalées, les lignes pseudo-conjuguées sous angle

constant des pseudo-surfaces, les complémentaires de ces lignes, les deux catégories de cônes intermédiaires de Malus, enfin toute la variété des surfaces d'ondes moyennes de première et de seconde réfraction qui ont fait l'objet de nos précédents Mémoires.

On trouvera dans celui que nous présentons aujourd'hui les diverses formules qui permettent d'écrire, *sans calculs*, l'équation d'un faisceau d'espèce quelconque dont la directrice, située sur le plan horizontal, est supposée connue par son équation. Toutefois, comme ces formules n'exigent pas que les surfaces qu'elles définissent soient des surfaces réglées, ainsi que doit l'être en fait cependant tout faisceau ou tout pinceau lumineux ou calorifique, nous appellerons, pour spécifier, surface optique ou anoptique ou dioptique, toute surface jouissant de la propriété caractéristique de passer par deux droites focales (réelles ou imaginaires) de l'une de ces trois dénominations. Nous ferons connaître, du reste, dans le cours de ce travail, les deux conoïdes réciproques qui constituent le lieu géométrique complet des droites focales en général, de quelque espèce qu'elles soient.

Au lieu de prendre, selon l'usage, pour nos faisceaux, une directrice plane *curviligne*, soit finie, soit infiniment petite (auquel cas le faisceau dégénère en pinceau), nous adopterons habituellement, de préférence, une directrice *rectiligne* indéfinie, telle que la trace horizontale du plan tangent à l'un des cônes de Malus relatifs au rayon choisi. Les faisceaux ou les pinceaux que nous obtiendrons de la sorte passant par trois droites parallèles à un même plan seront des paraboloïdes hyperboliques admettant en commun pour l'un de leurs plans directeurs le plan horizontal. Quant à leur second plan directeur, qui se trouve toujours être vertical, on verra qu'à l'instar notamment du plan de polarisation lui-même et de son *corrélatif*, il est lié par une relation homographique fort simple à celui des plans tangents aux divers cônes de Malus qui lui correspond, le long de leur rayon axial commun.

Bien que la grande majorité des calculs ait été développée en coordonnées rectangulaires, vu qu'elles sont les plus avantageuses, pratiquement, nous indiquerons dans un paragraphe final le moyen d'étendre tous nos résultats aux coordonnées obliques.

I

Genèse et polarisation axiale des faisceaux optiques ou de Malus.

1. Rappelons d'abord que le cône de Malus C_1 a pour équation (I, n° 7)

$$(1)\qquad (pX + p'Y + p''Z)X + (qX + q'Y + q''Z)Y = 0,$$

et pour discriminant

$$(2)\qquad -\Delta_1 = pq''^2 - (q+p')p''q'' + q'p''^2.$$

La trace horizontale de ce cône est formée, comme on le sait, par deux droites, réelles ou imaginaires, qui ne sont autres que les tangentes aux lignes de courbure S_1 (toujours obliques) de la pseudo-surface que l'on considère $\mathcal{F}'$, en contact, à l'origine, avec le plan des XY, savoir :

$$(S_1)\qquad p\,ds^2 + (q+p')\,ds\,ds' + q'\,ds'^2 = 0.$$

Mettons cette trace sous la forme suivante :

$$(3)\qquad \frac{qX + q'Y}{X} = \frac{-(pX + p'Y)}{Y} = -\frac{1}{\zeta}.$$

On en tire

$$(3')\qquad \begin{cases} (qX + q'Y)\zeta + X = 0, \\ (pX + p'Y)\zeta - Y = 0, \end{cases}$$

conjointement avec

$$(4)\qquad D_1 = (pq' - qp')\zeta^2 + (q - p')\zeta + 1 = 0.$$

Si, dans ce système (3'), on considère X, Y, ζ comme coordonnées courantes, il représentera deux paraboloïdes hyperboliques respectivement tangents à l'origine aux plans coordonnés $X = 0$, $Y = 0$ et admettant le plan des XY pour plan directeur commun. Ces deux surfaces réglées ont aussi en commun deux génératrices horizontales (δ_1) qui, étant situées dans des plans (réels ou imaginaires) définis par l'équation $D_1 = 0$, se projettent une à une sur les tangentes aux lignes de courbure S_1 ci-dessus.

Nous nommerons spécialement ***droites focales optiques,*** le couple de droites (δ_1).

Ces remarques faites, considérons le système plus général

$$(5)\qquad \frac{qX + q'Y}{X - \xi} = \frac{-(pX + p'Y)}{Y - \eta} = -\frac{1}{\zeta},$$

dans lequel (ξ, η, ζ) désignent les cordonnées d'un point quelconque de l'espace. On en déduit deux équations en X et Y qui, résolues, deviennent

$$(5')\qquad \begin{cases} D_1 X = -(p'\zeta - 1)\,\xi - q'\zeta\eta, \\ D_1 Y = p\zeta\xi + (q\zeta + 1)\,\eta, \end{cases}$$

le déterminant D_1 ayant pour valeur l'expression (4).

On en déduit *équivalemment :*

$$(5'')\qquad \begin{cases} \xi = (q\zeta + 1)\,X + q'\zeta Y, \\ -\eta = p\zeta X + (p'\zeta - 1)\,Y, \end{cases}$$

système remarquable, lui aussi, et sur lequel nous comptons revenir dans la suite, mais moins avantageux que le précédent pour le but que nous poursuivons ici.

2. ***Équation d'un lieu optique quelconque : son cône asymptote.*** — Soit $f_0\,(X, Y, Z) = 0$ l'équation d'une courbe quelconque, algébrique ou transcendante, située dans le plan des XY. Si l'on y remplace X et Y par leurs valeurs tirées de (5'), on obtiendra une surface correspondante F_1 que nous

qualifierons (conformément à ce qui a été dit dans l'introduction) du titre général de ***lieu optique***. Un tel lieu a pour propriété caractéristique d'avoir son équation toujours vérifiée par les droites focales (δ_1).

En effet, imaginons que l'on coupe la surface F_1 par le plan vertical (à double forme)

$$\text{(6)} \qquad \frac{\eta}{\xi} = -\frac{p'\zeta' - 1}{q'\zeta'} = -\frac{p\zeta'}{q\zeta' + 1},$$

dans lequel ζ' désigne une racine réelle ou imaginaire de l'équation $D_1 = 0$, plan, remarquons-le, qu'on pourrait aussi écrire

$$\text{(6')} \qquad \frac{\eta}{\xi} = -\frac{K'\zeta' + q}{q'} = \frac{p}{K'\zeta' - p'},$$

en posant pour le rapport (généralisé) de Gauss :

$$\text{(7)} \qquad K' = pq' - qp',$$

puis, qu'on élimine, à l'aide de (6), η dans la valeur de X tirée de (5') et ξ dans celle de Y, on reconnaîtra aussitôt que ces deux opérations réduisent l'équation $f_1 = 0$ à une ***identité***, ce qui démontre la propriété à établir.

Lorsque F_1 se trouve être une surface réglée, le lieu qu'on obtient est un ***faisceau optique*** de rayons, et si la directrice plane f_1 devient une courbe infinitésimale, on n'a plus qu'un ***pinceau optique***, surface-limite dans l'équation de laquelle il conviendra d'écrire comme coordonnées courantes $d\xi$, $d\eta$, ζ, au lieu de ξ, η, ζ.

Quoi qu'il en soit, pour former l'équation du cône asymptote ***commun*** à toutes ces surfaces (de même espèce), cône que nous désignerons par γ_1, on n'a qu'à prendre dans le système (5') les termes du degré le plus élevé qui est ici le second, ce qui réduit ce système à

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} K'X = -p'\dfrac{\xi}{\zeta} - q'\dfrac{\eta}{\zeta}, \\ K'Y = p\dfrac{\xi}{\zeta} + q\dfrac{\eta}{\zeta}. \end{cases}$$

Portant ces valeurs de X et de Y dans $f_0 = 0$, on en déduira une équation homogène en ξ, η, ζ, qui sera celle du cône asymptote demandé.

Nous ferons observer à ce propos que de ce dernier système (8) on tire

$$(8') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\xi_1}{\zeta_1} &= qX + q'Y, \\ -\frac{\eta_1}{\zeta_1} &= pX + p'Y, \end{aligned} \right.$$

les indices introduits ayant, par anticipation, pour but d'indiquer que ξ_1, η_1, ζ_1 désignent tout spécialement les coordonnées courantes du cône γ_1.

3. *Sections horizontales du lieu précédent.* — Et d'abord, couper la surface générale F_1 par un plan horizontal déterminé revient, analytiquement, à regarder ζ comme constant dans les systèmes (5') et (5''). Ceci posé, différentions dans cette hypothèse le second de ces systèmes. Il sera facile d'en déduire la relation fondamentale qui suit :

$$(9) \qquad \xi d\eta - \eta d\xi = D_1 (X dY - Y dX).$$

Or, elle revient, après avoir divisé par 2 ses deux membres, à $\frac{dA_{\zeta_1}}{dA_0} = D_1$, si l'on convient de désigner par A_0 l'aire de la directrice plane f_0, que nous supposons ici être une courbe fermée, et par A_{ζ_1} celle de la section produite dans F_1 par le plan horizontal donné $\zeta = \zeta_1$.

On en conclut cette autre relation d'une remarquable simplicité

$$(9') \qquad \frac{A_{\zeta_1}}{A_0} = D_1.$$

En considérant le cône asymptote γ_1, on trouverait tout d'abord de même $\frac{da_{\zeta_1}}{dA_0} = K''\zeta_1^2$, puis finalement

$$(9'') \qquad \frac{a_{\zeta_1}}{A_0} = K''\zeta_1^2.$$

(1) Voir, pour plus de généralité encore, notre *Mémoire sur les congruences de droites* (n° 32). (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1888.)

4. *Forme particulière de l'équation d'un faisceau ou d'un pinceau optique.* — Supposons que les tangentes aux lignes de courbure S_1 soient réelles et se trouvent actuellement dirigées, l'une suivant OX, l'autre suivant OY, ce qui implique (vu notre choix d'axes coordonnés) qu'elles soient rectangulaires et ne conviennent dès lors qu'à des *surfaces*. L'équation de ces tangentes devant, par hypothèse, se réduire à la forme $B'XY = 0$, il faut avoir $p = 0$ et $q' = 0$. Mais, par ces conditions, le système (5′) devient

$$(5''')\qquad \begin{cases} (q\zeta + 1)\,X = \xi, \\ (p'\zeta - 1)\,Y = -\eta. \end{cases}$$

On en déduit pour l'équation du faisceau ou du pinceau optiques correspondants :

$$(10)\qquad f_0\left(\frac{\xi}{q\zeta+1}, \frac{-\eta}{p'\zeta-1}\right) = 0, \qquad f_0\left(\frac{d\xi}{q\zeta+1}, \frac{-d\eta}{p'\zeta-1}\right) = 0.$$

On vérifie sans peine que la première, notamment, de ces équations se rencontre telle quelle lorsqu'on cherche la surface réglée engendrée par une ligne droite mobile qui s'appuie sur une directrice plane f_0 quelconque et sur les directrices rectilignes $\left(\xi = 0, \zeta = -\frac{1}{q}\right)$ et $\left(\eta = 0, \zeta = \frac{1}{p'}\right)$.

La même propriété se maintient, du reste, tant que les lignes de courbure S_1 de $\mathcal{F}'$ restent réelles quoique obliques entre elles. La transformation de coordonnées que nous opérerons dans notre dernier paragraphe mettra d'elle-même le fait en évidence. D'ici là, on peut consulter, si bon semble, le Mémoire cité plus haut.

5. *Polarisation de l'axe directeur d'un faisceau optique.* — Il serait naturel de prendre pour f_0 une courbe fermée quelconque entourant l'origine et, tout spécialement, le cercle $X^2 + Y^2 = 1$, ou bien encore $dX^2 + dY^2 = dS^2$, qui est la plus simple de ces courbes; mais il y aura avantage pour nous à lui substituer une directrice rectiligne (voir *Introduction*),

qu'on réduira ensuite, si l'on veut, à son premier élément infinitésimal. Or, parmi toutes les directions qu'on peut prendre autour de l'origine, nous choisirons la trace horizontale OT_1 du plan tangent P_1 au cône C_1 de Malus relatif à OZ.

Soit $f_0 = p''X + q''Y = 0$ cette trace que l'équation (1) nous fournit. En y remplaçant X et Y par leurs valeurs (5'), on obtient, comme il fallait s'y attendre, un paraboloïde hyperbolique, savoir :

$$(11)\quad [(p'p'' - q''p)\,\xi - (q''q - q'p'')\,\eta]\,\zeta - (p''\xi + q''\eta) = 0,$$

ou plus simplement

$$(11')\qquad (K'_1\xi - K_1\eta)\,\zeta - (p''\xi + q''\eta) = 0,$$

à condition de poser

$$(12)\qquad \frac{\eta}{\xi} = \frac{p'p'' - q''p}{q''q - q'p''} = \frac{K'_1}{K_1}.$$

Ce paraboloïde est tangent à l'origine au cône C_1, et l'on vérifie sans peine, à l'aide de la première des formules (6), qu'il contient bien, lui aussi, les droites focales (δ_1).

Réduit au quadrilatère gauche élémentaire dont OZ est le premier côté vertical, il dégénère en une ***pseudo-normalie*** dans laquelle il faut voir le pinceau infinitésimal auquel peut être réduit notre faisceau actuel.

Quant à leur axe de figure (horizontal) commun, il ne saurait nous offrir aucun intérêt; aussi le remplacerons-nous par leur rayon axial commun OZ, qu'il convient alors (pour prévenir toute amphibologie) de qualifier d'***axe directeur*** du faisceau ou du pinceau.

Par ce dernier axe vertical passe le second plan directeur (12) du paraboloïde. Nous lui donnerons le nom de ***premier plan axial-limite*** de OZ et nous le désignerons par Π_1, vu son analogie avec le plan de polarisation Π, dont l'équation, rappelons-le, est d'après notre précédent Mémoire :

$$(13)\qquad \frac{Y}{X} = \frac{p''q - q''p}{p'q'' - q'p''} = \frac{K'}{K}.$$

Si l'on cherche la condition de coïncidence des deux plans Π_1 et Π, on trouvera

$$(q - p')[pq''^2 - (q + p')p''q'' + q'p''^2] = -(q - p')\,\Delta_1 = 0.$$

Dédoublée, cette condition signifie ou bien que $\mathcal{F}'$ doit être une pseudo-surface *minima,* ou bien qu'en coïncidant entre eux, les plans Π_1 et Π doivent coïncider aussi avec le plan tangent P_1, qui n'est autre chose que l'un des deux *plans focaux optiques* dans lesquels se décompose le cône C_1 de Malus.

II

Genèse et polarisation axiale des faisceaux anoptiques ou orthogonaux.

6. L'orthogonal C_2 du cône de Malus a pour équation (I, n° 9)

$$(14)\qquad (qX + q'Y + q''Z)\,X - (pX + p'Y + p''Z)\,Y = 0,$$

et, par suite, pour discriminant

$$(15)\qquad \Delta_2 = qp''^2 - (p - q')\,p''q'' - p'q''^2.$$

La trace horizontale de ce cône est formée, on le sait, par le couple des tangentes aux lignes asymptotiques S_2 (en général obliques) de la pseudo-surface $\mathcal{F}'$, lignes dont l'équation est

$$(S_2)\qquad q\,ds^2 - (p - q')\,ds\,ds' - p'\,ds'^2 = 0.$$

En écrivant cette trace comme il suit :

$$(16)\qquad \frac{pX + p'Y}{X} = \frac{qX + q'Y}{Y} = \frac{1}{\zeta},$$

on en tire

$$(16')\qquad \left\{\begin{aligned} &(pX + p'Y)\,\zeta - X = 0,\\ &(qX + q'Y)\,\zeta - Y = 0,\end{aligned}\right.$$

avec

(17) $$D_2 = (pq' - qp')\zeta^2 - (p + q')\zeta + 1 = 0.$$

Jointe à (16'), cette dernière équation définit deux ***droites focales anoptiques*** (δ_2) dont les projections horizontales coïncident avec les tangentes aux lignes S_2.

Au système (16) substituons le système plus général

(18) $$\frac{pX + p'Y}{X - \xi} = \frac{qX + q'Y}{Y - \eta} = \frac{1}{\zeta},$$

analogue à (5). On en déduit

(18') $$\begin{cases} D_2 X = -(q'\zeta - 1)\xi + p'\zeta\eta, \\ D_2 Y = q\zeta\xi - (p\zeta - 1)\eta, \end{cases}$$

ou encore

(18') $$\begin{cases} -\xi = (p\zeta - 1)X + p'\zeta Y, \\ -\eta = q\zeta X + (q'\zeta - 1)Y. \end{cases}$$

Ceci nous amène, comme on le voit, à des développements parallèles à ceux qui ont fait l'objet de l'article précédent.

7. *Équations d'un lieu anoptique quelconque et de son cône asymptote.* — Pour former la première de ces équations, il suffit de porter dans $f_0(X, Y) = 0$ les valeurs (18'). On obtiendra ainsi, pour toute directrice plane donnée, une surface correspondante F_2 que, par analogie avec F_1, nous nommons surface ou ***lieu anoptique***.

Afin de justifier cette dénomination, coupons ce lieu par le plan vertical

(19) $$\frac{\eta}{\xi} = \frac{q'\zeta' - 1}{p'\zeta'} = \frac{q\zeta'}{p\zeta' - 1},$$

dans l'équation duquel ζ' désigne une des racines de l'équation $D_2 = 0$, plan qu'on pourrait du reste écrire aussi

(19') $$\frac{\eta}{\xi} = \frac{K'\zeta' - p}{p'} = \frac{q}{K'\zeta' - q'}.$$

En procédant comme au n° 2, on prouvera que la surface F_2

contient les droites focales (δ_2), ce qui suffit, on le sait, pour justifier sa dénomination.

Si l'on réduit aux termes du second degré les formules (18'), on aura

$$(20)\qquad \begin{cases} K'X = -q'\dfrac{\xi}{\zeta} + p'\dfrac{\eta}{\zeta}, \\ K'Y = q\dfrac{\xi}{\zeta} - p\dfrac{\eta}{\zeta}, \end{cases}$$

et la substitution de ces dernières dans $f_2 = 0$ fournira à chaque fois l'équation du cône γ_2 asymptote de F_2.

8. *Sections horizontales.* — En appliquant au cas actuel la formule générale (9), il viendra $\dfrac{dA_{\zeta_2}}{dA_0} = D_2$ et, par suite, $\dfrac{A_{\zeta_2}}{A_0} = D_2$.

On trouve de même pour le cône γ_2 la relation suivante : $\dfrac{a_{\zeta_2}}{A_0} = K'\zeta_2^2$. Comparant avec son analogue (9') et faisant $\zeta_1 = \zeta_2$, ce qui est permis, on en conclut $a_{\zeta_1} = a_{\zeta_2}$, d'où cet énoncé :

Théorème. — *Les sections faites dans les cônes asymptotes respectifs de deux surfaces, l'une optique, l'autre anoptique, par un même plan horizontal, sont équivalentes.*

Ce résultat remarquable pouvait être prévu. En effet, les systèmes (8) et (20) revenant à

$$(8')\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi}{\zeta} = qX + q'Y, \\ -\dfrac{\eta}{\zeta} = pX + p'Y, \end{cases} \qquad\qquad (20')\qquad \begin{cases} -\dfrac{\xi}{\zeta} = pX + p'Y, \\ -\dfrac{\eta}{\zeta} = qX + q'Y, \end{cases}$$

on voit que, pour passer du premier au second, il suffit de changer η en ξ et ξ en $-\eta$, c'est-à-dire de faire tourner les axes coordonnés de 90° vers la gauche. Inversement, on peut obtenir le cône γ_2 en faisant tourner autour de OZ le cône γ_1 de 90° vers la droite, les axes ne changeant pas.

9. *Cas particuliers de faisceaux anoptiques.* — Pour que les lignes asymptotiques S_2 soient rectangulaires sur $\mathcal{F}'$, il faut avoir $q = p'$ (condition minima). Que si l'on veut en outre que les tangentes à ces lignes coïncident avec les axes actuels des X et des Y, il faudra poser plus particulièrement $q = p' = 0$.

Les coordonnées obliques donneraient des relations analogues, mais beaucoup plus générales. Sans anticiper, observons que le système (18′) se réduit présentement à

$$(18''') \qquad \begin{cases} (p\zeta - 1)\,X = -\xi, \\ (q'\zeta - 1)\,Y = -\eta, \end{cases}$$

et, par suite, l'équation du faisceau anoptique (nous négligeons celle du pinceau correspondant) pourra s'écrire

$$(21) \qquad f_0\left(\frac{\xi}{1 - p\zeta}, \frac{\eta}{1 - q'\zeta}\right) = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît, à vue, que son mode de génération est le même que celui du faisceau (10).

10. *Polarisation de l'axe directeur d'un faisceau anoptique.* — Prenons pour f_0 la trace horizontale OT_2 du plan tangent P_2 au cône C_2 suivant OZ.

Si, dans l'équation $f_0 = q''X - p''Y = 0$ de cette trace, on substitue les valeurs (18′), on obtiendra le paraboloïde hyperbolique

$$(22) \qquad [(p''q + q'q'')\xi - (p'q'' + p''p)\eta]\zeta - (q''\zeta - p''\eta) = 0,$$

qu'on peut écrire plus simplement ainsi :

$$(22') \qquad (K'_2\xi - K_2\eta)\,\zeta - (q''\xi - p''\eta) = 0,$$

en posant

$$(23) \qquad \frac{\eta}{\xi} = \frac{p''q + q'q''}{p'q'' + p''p} = \frac{K'_2}{K_2}.$$

Par analogie avec (12), nous désignerons ce nouveau plan sous le nom de *deuxième plan axial-limite* du rayon OZ et nous le représenterons par Π_2.

Pour que ce plan Π_2 coïncide avec le plan de polarisation Π ou (13), il faut et il suffit que l'on ait

$$(p + q')[qp''^2 - (p - q')p''q'' - p'q''^2] = (p + q')\Delta_2 = 0,$$

double condition qui exige, ou bien que $\mathcal{F}''$ se transforme en *surface*, ou bien que, en coïncidant entre eux, les plans Π_2 et Π coïncident encore avec le plan tangent P_1, lequel n'est autre que l'un des deux *plans focaux anoptiques* auxquels se réduit dans ce cas le cône C_2.

11. *Simplification anticipée de quelques formules.* — Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, nous avons été conduit à poser

$$(24)\quad \begin{cases} K = p'q'' - q'p'', & K_1 = q''q - q'p'', & K_2 = p'q'' + p''p, \\ K' = p''q - q''p, & K_1' = p'p'' - q''p, & K_2' = p''q + q'q'', \end{cases}$$

Utilisons dès à présent ces notations abrégées.

(α). On a vu notamment (V, n° 27) que le plan Ξ, connexe du plan Π, est représenté par l'équation

$$(25)\quad \begin{cases} \quad [(p - q')p'' + (q + p')q'']X \\ + [(q + p')p'' - (p - q')q'']Y + (p''^2 + q''^2)Z = 0, \end{cases}$$

Avec nos notations actuelles, il revient donc à

$$(25')\quad (K_1 + K_2)X + (K_1' + K_2')Y + (p''^2 + q''^2)Z = 0.$$

On peut lui donner une autre forme; car, si l'on pose subsidiairement

$$(26)\quad \begin{cases} K_\gamma = p'p'' + q'q'' = K_1' + K_2' - K', \\ K_\gamma' = p''p + q''q = K_1 + K_2 - K, \end{cases}$$

on aura encore pour équation du même plan

$$(25'')\quad (K + K_\gamma')X + (K' + K_\gamma)Y + (p''^2 + q''^2)Z = 0.$$

(β). En remontant de même aux expressions des polynômes $\mathfrak{D}_i$ et $\mathfrak{E}_i$ (V, n° 8), polynômes que nous retrouverons bientôt, on voit qu'en y faisant $\operatorname{tg} i = u$, elles peuvent s'écrire

$$(27)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}_i(u^2 + 1) = (K + K_1)u^2 + (K_2' - K_1')u + (K + K_2), \\ \mathfrak{E}_i(u^2 + 1) = (K' + K_1')u^2 - (K_2 - K_1)u + (K' + K_2'). \end{cases}$$

Les expressions de $\mathfrak{D}_j$ et $\mathfrak{C}_j$ en résultent par le seul changement de u en $-\frac{1}{u}$, ce qui donne

$$(27')\quad \begin{cases} \mathfrak{D}_j(u^2+1)=(K+K_1)-(K_2'-K_1')u+(K+K_2)u^2, \\ \mathfrak{C}_j(u^2+1)=(K'+K_1')+(K_2-K_1)u+(K'+K_2')u^2. \end{cases}$$

III

Application géométrique des théories précédentes à la pseudo-sphère et au pseudo-plan.

12. I. — *Pseudo-sphère.* — Nous appelons ainsi une pseudo-surface telle que toutes les lignes issues de chacun de ses points sont des *lignes de courbure*.

L'équation générale de ces lignes

$$(S_1)\qquad p\,ds^2 + (q+p')\,ds\,ds' + q'\,ds'^2 = 0,$$

devant, par hypothèse, se réduire à une identité, on doit avoir

$$(a)\qquad p=0,\quad q+p'=0,\quad q'=0.$$

Mais puisque la condition caractéristique des surfaces, qui est, comme on le sait, $p+q'=0$, se trouve par là même identiquement vérifiée, il n'est pas nécessaire d'aller plus loin pour pouvoir affirmer que la pseudo-sphère n'existe pas en tant que pseudo-surface. C'est une surface proprement dite.

D'autre part, on a en chacun de ses points $q=-p'$, ou bien (I, nº 2) $R_2 = R_2'$. Cette surface ne se distingue donc pas de la sphère ordinaire.

Nous trouvant ainsi amené, de proche en proche, à faire à celle-ci l'application de nos théories précédentes, commençons par celle des faisceaux optiques.

1º Prenons à cet effet, par exception, pour directrice plane le cercle $f_0 = X^2 + Y^2 - 1 = 0$. Les formules simplifiées du

n° 4 se trouvant applicables, en vertu des hypothèses $p = q' = 0$, on obtient, sans calcul, pour faisceau optique correspondant, le cône de révolution

$$(b) \qquad \xi^2 + \eta^2 - (q\zeta + 1)^2 = 0,$$

dont le sommet, situé sur OZ, est à la distance focale $\zeta = -\frac{1}{q}$, de l'origine.

Soit, en second lieu $f_0 = p'X + q'Y = 0$, la trace horizontale du plan tangent P_1 au cône C_1. Le faisceau optique qui lui correspond sera le plan

$$p'\xi + q'\eta = 0,$$

c'est-à-dire le plan P_1 lui-même, lequel, on peut s'en assurer, se trouve coïncider avec le plan actuel de polarisation Π du rayon OZ.

2° Passons aux faisceaux anoptiques. Il nous faut remarquer avant tout que les conditions (*a*) ci-dessus réduisent les formules générales (18′) à

$$(c) \qquad \begin{cases} (q^2\zeta^2 + 1)\,X = \xi - q\zeta\eta, \\ (q^2\zeta^2 + 1)\,Y = q\zeta\xi + \eta. \end{cases}$$

Cela posé, soit encore $f_0 = X^2 + Y^2 - 1 = 0$ la directrice plane donnée. Substituant à X et à Y leurs valeurs, on obtient pour le lieu anoptique correspondant l'hyperboloïde de révolution à une nappe

$$(d) \qquad \xi^2 + \eta^2 - q^2\zeta^2 = 1.$$

C'est donc une surface réglée et par suite (exceptionnellement) un faisceau dont le cône asymptote se trouve être le cône (*b*) transporté à l'origine parallèlement à lui-même.

Que si l'on fait, en second lieu, $f_0 = p'X + q'Y = 0$, on obtiendra le paraboloïde hyperbolique

$$(e) \qquad q(q'\xi - p'\eta)\,\zeta + (p'\xi + q'\eta) = 0,$$

dont le plan tangent à l'origine est le plan P_1 et dont le plan directeur vertical est le plan tangent P_2 perpendiculaire à P_1.

13. II. — *Pseudo-plan.* — Nous appelons *pseudo-plan* une pseudo-surface telle que toutes les lignes issues de chacun de ses points sont des *lignes asymptotiques.*

L'équation générale de ces lignes

$$(S_1) \qquad q\,ds^2 - (p - q')\,ds\,ds' - p'\,ds'^2 = 0,$$

devant, par hypothèse, se réduire à une identité, il faut avoir en conséquence

$$(f) \qquad q = 0, \quad p - q' = 0, \quad p' = 0.$$

La condition minima $q - p' = 0$ se trouve donc satisfaite identiquement, mais non pas celle des surfaces $p + q' = 0$. Il s'ensuit que le pseudo-plan est une pseudo-surface *minima*. Passons en revue ses propriétés en ce qui concerne nos deux catégories de faisceaux.

1° S'il s'agit d'abord des faisceaux optiques, on remarque, avant tout calcul, qu'à cause des conditions (f), les formules générales $(5')$ deviennent

$$(g) \qquad \begin{cases} (p^2\zeta^2 + 1)\,X = \xi - p\zeta\eta, \\ (p^2\zeta^2 + 1)\,Y = p\zeta\xi + \eta. \end{cases}$$

En mettant ces valeurs dans $f_0 = X^2 + Y^2 - 1 = 0$, on obtient pour faisceau correspondant l'hyperboloïde de révolution à une nappe

$$(h) \qquad \xi^2 + \eta^2 - p^2\zeta^2 = 1,$$

qui ne diffère de (d) que par le changement de q en p, ainsi que les relations (g) et (c) comparées entre elles pouvaient le faire prévoir.

On verra de même que la directrice $f_0 = q'X - p'Y = 0$, trace actuelle du plan de polarisation confondue avec celle du plan P_1, donne le paraboloïde

$$(k) \qquad p\,(p'\xi + q'\eta)\,\zeta - (q'\xi - p'\eta) = 0,$$

corrélatif du paraboloïde (e).

2° En ce qui concerne les faisceaux anoptiques, les formules

simplifiées du n° 9 étant directement applicables, puisque l'on a $q = p' = 0$, la directrice circulaire ci-dessus fournit, sans calcul nouveau, le cône de révolution

$$(l) \qquad \xi^2 + \eta^2 - (p\zeta - 1)^2 = 0,$$

parallèle au cône asymptote de l'hyperboloïde (h), mais dont le sommet est au point $\zeta = \frac{1}{p}$ de l'axe OZ.

Lorsque $p = 0$, ce cône devient un cylindre. C'est le cas où notre pseudo-plan se transforme en un *plan* qui est celui des XY, et où les lignes asymptotiques se réduisent à des semi-droites rayonnant dans toutes les directions possibles prises dans ce plan, à partir du pied de sa *normale* OZ.

Quant à la directrice $q'X - p'Y = 0$, elle fait trouver pour faisceau anoptique son propre plan projetant $q'\xi - p'\eta = 0$, lequel se confond avec le plan actuel de polarisation Π.

On verra par la suite que les équations des lignes de courbure et des lignes asymptotiques, en coordonnées obliques, peuvent se prêter à des considérations du même genre. La pseudo-sphère, il est vrai, n'est toujours qu'une sphère; mais le pseudo-plan revêt un plus haut degré de généralité, tout en restant une pseudo-surface minima. Le lecteur fera du reste alors lui-même cette extension sans difficulté. Nous n'y reviendrons pas.

IV

Premières propriétés de la double série de faisceaux dioptiques moyens ou complémentaires.

14. Les deux séries de cônes moyens de Malus C_i, ou complémentaires C_j, ont, comme on le sait, pour équations respectives

$$(28)\qquad (\mathfrak{P}X + \mathfrak{Q}Y)\sin i - (\mathfrak{Q}X - \mathfrak{P}Y)\cos i = 0,$$
$$(29)\qquad (\mathfrak{P}X + \mathfrak{Q}Y)\cos i + (\mathfrak{Q}X - \mathfrak{P}Y)\sin i = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$(30)\qquad \begin{cases} pX + p'Y + p''Z = \mathfrak{P}, \\ qX + q'Y + q''Z = \mathfrak{Q}. \end{cases}$$

Leurs discriminants sont donc, eu égard à (2) et à (15),

$$(31)\qquad \Delta_i = \Delta_1 \sin i + \Delta_2 \cos i,$$
$$(32)\qquad \Delta_j = \Delta_1 \cos i - \Delta_2 \sin i.$$

D'autre part, les traces horizontales des mêmes cônes coïncidant, on le sait aussi, soit avec les tangentes aux lignes pseudo-conjuguées d'obliquité i de $\mathcal{F}'$, soit avec celles des complémentaires de ces lignes, écrivons avant tout explicitement les équations de ces deux catégories de courbes S_i et S_j. On a

$$(S_i)\qquad \begin{cases} (p \sin i - q \cos i)\,ds^2 + [(q+p')\sin i + (p-q')\cos i]\,ds\,ds' \\ + (q' \sin i + p' \cos i)\,ds'^2 = 0, \end{cases}$$

$$(S_j)\qquad \begin{cases} (p \cos i + q \sin i)\,ds^2 + [(q+p')\cos i - (p-q')\sin i]\,ds\,ds' \\ + (q' \cos i - p' \sin i)\,ds'^2 = 0. \end{cases}$$

Pour passer des lignes S_i aux lignes S_j, et *vice versa*, il suffit de changer i en $i \pm \frac{\pi}{2}$, *indifféremment;* mais comme il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit d'équations non homogènes en $\sin i$ et $\cos i$, force nous sera de dédoubler les plus importantes, tout au moins, de nos formules ultérieures.

Cette remarque faite, les traces horizontales des cônes C_i et C_j dont nous parlions plus haut peuvent se mettre sous la forme

$$(33)\qquad \frac{\mathfrak{Q}_z \sin i + \mathfrak{P}_z \cos i}{X} = \frac{\mathfrak{Q}_z \cos i - \mathfrak{P}_z \sin i}{Y} = -\frac{1}{\zeta},$$

$$(34)\qquad \frac{\mathfrak{Q}_z \cos i - \mathfrak{P}_z \sin i}{X} = \frac{-\mathfrak{Q}_z \sin i - \mathfrak{P}_z \cos i}{Y} = -\frac{1}{\zeta},$$

en posant, par analogie avec (30) et à cause de $Z = 0$,

$$(35) \qquad \begin{cases} pX + p'Y = \mathfrak{P}_z, \\ qX + q'Y = \mathfrak{Q}_z; \end{cases}$$

d'où l'on voit que, pour $i = \frac{\pi}{2}$ et $i = \pi$ dans les premières, ou bien pour $i = 0$ et $i = \frac{\pi}{2}$ dans les secondes, ces formules reproduisent les cas-limites déjà analysés.

De (33), en particulier, on tire les paraboloïdes

$$\begin{aligned} &[(qX + q'Y)\sin i + (pX + p'Y)\cos i]\,\zeta + X = 0, \\ &[(qX + q'Y)\cos i - (pX + p'Y)\sin i]\,\zeta + Y + 0, \end{aligned}$$

avec

$$(36) \quad D_i = (pq' - qp')\zeta^2 + [(p + q')\cos i + (q - p')\sin i]\,\zeta + 1 = 0.$$

Le système (34) donne semblablement

$$\begin{aligned} &[(qX + q'Y)\cos i - (pX + p'Y)\sin i]\,\zeta + X = 0, \\ &[(qX + q'Y)\sin i + (pX + p'Y)\cos i]\,\zeta - Y = 0, \end{aligned}$$

avec

$$(37) \quad D_j = (pq' - qp')\zeta^2 - [(p + q')\sin i - (q - p')\cos i]\,\zeta + 1 = 0.$$

Les équations $D_i = 0$ et $D_j = 0$ aideront à faire connaître (n° 1), pour chaque valeur de i, les couples correspondants de droites focales *dioptiques* (δ_i) et (δ_j) qui se projettent horizontalement suivant les tangentes aux lignes S_i, S_j, et ne sont autres elles-mêmes dans l'espace, lorsqu'elles sont réelles, que les génératrices horizontales qu'ont en commun les paraboloïdes précédents.

Plus généralement, au lieu de (33), considérons le système

$$(38) \qquad \frac{\mathfrak{Q}_z \sin i + \mathfrak{P}_z \cos i}{X - \xi} = \frac{\mathfrak{Q}_z \cos i - \mathfrak{P}_z \sin i}{Y - \eta} = -\frac{1}{\zeta}.$$

En le résolvant, il donne

$$(38') \quad \begin{cases} D_i X = [(q'\cos i - p'\sin i)\zeta + 1]\,\xi - (q'\sin i + p'\cos i)\,\zeta\eta, \\ D_i Y = (p\sin i - q\cos i)\,\zeta\xi + [(p\cos i + q\sin i)\zeta + 1]\,\eta. \end{cases}$$

Au système (34), substituons de même

$$(39)\quad \frac{\mathfrak{C}_z \cos i - \mathfrak{P}_z \sin i}{X-\xi} = \frac{-\mathfrak{C}_z \sin i - \mathfrak{P}_z \cos i}{Y-\eta} = -\frac{1}{\zeta}.$$

On en déduira

$$(39')\quad \begin{cases} D_j X = -[(q'\sin i + p'\cos i)\zeta - 1]\xi - (q'\cos i - p'\sin i)\zeta\eta, \\ D_j Y = (p\cos i + q\sin i)\zeta\xi - [(p\sin i - q\cos i)\zeta - 1]\eta; \end{cases}$$

d'où l'on voit que ce dernier résulte de son homologue (38') par le changement de i en $i + \frac{\pi}{2}$, *exclusivement*. C'est une application de la remarque faite ci-dessus.

15. *Équation d'un lieu dioptique quelconque. — Cône asymptote.* — En substituant les valeurs (38') de X et de Y dans l'équation de la directrice plane f_0, on obtiendra celle du *lieu dioptique* F_i correspondant. C'est qu'en effet si l'on désigne par ζ' une des racines (réelles ou non) de l'équation $D_i = 0$, et qu'on coupe la surface F_i par le plan vertical

$$(40)\quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{(q'\cos i - p'\sin i)\zeta' + 1}{(q'\sin i + p'\cos i)\zeta'} = -\frac{(p\sin i - q\cos i)\zeta'}{(p\cos i + q\sin i)\zeta' + 1},$$

qu'on peut aussi écrire

$$(40')\quad \frac{\eta}{\xi} = -\frac{K'\zeta' + (p\cos i + q\sin i)}{q'\sin i + p'\cos i} = \frac{p\sin i - q\cos i}{K'\zeta' + (q'\cos i - p'\sin i)},$$

il est aisé de prouver (n° 2) que la surface F_i contient les droites focales (δ_i), ce qui justifie, on le sait, sa dénomination.

Quant au cône asymptote γ_i de cette surface, les formules (38') réduites aux termes du second degré, savoir :

$$(41)\quad \begin{cases} K'X = (q'\cos i - p'\sin i)\dfrac{\xi}{\zeta} - (q'\sin i + p'\cos i)\dfrac{\eta}{\zeta}, \\ K'Y = (p\sin i - q\cos i)\dfrac{\xi}{\zeta} + (p\cos i + q\sin i)\dfrac{\eta}{\zeta}, \end{cases}$$

permettront, à chaque fois, de le déterminer.

16. *Sections horizontales.* — Désignons à nouveau par A_0 l'aire (fermée) de la courbe f_0 et par A_{ζ_i} celle de la section faite dans la surface dioptique F_i par un plan horizontal quelconque que nous désignerons (pour la symétrie des notations) par ζ_i. La formule (9) étendue au cas présent, puis *intégrée*, nous donnera $\frac{A_{\zeta_i}}{A_0} = D_i$.

Entre l'aire a_{ζ_i} de la section produite par le même plan horizontal ζ_i dans le cône asymptote γ_i de F_i et l'aire A_0, on aura de même la relation $\frac{a_{\zeta_i}}{A_0} = K'\zeta_i^2$.

Mais, de son côté, la série complémentaire conduira successivement aux formules analogues $\frac{A_{\zeta_j}}{A_0} = D_j$ et $\frac{a_{\zeta_j}}{A_0} = K'\zeta_j^2$. Faisant $\zeta_i = \zeta_j$, chose permise, puisque ces plans sont quelconques, on en conclut $a_{\zeta_i} = a_{\zeta_j}$, ce qui est la généralisation de l'équivalence démontrée, au n° 8, entre les aires-limites a_{ζ_1} et a_{ζ_2}.

Vérifions cet important résultat par une autre méthode. Des formules (41) on tire, en affectant pour un instant d'indices les coordonnées courantes du cône γ_i,

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{\xi_i}{\zeta_i} = (qX + q'Y)\sin i + (pX + p'Y)\cos i, \\ \frac{\eta_i}{\zeta_i} = (qX + q'Y)\cos i - (pX + p'Y)\sin i, \end{cases}$$

ou bien (8'), après avoir fait $\zeta_1 = \zeta_i$,

$$(42') \quad \begin{cases} \xi_i = \xi_1 \sin i - \eta_1 \cos i, \\ \eta_i = \xi_1 \cos i + \eta_1 \sin i, \end{cases}$$

système équivalent à cet autre :

$$(42'') \quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_i \sin i + \eta_i \cos i, \\ \eta_1 = -\xi_i \cos i + \eta_i \sin i. \end{cases}$$

Ceci nous prouve déjà que le cône γ_i n'est autre que le cône primitif γ_1 que l'on aurait fait tourner autour de OZ, de gauche à droite, d'un angle égal à $\frac{\pi}{2} + i$.

D'autre part, les formules (39'), réduites aux termes du second degré, conduisent pour le cône γ_j au système

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi_j}{\zeta_j} = (qX + q'Y)\cos i - (pX + p'Y)\sin i, \\ -\dfrac{\eta_j}{\zeta_j} = (qX + q'Y)\sin i + (pX + p'Y)\cos i, \end{cases}$$

et, finalement, à celui-ci :

$$(43')\quad \begin{cases} \xi_i = \xi_j \cos i - \eta_j \sin i, \\ \eta_i = \xi_j \sin i + \eta_j \cos i; \end{cases}$$

d'où l'on voit que le cône γ_j peut, à son tour, être identifié avec le cône γ_i que l'on aurait fait tourner, de gauche à droite, autour de OZ, d'un angle égal à i.

Il suit de là que, pour toute valeur de i, les cônes γ_i et γ_j ne sont autres que le cône initial γ_i lui-même pris seulement dans deux orientations orthogonales arbitraires. — Donc $\mathbf{a}_{\zeta_i} = \mathbf{a}_{\zeta_j}$, ce qu'il fallait démontrer.

17. *Forme particulière de l'équation d'un faisceau dioptique.* — D'après l'équation des lignes S_i (nº 14), les tangentes de ces lignes ne peuvent coïncider avec les axes actuels des coordonnées OX et OY que si l'on a

$$(l)\quad \begin{cases} p\sin i - q\cos i = 0, \\ q'\sin i + p'\cos i = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(l')\qquad \operatorname{tg} i = \frac{q}{p} = -\frac{p'}{q'};\quad \text{d'où}\quad pp' + qq' = 0.$$

En supposant ces conditions remplies, l'expression (36) de D_i peut tout d'abord se mettre sous la forme plus condensée

$$(m)\quad D_i = [(p\cos i + q\sin i)\zeta + 1]\,[(q'\cos i - p'\sin i)\zeta + 1],$$

en même temps que le système (38') se réduit à

$$(n)\quad \begin{cases} [(p\cos i + q\sin i)\zeta + 1]\,X = \xi, \\ [(q'\cos i - p'\sin i)\zeta + 1]\,Y = \eta. \end{cases}$$

Posant $\sqrt{p^2+q^2}=\omega_z$ avec $\sqrt{p'^2+q'^2}=\omega'_z$ [1], et utilisant les relations (l'), il vient, eu égard aux deux combinaisons de signes qu'on peut adopter pour les valeurs de $\sin i$ et de $\cos i$,

$$(n')\qquad \begin{cases} (1+\omega_z\zeta)\,X=\xi, \\ (1\pm\omega'_z\zeta)\,Y=\eta. \end{cases}$$

L'équation du lieu dioptique correspondant est donc

$$f_0\left(\frac{\xi}{1+\omega_z\zeta},\ \frac{\eta}{1\pm\omega'_z\zeta}\right)=0.$$

C'est une surface réglée et, par conséquent, un faisceau. Comme il est analogue au faisceau (10), son mode de génération nous est dès lors connu.

V

Autres propriétés des faisceaux dioptiques.

18. *Lieu géométrique des droites focales d'espèce quelconque.* — Il nous suffira, pour l'obtenir, de chercher le lieu des droites focales dioptiques (δ_i) ou (δ_j) (n° 14); car on peut prévoir que, déterminée de la sorte, la surface en question les embrassera toutes sans en excepter les droites focales-limites (δ_1) et (δ_2). — Le calcul justifie du reste *a posteriori* cette induction.

Cela étant, nous ferons observer que, pour chaque valeur attribuée à i, les droites (δ_i), par exemple, résultent de l'intersection des plans verticaux projetants des lignes S_i, plans qui se tirent de (28) pour $Z=0$, savoir :

---

[1] En cinématique, ces valeurs de ω_z et de ω'_z sont précisément celles des vitesses angulaires *horizontales* d'un système rigide dans un mouvement à deux variables.

$$\left\{\begin{array}{l}[(pX + p'Y)X + (qX' + qY)Y]\sin i,\\ -[(qX + q'Y)X - (pX + p'Y)Y]\cos i = 0,\end{array}\right.$$

avec les plans horizontaux correspondants (36) ou

$$K'Z^2 + [(p + q')\cos i + (q - p')\sin i]Z + 1 = 0.$$

On obtiendra donc le lieu demandé en éliminant i entre ces deux équations. Développant les calculs, on se trouve conduit à une équation du 8e ordre, laquelle se décompose en deux autres du 4e seulement; les voici :

$$(44)\quad K'(X^2 + Y^2)Z^2 - [(pX + p'Y)^2 + (qX + q'Y)^2] = 0,$$
$$(45)\quad (X^2 + Y^2) - [(pX + p'Y)^2 + (qX + q'Y)^2]Z^2 = 0.$$

Elles représentent deux *conoïdes réciproques* dont les nappes sont symétriques par rapport au plan horizontal et dont la constante d'inversion est égale à $\frac{1}{K'}$. En affectant d'indices les ordonnées correspondantes, on déduit en effet des équations ci-dessus la relation caractéristique

$$(46)\qquad Z_1Z_2 = \frac{1}{K'},$$

que l'on peut substituer à l'un quelconque des conoïdes trouvés.

D'autre part, comme cette même relation (46) est implicitement incluse dans la propriété du produit des racines des équations $D_i = 0$ et $D_j = 0$, c'est-à-dire (36) et (37), on s'explique pourquoi on ne rencontre qu'un seul conoïde (le premier) lorsqu'on cherche le lieu actuel par l'élimination de i entre les équations (40) ou (40'). Mais revenons à l'équation dédoublée obtenue plus haut.

Le maximum ou le minimum de Z dans l'une correspond évidemment au minimum ou au maximum de cette ordonnée dans l'autre. Posant donc $\frac{Y}{X} = \operatorname{tg}\omega$ dans (45), et égalant à zéro la dérivée de Z par rapport à ω, on trouve pour correspondre aux valeurs-limites de cette fonction

$$(47)\qquad \operatorname{tg} 2\Omega = \frac{2(pp' + qq')}{p^2 + q^2 - (p'^2 + q'^2)} = \frac{2\mathcal{B}'}{\mathcal{A} - \mathcal{A}'},$$

en faisant

$$(48) \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = p^2 + q^2 = \omega_2^2, \\ \mathcal{B}' = pp' + qq' = \omega_2\omega_2' \cos(\omega_2, \omega_2'), \\ \mathcal{A}' = p'^2 + q'^2 = \omega_2'^2. \end{cases}$$

Or, on reconnaît là les directions rectangulaires des axes de figure de l'*ellipse déviatrice* de la pseudo-surface $\mathcal{F}'$, savoir :

$$(49) \qquad (pX + p'Y)^2 + (qX + q'Y)^2 = 1,$$

ou

$$\mathcal{A}X^2 + 2\mathcal{B}'XY + \mathcal{A}'Y^2 = 1,$$

ellipse dont l'aire a pour valeur $\dfrac{\pi}{\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}' - \mathcal{B}'^2}}$ ou bien $\dfrac{\pi}{K'}$.

Arrêtons-nous un moment à l'examen de quelques-unes des propriétés de la relation (47).

(α). Pour $q = p'$, condition caractéristique des pseudo-surfaces minima, il vient $\operatorname{tg} 2\,\Omega = \dfrac{2q}{p - q'}$. On reconnaît là les bissectrices des lignes de courbure relatives à ce cas particulier (n° 1).

(β). Pour $p = -q'$, condition caractéristique des surfaces, il vient $\operatorname{tg} 2\,\Omega = -\dfrac{2p}{q + p'}$, ce qui définit les bissectrices des lignes asymptotiques de ces surfaces (n° 6).

(γ). Si l'on cherche la condition de coïncidence des deux plans axiaux-limites (12) et (23), on trouve qu'elle revient à $\operatorname{tg} 2\,\Omega = \operatorname{tg} 2\,\mathbf{a}_1$, ou bien à $\Omega = \mathbf{a}_1 + \dfrac{k\pi}{2}$, en désignant par $\operatorname{tg} \mathbf{a}_1$ le coefficient angulaire $\dfrac{q'}{p'}$ du plan tangent P_1, ou simplement par $\mathbf{a}_1$, son *azimut*.

(δ). Lorsque $K' = 0$, on observe que $\operatorname{tg} 2\,\Omega = -\dfrac{2pp'}{p'^2 - p^2}$; et comme alors le coefficient angulaire $\operatorname{tg} \mathbf{a}$ du plan Π a pour expression $-\dfrac{p}{p'} = \operatorname{tg} \varphi_0$, on en conclut $\Omega = \varphi_0 + \dfrac{k\pi}{2}$.

19. *Polarisation de l'axe directeur d'un faisceau dioptique.* — 1° L'analogie nous conduit à prendre pour directrice

rectiligne d'un faisceau dioptique moyen la trace **horizontale** OT_i du plan tangent P_i, trace dont l'équation est

$$f_0 = (q' \cos i - p' \sin i)\, X - (q' \sin i + p' \cos i)\, Y = 0,$$

ou, plus simplement,

$$f_0 = s' X - t' Y = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$(50) \qquad \begin{cases} q' \cos i - p' \sin i = s'', \\ q'' \sin i + p' \cos i = t'. \end{cases}$$

Substituant à X et à Y leurs valeurs (38′) et faisant, ici encore, $\operatorname{tg} i = u$, on obtient le paraboloïde hyperbolique

$$(51) \qquad (K_i'\xi - K_i\eta)\,\zeta + (u^2 + 1)(s'\xi - t'\eta) = 0,$$

à condition de poser

$$(52) \qquad \frac{\eta}{\xi} = \frac{K_1' u^2 - (K_2 - K_1)\, u + K_2'}{K_1 u^2 + (K_2' - K_1')\, u + K_2} = \frac{\mathfrak{C}_i - K'}{\mathfrak{D}_i - K} = \frac{K_i'}{K_i}.$$

Nous donnerons à ce plan directeur vertical du paraboloïde (51) le nom de *plan axial moyen* du rayon OZ, et nous le désignerons par Π_i.

Pour qu'il coïncide avec le plan de polarisation Π, il faut avoir

$$(p) \qquad [(q - p')\, u + (p + q')]\,(\Delta_1 u + \Delta_2) = 0.$$

On remarquera que la première des conditions est toujours identiquement vérifiée quand $\mathcal{F}'$ est une *surface* minima. Quant à la seconde $\Delta_1 u + \Delta_2 = 0$, on y reconnaît $\Delta_i = 0$ (V, n° 11).

2° Prenons maintenant pour f_0 la trace OT_j du plan tangent complémentaire P_j

$$f_0 = (q' \sin i + p' \cos i)\, X + (q' \cos i - p' \sin i)\, Y = 0,$$

ou, plus simplement (50),

$$f_0 = t' X + s' Y = 0.$$

A l'aide du système (39′), on obtiendra le nouveau paraboloïde

$$(53) \qquad (K_j'\xi - K_j\eta)\,\zeta - (u^2 + 1)(t'\xi + s'\eta) = 0,$$

pourvu qu'on pose (27') comme équation de son plan directeur vertical

$$(54)\qquad \frac{\eta}{\xi}=\frac{K'_1+(K_2-K_1)u+K'_2u^2}{K_1-(K'_2-K'_1)u+K_2u^2}=\frac{\mathfrak{C}_j-K'}{\mathfrak{D}_j-K}=\frac{K'_j}{K}.$$

Nous qualifierons ce plan directeur du nom de ***plan axial complémentaire*** de OZ, et nous le désignerons par Π_j.

Pour qu'il coïncide avec le plan Π, il faut avoir

$$(q)\qquad [(q-p')-(p+q')u](\Delta_1-\Delta_2 u)=0.$$

Dans la condition $\Delta_1-\Delta_2 u=0$, notamment, on reconnaît $\Delta_j=0$ (V, n° 11).

C'est l'analogie, avons-nous fait observer, avec les deux premiers cas-limites qui nous a amené à appliquer aux traces OT_i et OT_j, respectivement, les formules (38') et (39'). En intervertissant celles-ci, on obtiendrait, pour plans verticaux des paraboloïdes correspondants, les plans perpendiculaires aux plans axiaux déjà trouvés Π_i et Π_j. C'est ce que nous constaterons mieux encore, du reste, dans le paragraphe qui suit.

20. *Problème.* — A quelles conditions les plans axiaux Π_i et Π_j peuvent-ils coïncider?

Pour le savoir, il nous faut égaler entre eux les rapports qui forment les seconds-membres des équations (52) et (54). Or, en combinant préalablement les termes de ces rapports par voie d'addition, on est conduit à poser

$$(55)\qquad \frac{Y}{X}=\frac{K'_1u^2-(K_2-K_1)u+K'_2}{K_1u^2+(K'_2-K'_1)u+K_2}=\frac{K'_1+K'_2}{K_1+K_2},$$

ce qui fournit une équation du second degré seulement (au lieu d'une équation du quatrième qu'il eût fallu débarrasser des solutions imaginaires $u^2+1=0$). Ainsi abaissée, l'équation du problème est

$$(56)\qquad u^2-\frac{(K_2^2-K_1^2)+(K'^2_2-K'^2_1)}{K_2K'_1-K_1K'_2}u-1=0.$$

Cela étant, si l'on observe, d'une part, qu'en représentant, comme ci-dessus, par a_2 l'azimut du plan tangent P_2, on a $\operatorname{tg} 2\,a_2 = \frac{2p'q'}{p'^2 - q'^2}$, et qu'on tienne compte, d'autre part, des valeurs multiples de Ω données par la formule (47), Ω_1 désignant la plus petite d'entre elles, on reconnaîtra sans peine que l'équation précédente revient à

$$(56') \qquad u^2 + 2 \cot 2\,(a_2 - \Omega_1)\,u - 1 = 0;$$

d'où l'on tire $u = \operatorname{tg}\,(a_2 - \Omega_1)$ et $u = -\cot\,(a_2 - \Omega_1)$. Mais $u = \operatorname{tg} i$; on a donc finalement les deux solutions *rectangulaires*

$$(57) \qquad i = a_2 - \Omega_1, \quad i = (a_2 - \Omega_1) \pm \frac{\pi}{2}.$$

Les plans Π_i et Π_j ayant, dans ces deux cas, pour équation commune $\frac{Y}{X} = \frac{K'_1 + K'_2}{K_1 + K_2}$, il est remarquable que leur trace horizontale se trouve être alors perpendiculaire à celle du plan Ξ ou (25'), connexe du plan Π.

VI

Relations homographiques entre les plans tangents aux divers cônes de Malus et les plans axiaux qui leur correspondent.

21. I. De l'équation (1) du cône proprement dit de Malus nous déduisons d'abord celle de son plan tangent P_1 le long de OZ, savoir :

$$(58) \qquad \frac{Y}{X} = \operatorname{tg} a_1 = -\frac{p'}{q'}.$$

A l'aide de cette même équation (1), nous formons ensuite celle de la conique

$$(59) \qquad pX^2 + (p' + q)\,XY + q'Y^2 = 1,$$

Si l'on y fait $\nu_i = \frac{s'}{t'}$, puis $\nu_i = -\frac{t'}{s'}$, on retrouve les plans Π et Π_γ. Inversement, pour $\mu_i = -\frac{s'}{t'}$, on a comme expression de ν_i :

(68) $$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{K'_1 u^2 - (K_2 - K_1) u + K'_2}{K_1 u^2 + (K'_2 - K'_1) u + K_2} = \frac{K'_i}{K_i}.$$

Nous reconnaissons là le plan axial-moyen Π_i ou (52) de OZ. Pour $\mu_i = -\frac{t'}{s'}$, on obtiendrait le plan perpendiculaire à Π_j (54).

24. IV. De l'équation (29) de la série complémentaire des cônes de Malus, on tire pour celle de leur plan tangent P_j :

(69) $$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} a_j = -\frac{q' u + p'}{q' - p' u} = -\frac{t'}{s'}.$$

Considérons la conique suivante formée à l'aide de (29) :

$$(qu + p) X^2 + [(q' u + p') - (pu - q)] XY - (p' u - q') Y^2 = 1.$$

On voit que, pour $u = 0$, elle reproduit la première des coniques-limites, et pour $u = \infty$, la *conjuguée* de la seconde. Entre deux directions pseudo-conjuguées quelconques μ_j et ν_j, on a la relation homographique

(70) $$(qu + p) + (q' u + p') \mu_j - (pu - q) \nu_j - (p' u - q') \mu_j \nu_j = 0.$$

Si l'on y fait successivement $\nu_j = \frac{t'}{s'}$ et $\nu_j = -\frac{s'}{t'}$, on retombe à nouveau sur les plans Π et Π_γ.

Inversement, pour $\mu_j = -\frac{t'}{s'}$, on trouve

(71) $$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \alpha_j = \frac{K'_1 + (K_2 - K_1) u + K'_2 u^2}{K_1 - (K'_2 - K'_1) u + K_2 u^2} = \frac{K'_j}{K_j}.$$

C'est le plan Π_j (54) ou le plan axial-moyen complémentaire de OZ. On reproduirait le plan perpendiculaire à Π_i en posant $\mu_j = \frac{s'}{t'}$.

25. La propriété réciproque qui suit peut servir à expliquer pourquoi, sans condition d'aucune sorte, les plans Π et Π_γ se sont trouvés liés l'un à l'autre, à quatre reprises différentes, dans les relations exposées plus haut.

Sans nous arrêter aux cas-limites, supposons tout de suite qu'on prenne successivement pour directrice plane d'un faisceau moyen ou complémentaire la trace $f_0 = K'X - KY = 0$ du plan Π; on obtiendra pour faisceaux correspondants les deux paraboloïdes hyperboliques

$$(72) \qquad \begin{cases} K''(s''\xi - t''\eta)\zeta - (K'\xi - K\eta) = 0, \\ K''(t''\xi + s''\eta)\zeta + (K'\xi - K\eta) = 0. \end{cases}$$

De même, pour $f_0 = K'_\gamma X + K_\gamma Y = 0$, trace du plan Π_γ, on trouvera

$$(72') \qquad \begin{cases} K''(t''\xi + s''\eta)\zeta + (K'_\gamma\xi + K_\gamma\eta) = 0, \\ K''(s''\xi - t''\eta)\zeta + (K'_\gamma\xi + K_\gamma\eta) = 0. \end{cases}$$

Ces importantes relations recevront dans un prochain travail tout leur développement.

26. Terminons par une remarque générale.

De notre précédent Mémoire (V, n° 26) il suit que les divers résultats acquis dans celui-ci sont applicables *à tout rayon* OL *de l'espace*, pour le cas, tout au moins, où les coordonnées sont rectangulaires, et cela à la seule condition d'opérer dans les formules relatives à ce rayon les substitutions connues

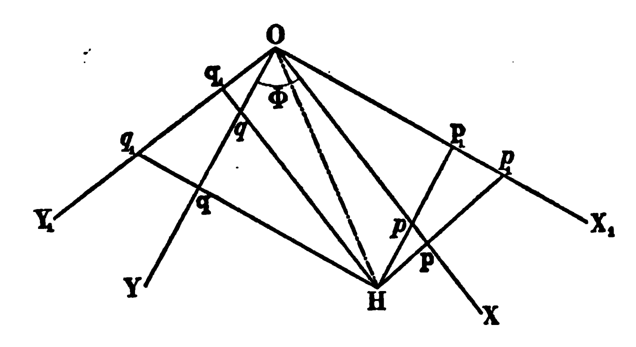
$$(73) \qquad \begin{cases} p = A, & q'' = B_2, & q = B''_1, \\ q' = A', & p'' = B'_1, & p' = B''_2, \end{cases}$$

les coefficients A, A', B_2 ... ainsi introduits se rapportant, comme on le sait, au trièdre azimutal $0\mathbf{xyz}$, dans lequel $0z$ a été mis en coïncidence avec le rayon donné OL.

VII

Extension sommaire de tout ce qui précède au cas où les coordonnées sont obliques.

27. I. *Formules préliminaires.* — Considérons les deux trièdres *birectangles* supplémentaires OXYZ et $OX_1Y_1Z_1$, le premier d'angle aigu Φ, le second d'angle obtus $\Pi - \Phi$, et tels que leurs axes OZ et OZ_1 coïncident. Sur le plan des XY ou des X_1Y_1, prenons un vecteur ou segment $OH = \omega_z$ dont nous désignerons par (p, q), (p_1, q_1) les coordonnées ou projections obliques, et par $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ les projections rectangulaires ou *ortho-composantes* (*contraordonnées,* d'après certains au teurs). Entre ces divers segments, on a les relations suivantes, dont on peut démontrer l'absolue généralité :



$$(74) \qquad \begin{cases} p + q \cos \Phi = \mathbf{p} = p_1 \sin \Phi, \\ q + p \cos \Phi = \mathbf{q} = q_1 \sin \Phi, \end{cases}$$

ou bien, équivalemment,

$$(74') \qquad \begin{cases} p_1 - q_1 \cos \Phi = \mathbf{p}_1 = p \sin \Phi, \\ q_1 - p_1 \cos \Phi = \mathbf{q}_1 = q \sin \Phi. \end{cases}$$

Deux nouveaux vecteurs, $OH' = \omega'_z$ et $OH'' = \omega''_z$, situés, eux aussi, sur le plan horizontal, donneraient lieu évidemment à

des formules analogues : les premières en p', q', $\mathbf{p}'$ ...; les secondes en p'', q'', $\mathbf{p}''$ ....

Ceci posé, il résulte du Mémoire cité plus haut (n° 3) qu'eu égard aux notations précédentes, les lignes de courbure S_1 et les lignes asymptotiques S_2 de toute pseudo-surface $\mathfrak{F}''$ tangente au plan horizontal ont pour équation respective

$$(S_1) \qquad p_1 ds^2 + (q_1 + p'_1)\, ds\, ds' + q'_1 ds'^2 = 0,$$
$$(S_2) \qquad q\, ds^2 - (p - q')\, ds\, ds' - p' ds'^2 = 0,$$

les arcs élémentaires ds, ds' étant, *dans les deux cas*, comptés sur les premiers axes OX, OY.

Aux composantes obliques qui figurent dans ces formules on pourrait, vu l'homogénéité dont elles jouissent, substituer les composantes orthogonales qui leur correspondent, ce qui donnerait

$$(S_1) \qquad \mathbf{p}\, ds^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{p}')\, ds\, ds' + \mathbf{q}'\, ds'^2 = 0,$$
$$(S_2) \qquad \mathbf{q}_1 ds^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}'_1)\, ds\, ds' - \mathbf{p}'_1\, ds'^2 = 0.$$

Mais dans ce paragraphe, tout au moins, nous préférerons à ces dernières formes les précédentes.

On sait qu'aux lignes de courbure ou aux lignes asymptotiques se rapportent, par leurs tangentes à l'origine, le cône de Malus et son orthogonal, cônes dont les équations actuelles sont

$$(a) \qquad (p_1 X + p'_1 Y + p''_1 Z)\, X + (q_1 X + q'_1 Y + q''_1 Z)\, Y = 0,$$
$$(b) \qquad (q X + q' Y + q'' Z)\, X - (p X + p' Y + p'' Z)\, Y = 0,$$

et ont pour discriminants respectifs

$$(c) \qquad -\Delta_1 = p_1 q''^2_1 - (q_1 + p'_1)\, p''_1 q''_1 + q'_1 p''^2_1,$$
$$(d) \qquad \Delta_2 = q p''^2 - (p - q')\, p'' q'' - p' q''^2.$$

Plus généralement, les lignes pseudo-conjuguées S_i, d'obliquité i, ayant pour équation

$$(S_i) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p_1 \sin i - q \cos i)\, ds^2 + [(q_1 + p'_1) \sin i + (p - q') \cos i]\, ds\, ds' \\ \qquad + (q'_1 \sin i + p' \cos i)\, ds'^2 = 0, \end{array} \right.$$

les cônes moyens C_i, dont les traces horizontales coïncident avec les tangentes de ces lignes, pourront être représentés par l'équation

$$(e) \qquad (\mathfrak{p}_1 X + \mathfrak{q}_1 Y) \sin i - (\mathfrak{q} X - \mathfrak{p} Y) \cos i = 0,$$

à condition de poser

$$(f) \begin{cases} pX + p'Y + p''Z = \mathfrak{p}, \\ qX + q'Y + q''Z = \mathfrak{q}, \end{cases} \qquad (f_1) \begin{cases} p_1 X + p'_1 Y + p''_1 Z = \mathfrak{p}_1, \\ q_1 X + q'_1 Y + q''_1 Z = \mathfrak{q}_1. \end{cases}$$

Or, on a identiquement

$$(g) \begin{cases} \mathfrak{p} + \mathfrak{q} \cos \Phi = \mathfrak{p}_1 \sin \Phi, \\ \mathfrak{q} + \mathfrak{p} \cos \Phi = \mathfrak{q}_1 \sin \Phi, \end{cases} \qquad (g_1) \begin{cases} \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{q}_1 \cos \Phi = \mathfrak{p} \sin \Phi, \\ \mathfrak{q}_1 - \mathfrak{p}_1 \cos \Phi = \mathfrak{q} \sin \Phi; \end{cases}$$

il sera donc toujours possible d'obtenir des formules ne contenant que p, q, p', q' ... ou bien p_1, q_1, p'_1, q'_1 ..., c'est-à-dire des coordonnées obliques *de même espèce,* artifice commode pour les vérifications, notamment.

A peine est-il besoin d'ajouter qu'on peut passer des lignes S_i et de tout ce qui les concerne aux lignes complémentaires S_j par le simple changement de i en $i \pm \frac{\pi}{2}$.

28. II. *Plan de polarisation.* — Bien que la détermination du plan de polarisation Π d'un rayon donné OL mis en coïncidence avec l'axe des Z d'un trièdre *birectangle* eût dû trouver place dans notre précédent Mémoire, la question actuelle exige que nous suppléions à cette lacune en nous occupant tout spécialement des diverses formes que peut revêtir ce plan dans un tel système de coordonnées.

Et d'abord, on voit par les formules (e) et (g) ci-dessus que les cônes C_i et, conséquemment, les cônes C_j passent tous par OL ou OZ en même temps que par une seconde génératrice fixe OL_1, qui est l'intersection des plans $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{q} = 0$, ou, si l'on veut, des plans $\mathfrak{p}_1 = 0$, $\mathfrak{q}_1 = 0$. Prises ensemble, les directions OL et OL_1 déterminent le plan LOL_1, qui n'est autre que le plan Π. C'est une première solution du problème.

Une seconde, bien préférable, consiste à exprimer que le cône général C_i ou (e) devient évanouissant. L'équation du troisième degré en tg i à laquelle on est conduit revient, après la suppression du facteur $(\mathrm{tg}^2 i + 1)$ à $\Delta_1 \sin i + \Delta_2 \cos i = \Delta_i = 0$, ou bien à $\mathrm{tg}\, i = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, ce qui est de même *forme* que dans le cas où les coordonnées étaient rectangulaires. Portant cette valeur de tg i dans l'équation (e), on en déduit les deux plans dans lesquels se résout actuellement le cône C_i.

Le premier de ces plans n'est autre que le plan Π lui-même. On peut, en vertu des relations du n° 27, l'écrire indifféremment ainsi:

$$(h)\quad \frac{Y}{X} = \frac{p''q - q''p}{p'q'' - q'p''} = \frac{p_1''q_1 - q_1''p_1}{p_1'q_1'' - q_1'p_1''} = \frac{\mathbf{p}''\mathbf{q} - \mathbf{q}''\mathbf{p}}{\mathbf{p}'\mathbf{q}'' - \mathbf{q}'\mathbf{p}''} = \frac{\mathbf{p}_1''\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1''\mathbf{p}_1}{\mathbf{p}_1'\mathbf{q}_1'' - \mathbf{q}_1'\mathbf{p}_1''} = \frac{K'}{K}.$$

Quant au plan Ξ, connexe de Π, son équation est

$$(i)\quad (K_{(1)} + K_{(2)})\, X + (K'_{(1)} + K'_{(2)})\, Y + (p''p_1'' + q''q_1'')\, Z = 0,$$

pourvu qu'on pose

$$(75)\quad \begin{cases} K_{(1)} : \sin^2\Phi = q_1''q - q'p_1'', & K_{(2)} : \sin^2\Phi = p_1'q'' + p''p_1, \\ K'_{(1)} : \sin^2\Phi = p'p_1'' - q_1''p, & K'_{(2)} : \sin^2\Phi = p''q_1 + q_1'q''. \end{cases}$$

On pourrait aussi écrire, il est vrai, (74)

$$K_{(1)} : \sin\Phi = (q''q - q'p'') + (p''q - q'q'')\cos\Phi,$$

. . . .

mais généralement sans avantage, hormis pour les calculs de vérification, comme on l'a dit.

Quoi qu'il en soit, on constate que pour $\Phi = \frac{\pi}{2}$ on a bien $K_{(1)} = K_1$ (24), ainsi qu'on devait s'y attendre.

29. III. *Faisceaux dioptiques.* — 1° En procédant comme au n° 14, l'équation (e), dans laquelle on aura fait tout d'abord $Z = 0$, conduit finalement à poser, à l'instar de (38),

$$(j)\quad \frac{\mathfrak{Q}_{z_1} \sin i + \mathfrak{P}_z \cos i}{X - \xi} = \frac{\mathfrak{Q}_z \cos i - \mathfrak{P}_{z_1} \sin i}{Y - \eta} = -\frac{1}{\zeta},$$

conjointement avec

$$(76)\quad \begin{cases} pX + p'Y = \mathfrak{P}_z, \\ qX + q'Y = \mathfrak{Q}_z, \end{cases} \qquad (76')\quad \begin{cases} p_1X + p_1'Y = \mathfrak{P}_{z_1}, \\ q_1X + q_1'Y = \mathfrak{Q}_{z_1}. \end{cases}$$

On en tire les valeurs suivantes :

$$(k)\quad \begin{cases} D_iX = [(q'\cos i - p_1'\sin i)\zeta + 1]\xi - (q_1'\sin i + p'\cos i)\eta, \\ D_iY = (p_1\sin i - q\cos i)\zeta\xi + [(p\cos i + q_1\sin i)\zeta + 1]\eta, \end{cases}$$

dans lesquelles

$$(l)\quad D_i = (p_1q_1' - q_1p_1')\zeta^2 + [(p+q')\cos i + (q_1 - p_1')\sin i]\zeta + 1,$$

le coefficient de ζ^2 pouvant être remplacé dans cette dernière, si bon semble, par

$$(77)\qquad p_1q_1' - q_1p_1' = pq' - qp' = K' : \sin^2\Phi.$$

Appliquons immédiatement ceci à la recherche du faisceau dioptique relatif à la trace OT_i du plan tangent P_i, trace dont l'équation est

$$f_0 = (q'\cos i - p_1'\sin i)X - (q_1'\sin i + p'\cos i)Y = 0.$$

On trouvera un paraboloïde hyperbolique ayant pour plan directeur vertical

$$(m)\qquad \frac{Y}{X} = \frac{K_1'u^2 - (K_{(2)} - K_{(1)})u + K_2'}{K_1u^2 + (K_{(2)}' - K_{(1)}')u + K_2} = \frac{K_i'}{K_i}$$

(u remplaçant toujours tg i). Nous désignerons ce plan par Π_i. Les quantités $K_{(1)}$, $K_{(1)}'$ ... qui figurent dans son équation ne sont autres que les binômes (75). Quant aux nouveaux, voici leurs valeurs :

$$(78)\quad \begin{cases} K_1 : \sin^2\Phi = q_1'q_1 - q_1'p_1', \quad K_2 : \sin^2\Phi = p'q' + p'p, \\ K_1' : \sin^2\Phi = p_1'p_1' - q_1'p_1, \quad K_2' : \sin^2\Phi = p'q + q'q'. \end{cases}$$

Entre eux tous on a d'ailleurs les relations simples

$$(79)\qquad \begin{cases} K_1 + K_1'\cos\Phi = K_{(1)}\sin\Phi, \\ K_1' + K_1\cos\Phi = K_{(1)}'\sin\Phi, \end{cases}$$

ou, équivalemment,

$$(79') \qquad \begin{cases} K_{(1)} - K'_{(1)} \cos \Phi = K_1 \sin \Phi, \\ K'_{(1)} - K_{(1)} \cos \Phi = K'_1 \sin \Phi, \end{cases}$$

avec deux autres systèmes analogues en K_2, K'_2, $K_{(2)}K'_{(2)}$.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, pour $u = \infty$ et $u = 0$, le plan Π_i coïncide respectivement avec les plans axiaux-limites Π_1 et Π_2 relatifs aux cônes extrêmes C_1 et C_2.

Pour que ce même plan Π_i coïncide avec le plan de polarisation Π, il faut avoir

$$[(q_1 - p'_1)u + (p + q')](\Delta_1 u + \Delta_2) = 0.$$

Le premier facteur, remarquons-le, est identiquement nul lorsqu'on a $q_1 = p'_1$ et $p = -q'$. Or, il est aisé de prouver que, dans ce cas, la pseudo-surface $\mathcal{F}'$ s'est transformée en une ***surface minima***. En effet, l'indicatrice de $\mathcal{F}'$ étant, dans le cas le plus général,

$$(80) \qquad qX^2 - (p - q')XY - p'Y^2 = -\frac{1}{\sin^2 \Phi},$$

devient une indicatrice de surface pour $p = -q'$. Que si on y adjoint la condition $q_1 = p_1$ ou, ce qui revient au même,

$$(81) \qquad q - p' + (p - q')\cos \Phi = 0,$$

les asymptotes de cette indicatrice deviennent rectangulaires, et, par suite, $\mathcal{F}'$ se change en surface minima, ce qu'il fallait démontrer.

2° Les formules propres aux faisceaux dioptiques complémentaires peuvent se déduire de celles qui précèdent en y remplaçant i par $i + \frac{\pi}{2}$. — Sans avoir besoin d'écrire ici ces formules, prenons pour f_0 la trace OT_j du plan P_j perpendiculaire au plan P_i, trace qui a dès lors pour équation, en coordonnées obliques,

$$f_0 = (q' \sin i + p'_1 \cos i)X + (q'_1 \cos i - p' \sin i)Y = 0.$$

On obtiendra un nouveau paraboloïde dont il nous suffira de faire connaître le plan directeur vertical, savoir :

$$(n) \qquad \frac{Y}{X} = \frac{K'_1 + (K_{(2)} - K_{(1)})\,u + K'_2 u^2}{K_1 - (K'_{(2)} - K'_{(1)})\,u + K_2 u^2} = \frac{K'_j}{K_j}.$$

Nous le désignerons par Π_j. Il jouit évidemment de propriétés analogues à celles du plan Π_i, et sur lesquelles nous n'insisterons pas.

30. IV. *Lieu géométrique des droites focales.* — Si l'on se reporte au nº 18, on reconnaîtra aussitôt que ce lieu résulte de l'élimination de i entre l'équation des plans focaux dioptiques (e), c'est-à-dire, explicitement,

$$\left\{\begin{aligned} &[(p_1X + p'_1Y)\,X + (q_1X + q'_1Y)\,Y]\sin i \\ &-[(qX + q'Y)\,X - (pX + p'Y)\,Y]\cos i = 0, \end{aligned}\right.$$

et celle des plans horizontaux correspondants (l), ou

$$\frac{K'}{\sin^2\Phi}Z^2 + [(p + q')\cos i + (q_1 - p'_1)\sin i]\,Z + 1 = 0.$$

L'équation du huitième degré à laquelle on arrive se décompose, ici encore, en deux autres du quatrième qui représentent deux conoïdes réciproques dont le module d'inversion est $\frac{\sin^2\Phi}{K'}$.

Le premier de ces conoïdes est (en fonction de p, p', q, q', par exemple)

$$(82)\left\{\begin{aligned} &\frac{K'}{\sin^2\Phi}(X^2 + Y^2 + 2XY\cos\Phi)Z^2 \\ &-[(pX+p'Y)^2+(qX+q'Y)^2+2(pX+p'Y)(qX+q'Y)\cos\Phi]=0. \end{aligned}\right.$$

Quant au second, on peut le déduire de celui-ci à l'aide de la relation $Z_1Z_2 = \frac{\sin^2\Phi}{K'}$, fournie, du reste, directement par le produit des racines de l'équation en Z ci-dessus.

En faisant dans (82) $\frac{Y}{X} = \frac{\sin\omega}{\sin(\Phi - \omega)}$, on constate que le maximum et le minimum de Z sont donnés par la formule

$$(83) \qquad \operatorname{tg} 2\Omega = \frac{2(\mathcal{B}' - \mathcal{A}\cos\Phi)\sin\Phi}{\mathcal{A} - \mathcal{A}' + 2(\mathcal{B}' - \mathcal{A}\cos\Phi)\cos\Phi},$$

dans laquelle on a fait

$$(84)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = p^2 + q^2 + 2pq\cos\Phi = \omega_z^2, \\ \mathcal{B}' = pp' + qq' + (pq' + qp')\cos\Phi = \omega_z\omega_z'\cos(\omega_z, \omega_z'), \\ \mathcal{A}' = p'^2 + q'^2 + 2p'q'\cos\Phi = \omega_z'^2. \end{cases}$$

Or, cette expression (83) est précisément celle qui, en généralisant son analogue (47), fournit les axes de l'*ellipse déviatrice* de $\mathcal{F}'$ (voir Note finale), savoir :

$$(85)\quad (pX + p'Y)^2 + (qX + q'Y)^2 + 2(pX + p'Y)(qX + q'Y)\cos\Phi = 1,$$

ou, plus simplement,

$$(85')\qquad \mathcal{A}X^2 + 2\mathcal{B}'XY + \mathcal{A}'Y^2 = 1,$$

ellipse dont l'aire est égale à $\dfrac{\pi\sin\Phi}{\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}' - \mathcal{B}'^2}}$ ou bien à $\dfrac{\pi\sin^2\Phi}{K'}$.

31. V. *Relations homographiques.* — 1° Si, dans la relation

$$p_1 + p_1'\mu_1 + q_1\nu_1 + q_1'\mu_1\nu_1 = 0,$$

on fait $\nu_1 = -\dfrac{p_1'}{q_1'}$ (trace OT_1 de P_1), on obtient le plan de polarisation Π sous la seconde des formes (h) ci-dessus.

Pour $\nu_1 = \dfrac{q'}{p'}$ (direction perpendiculaire), il vient

$$(86)\quad \frac{Y}{X} = \frac{\sin\alpha_\gamma}{\sin(\Phi - \alpha_\gamma)} = -\frac{p'p_1 + q'q_1}{p_1'p' + q_1'q'} = -\frac{p_1'p + q_1'q}{p'p_1' + q'q_1'} = -\frac{K_\gamma}{K_\gamma'},$$

α_γ désignant l'azimut. — C'est le corrélatif du plan Π (n° 21).

Inversement, si l'on fait $\mu_1 = -\dfrac{p_1'}{q_1'}$, on trouve le premier plan axial-limite Π_1, savoir :

$$(87)\qquad \frac{Y}{X} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\Phi - \alpha_1)} = \frac{p_1'p_1' - q_1'p_1}{q_1'q_1 - q_1'p_1'} = \frac{K_1'}{K_1}.$$

On obtiendrait le plan perpendiculaire au deuxième plan axial-limite Π_2 en posant $\mu_1 = \dfrac{q'}{p'}$.

L'analogie avec le cas où les coordonnées étaient rectangu-

laires se maintient donc jusqu'ici dans toute son intégrité. On va voir qu'il en sera de même jusqu'à la fin.

2° Étant donnée la relation homographique

$$(88) \qquad q + q'\mu_2 - p\nu_2 - p'\mu_2\nu_2 = 0,$$

si l'on y fait tour à tour $\nu_2 = \frac{q''}{p''}$ et $\nu_2 = -\frac{p''_1}{q''_1}$, on retombe sur les plans Π et Π_γ.

Inversement, pour $\mu_2 = \frac{q''}{p''}$, il vient (78)

$$(89) \qquad \frac{Y}{X} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\Phi - \alpha_2)} = \frac{p''q + q'q''}{p'q'' + p''p} = \frac{K'_2}{K_2}.$$

C'est le second plan axial-limite Π_2.

3° Plus généralement, si dans la relation

$$(p_1u - q) + (p'_1u - q')\mu_i + (q_1u + p)\nu_i + (q'_1u + p')\mu_i\nu_i = 0,$$

on pose d'abord $\nu_i = \frac{q'' - p''_1u}{q''_1u + p''}$ (trace OT_i de P_i), et, en second lieu, $\nu_i = -\frac{q''u + p''_1}{q''_1 - p''u}$, ce qui est la direction OT_j perpendiculaire à OT_i, on retrouvera les plans Π et Π_γ.

Inversement, en prenant pour μ_i les valeurs que nous venons d'attribuer successivement à ν_i, on retombe sur le plan axial-moyen Π_i ou (m) et sur le plan perpendiculaire à Π_j (n).

4° Soit enfin la relation homographique, similaire de (70),

$$(qu + p_1) + (q'u + p'_1)\mu_j - (pu - q_1)\nu_j - (p'u - q'_1)\mu_j\nu_j = 0.$$

En y faisant successivement

$$\nu_j = -\frac{q''u + p''_1}{q''_1 - p''u}, \text{ puis } \nu_j = \frac{q'' - p''_1u}{q''_1u + p''},$$

on obtient à nouveau les plans Π et Π_γ.

En attribuant, au contraire, à μ_j ces mêmes valeurs, il vient le plan axial-moyen complémentaire Π_j ou (n) et le plan perpendiculaire à Π_i (m).

Quant aux relations (72) et (72'), il nous suffira de dire

qu'elles se maintiennent, elles aussi, intégralement. Il n'y a que quelques indices à y introduire, à la façon des formules écrites ci-dessus.

32. VI. *Problème.* — A quelle condition les plans Π_i et Π_j peuvent-ils coïncider?

Si l'on égale, à cette fin, les coefficients angulaires (m) et (n) ou, ce qui est équivalent, si, par analogie avec (55), on pose

$$(p)\qquad \frac{Y}{X}=\frac{K'_1u^2-(K_{(2)}-K_{(1)})u+K'_2}{K_1u^2+(K'_{(2)}-K'_{(1)})u+K_2}=\frac{K'_1+K'_2}{K_1+K_2},$$

on en déduira l'équation du second degré

$$(90)\quad u^2-\frac{(K_1+K_2)[K_{(2)}-K_{(1)}]+(K'_1+K'_2)[K'_{(2)}-K'_{(1)}]}{K_2K'_1-K_1K'_2}u-1=0,$$

laquelle, chose remarquable, se réduit, ici encore, bien que les coordonnées soient obliques, à

$$(90')\qquad u^2+2\cot 2(\mathrm{a}_2-\Omega_1)\,u-1=0,$$

Ω_1 désignant le plus petit des angles qui satisfont à (83), et a_2 l'azimut du plan tangent P_2 donné par la formule

$$\operatorname{tg}\mathrm{a}_2=\frac{q'\sin\Phi}{p'+q'\cos\Phi}=\frac{q'}{p'_1}$$

correspondante au coefficient angulaire $\frac{q'}{p'}$ de la trace de ce plan. De cette formule on déduit, remarquons-le, la suivante, nécessaire à la vérification du résultat

$$\operatorname{tg}2\mathrm{a}_2=\frac{2q'(p'+q'\cos\Phi)\sin\Phi}{p'^2-q'^2+2q'(p'+q'\cos\Phi)\cos\Phi}.$$

Finalement, comme au n° 20, on arrive aux deux mêmes solutions rectangulaires

$$i=\mathrm{a}_2-\Omega_1,\qquad i=(\mathrm{a}_2-\Omega_1)\pm\frac{\pi}{2}.$$

Il y a plus : les plans Π_i et Π_j ayant actuellement pour équation commune $\frac{Y}{X}=\frac{K'_1+K'_2}{K_1+K_2}$, on constate que leur trace hori-

zontale est, même ici, perpendiculaire de celle du plan Σ ou (i) connexe du plan Π.

NOTE sur l'ellipse déviatrice d'une pseudo-surface quelconque.

C'est en étudiant les conoïdes réciproques, lieu géométrique des diverses droites focales (nos 18 et 30), que nous avons été amené à considérer cette ellipse remarquable. Pour bien mettre en lumière son origine infinitésimale, il nous faut reprendre les choses de plus haut et passer en revue les courbures composantes de celle dont cette conique émane directement.

Soit donc, comme prélude, S une courbe quelconque située sur une pseudo-surface donnée $\mathcal{F}'$. Rapportons cette courbe à deux autres (s) et (s') situées, elles aussi, sur $\mathcal{F}'$. Leurs tangentes MX, MY détermineront au point M le plan tangent de notre pseudo-surface. Si maintenant on mène la normale MN ou MZ au plan des XY, puis qu'on trace sur ce même plan les semi-droites MX_1, MY_1 respectivement perpendiculaires à MX, MY, on aura construit les trièdres birectangles MXYZ et $MX_1Y_1Z_1$ d'angles Φ et $\pi - \Phi$, auxquels se rapportent toutes les formules de notre précédent paragraphe.

Ceci posé, désignons par dS l'arc élémentaire MM′, par ds, ds' ses composantes obliques comptées sur (s) et (s'), par φ et φ' les angles que ces composantes font avec dS ou, si l'on veut, ceux que leurs tangentes MX, MY font avec la tangente MT menée en M à la courbe S. Entre ces éléments géométriques, on aura les relations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{ds}{\sin\varphi'} = \frac{ds'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{\sin\Phi},\\ &\sin^2\varphi + \sin^2\varphi' + 2\sin\varphi\sin\varphi'\cos\Phi = \sin^2\Phi,\end{aligned}\right.$$

dont nous allons faire usage.

I. *Courbure de front ou torsion géodésique.* — Sans reproduire ici les calculs qui conduisent à l'expression de cette courbure, et qu'on trouvera développés dans notre travail, souvent cité, sur les congruences (élémentaires) de droites, travail qui est au fond un exposé (partiel) des principes fondamentaux de la théorie des pseudo-surfaces, on y verra (n° 7) que la courbure en question $\frac{1}{r_{0,s}}$ peut, au moyen des notations actuelles, se mettre sous la forme

$$(2)\qquad \mathbf{p}\sin^2\varphi' + (\mathbf{q}+\mathbf{p}')\sin\varphi\sin\varphi' + \mathbf{q}'\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\Phi}{r_{0,s}},$$

ou bien

$$(2')\qquad (p_1\sin\varphi' + p'_1\sin\varphi)\sin\varphi' + (q_1\sin\varphi' + q'_1\sin\varphi)\sin\varphi = \frac{\sin\Phi}{r_{0,s}},$$

ou enfin

$$(2'')\qquad \mathrm{P}_1\sin\varphi' + \mathrm{Q}_1\sin\varphi = \frac{1}{r_{0,s}},$$

pourvu qu'on pose

$$(3)\qquad \begin{cases} p_1\sin\varphi' + p'_1\sin\varphi = \mathrm{P}_1\sin\Phi,\\ q_1\sin\varphi' + q'_1\sin\varphi = \mathrm{Q}_1\sin\Phi.\end{cases}$$

Lorsque $\frac{1}{r_{0,s}} = 0$, S devient une des lignes de courbure (obliques) de $\mathcal{F}'$. D'après (1) et (2'), son équation est alors

$$(\mathrm{S}_1)\qquad p_1\,ds^2 + (q_1 + p'_1)\,ds\,ds' + q'_1\,ds'^2 = 0,$$

forme connue (n° 27).

Pour $\varphi = 0$ et $\varphi' = \Phi$, ou bien pour $\varphi = \Phi$ et $\varphi' = 0$, la formule (2'), rapprochée des relations (74), nous donne

$$(4)\qquad \begin{cases} p_1\sin\Phi = \mathbf{p} = p + q\cos\Phi = \frac{1}{r_{0,s}},\\[1ex] q'_1\sin\Phi = \mathbf{q}' = q' + p'\cos\Phi = \frac{1}{r_{0,s'}}.\end{cases}$$

Ce sont là les courbures de front ou les torsions géodésiques des lignes coordonnées (s) et (s').

Enfin si, dans (2) notamment, on pose

$$(5)\qquad \frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi}\sqrt{r_{0,s}} = \mathrm{X},\qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}\sqrt{r_{0,s}} = \mathrm{Y},$$

elle se transformera en

$$\mathbf{p}X^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{p}')XY + \mathbf{q}'Y^2 = 1. \tag{6}$$

Il sera prouvé ultérieurement que c'est là, en coordonnées obliques, la section horizontale de la quadrique génératrice de la surface normo-directive Σ_{n} prise dans toute sa généralité. Qu'il nous suffise d'avoir, dès maintenant, signalé cette importante propriété.

II. *Courbure de profil ou normale.* — D'après le Mémoire rappelé plus haut, la courbure de profil ou normale $\frac{1}{r'_s}$ de la ligne S (n° 7) a pour expression

$$\mathbf{q}_1 \sin^2\varphi' - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}'_1)\sin\varphi\sin\varphi' - \mathbf{p}'_1\sin^2\varphi = -\frac{\sin^2\Phi}{r'_s}, \tag{7}$$

ou bien

$$(q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\sin\varphi' - (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)\sin\varphi = -\frac{\sin\Phi}{r'_s}, \tag{7'}$$

ou encore

$$Q\sin\varphi' - P\sin\varphi = -\frac{1}{r'_s}, \tag{7''}$$

à condition de poser

$$\left\{\begin{aligned} p\sin\varphi' + p'\sin\varphi &= P\sin\Phi,\\ q\sin\varphi' + q'\sin\varphi &= Q\sin\Phi. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Lorsqu'on a $\frac{1}{r'_s} = 0$, S devient une des lignes asymptotiques de $\mathcal{F}'$ et peut dès lors se mettre sous la forme connue (n° 27)

$$q\,ds^2 - (p - q')\,ds\,ds' - p'\,ds'^2 = 0. \tag{S$_2$}$$

Pour $\varphi = 0$, $\varphi' = \Phi$, ou bien pour $\varphi = \Phi$, $\varphi' = 0$, la formule (7′), rapprochée de (74), nous donne

$$\left\{\begin{aligned} q\sin\Phi &= \mathbf{q}_1 = q_1 - p_1\cos\Phi = -\frac{1}{r'_s},\\ p'\sin\Phi &= \mathbf{p}'_1 = p'_1 - q'_1\cos\Phi = \frac{1}{r'_{s'}}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Ce sont les courbures normales des lignes coordonnées.

En particulier, si dans (7) on pose

$$\text{(10)} \qquad \frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi}\sqrt{r_s^{\prime}} = \text{X}, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}\sqrt{r_s^{\prime}} = \text{Y},$$

il viendra

$$\text{(11)} \qquad \mathbf{q}_1\text{X}^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1')\,\text{XY} - \mathbf{p}_1'\text{Y}^2 = -1.$$

C'est l'équation générale de l'*indicatrice* de la pseudo-surface $\mathcal{F}'$.

III. *Déviation verticale.* — Sans nous arrêter à faire connaître ici les liens cinématiques étroits qui unissent cette courbure à la projection horizontale de l'axe instantané (résultant) d'un système rigide dans un mouvement à deux variables; sans même introduire explicitement l'angle de contingence $d\varepsilon$ et, avec lui, la pseudo-normale M′N′ correspondante à l'extrémité M′ de l'arc dS, il suffira à notre objet de rappeler qu'en vertu d'une propriété caractéristique, la déviation verticale $\frac{1}{\mathbf{r}_s}$ de toute ligne S tracée sur une pseudo-surface est la résultante orthogonale des deux courbures de front et de profil que nous venons d'analyser.

Prenant ces dernières sous les formes (2′) et (7′), on aura donc par définition

$$\text{(12)} \quad \frac{1}{r_{0,s}^{2}} + \frac{1}{r_s'^{2}} = (\text{P}_1\sin\varphi' + \text{Q}_1\sin\varphi)^2 + (\text{Q}\sin\varphi' - \text{P}\sin\varphi)^2 = \frac{1}{\mathbf{r}_s^2}.$$

Mais des systèmes (3) et (8) on tire

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \text{P} + \text{Q}\cos\Phi = \text{P}_1\sin\Phi, \\ \text{Q} + \text{P}\cos\Phi = \text{Q}_1\sin\Phi. \end{cases}$$

Substituant, on trouve

$$\text{(14)} \quad \text{P}^2 + \text{Q}^2 + 2\text{PQ}\cos\Phi = \text{P}_1^2 + \text{Q}_1^2 - 2\text{P}_1\text{Q}_1\cos\Phi = \frac{1}{v}.$$

Si l'on choisit la première, par exemple, de ces deux expressions, on verra (8) qu'elle revient explicitement à

$$\text{(14')} \quad \begin{cases} (p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)^2 + (q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)^2 \\ + 2(p\sin\varphi' + p'\sin\varphi)(q\sin\varphi' + q'\sin\varphi)\cos\Phi = \dfrac{\sin^2\Phi}{v_s^2}. \end{cases}$$

Pour $\varphi = 0$, $\varphi' = \Phi$, ou bien pour $\varphi = \Phi$, $\varphi' = 0$, elle donne

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} p^2 + q^2 + 2pq \cos\Phi &= \frac{1}{v_s^2} = \omega_z^2 = \mathcal{A}, \\ p'^2 + q'^2 + 2p'q' \cos\Phi &= \frac{1}{v_s'^2} = \omega_z'^2 = \mathcal{A}'. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les déviations verticales des lignes coordonnées (s) et (s') On vérifie, d'autre part, aisément que leur angle (ω_z, ω_z') a pour expression

$$(16)\quad pp' + qq' + (pq' + qp') \cos\Phi = \omega_z\omega_z' \cos(\omega_z, \omega_z') = \mathcal{B}'.$$

Il est clair que toutes ces formules ont leurs analogues en p_1, q_1, p_1', q_1'. Il suffit pour les construire d'affecter d'indices les premières composantes et de changer Φ en $\pi - \Phi$. Mais revenons à (14'). Si l'on y fait

$$(17)\quad \frac{\sin\varphi'}{\sin\Phi} v_s = X, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi} v_s = Y,$$

il viendra

$$(18)\quad (pX + p'Y)^2 + (qX + q'Y)^2 + 2(pX + p'Y)(qX + q'Y)\cos\Phi = 1.$$

C'est l'ellipse déviatrice cherchée. Elle s'offre à nous sous la forme que nous lui avons déjà reconnue (85). On pourrait aussi l'écrire

$$(18')\quad \omega_z^2 X^2 + \omega_z'^2 Y^2 + 2\omega_z\omega_z' \cos(\omega_z, \omega_z')\, XY = 1,$$

ou simplement

$$(18'')\quad \mathcal{A}X^2 + 2\mathcal{B}'XY + \mathcal{A}'Y^2 = 1.$$

L'équation de cette conique prend sa forme ***réduite*** en même temps que l'indicatrice (11). En effet, pour rapporter celle-ci à ses axes de figure, il faut en premier lieu supposer que $\Phi = \frac{\pi}{2}$, et ensuite faire $p = \mathbf{p}_1 = q' = \mathbf{q}_1'$, ce qui ramène, d'une part, l'indicatrice à la forme

$$qX^2 - p'Y^2 = -1,$$

